

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

**Тақырыбы: «ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ
ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРЫ
БӨЛІНГЕН ЕСЕП АРҚЫЛЫ ТУЫНДАЙТЫН
ҮЙІРТКІНІҢ ТҰРПАТЫ»**

Орындаған

Ж.Б.Анарбек

Ғылыми жетекші

ф.-м.ғ.к., PhD

Л.К.Жапсарбаева

Үйірткі — кей кездері бастапқы біреуінің нұсқасының жетілдірілген түрі ретінде қарастырылуы мүмкін үшінші функцияны тудыратын, φ және ψ екі функцияларына қолданылатын амал.

$\varphi, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ екі функциясы — $\mathbb{R}^n$ кеңістігінде Лебег өлшемді бойынша интегралданатын болсын. Онда олардың үйірткісі деп

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\psi(x - y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x - y)\psi(y)dy$$

формуласымен анықталатын $\varphi, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ функциясын айтады.



Үйірткінің қасиеттері:

1. Коммутативті: $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$
2. Ассоциативті: $\varphi \cdot (\psi \cdot h) = (\varphi \cdot \psi) \cdot h$
3. Сызықты (дистрибутивті және санға көбейту):
 - a. $(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \psi = \varphi_1 \cdot \psi + \varphi_2 \cdot \psi$
 - b. $\varphi \cdot (\psi_1 + \psi_2) = \varphi \cdot \psi_1 + \varphi \cdot \psi_2$
 - c. $(a\varphi) \cdot \psi = a(\varphi \cdot \psi), \forall a \in \mathbb{R}^n.$
4. $\varphi_0 \cdot \psi = 0, \forall \psi \Rightarrow \varphi_0 = 0$

Есептің қойылуы:

$L_2(0,1)$ функционалдық кеңістігінде

$$Ay(x) = y'', 0 < x < 1 \quad (1)$$

дифференциалдық өрнегімен және

$$D(A) = \{y \in W_2^2[0,1]: U_1(y) = 0, U_2(y) = 0\}$$

анықталу облысымен берілген A дифференциалдық операторын қарастырамыз.

Шекаралық шарттар:

$$U_1(y) = y'(0) + ay(0) = by(1)$$

$$U_2(y) = y'(1) + cy(0) + dy(1)$$

*СБЕДТ қарастырайық:

$$Ay = f \quad (2)$$

A — ға A^{-1} кері операторы бар болса $\Rightarrow$

(2)-теңдеудің шешімі келесідей болады:

$$y = A^{-1}f \quad (3)$$

(2)-теңдеуінің орнына қолайлылық үшін келесі теңдеуді қолданайық:

$$Ay - \lambda y = f \Rightarrow$$

$$y'' - \lambda y = f \quad (4)$$

(4)-теңдеудің шешімін Владимиров В.С. кітабында:

$$y(x) = \varepsilon * f \quad (5)$$

үйірткісі түрінде бергені дәлелденген.

*3) және (5) теңдеуден:

$$A^{-1}f = \varepsilon * f$$

аламыз.

$$\begin{aligned} Ay - \lambda y &= f \\ y &= (A - \lambda I)^{-1}f \end{aligned} \quad (6) \quad \Rightarrow$$

мұндағы $(A - \lambda I)^{-1}$ — A операторының резольвентасы.

Сонда

$$(A - \lambda I)^{-1}f = \varepsilon * f$$

*) (6) теңдеуінің шешімі Грин функциясы арқылы келесі түрде жазылады:

$$y(x, \lambda) = \int_0^1 G(x, t, \lambda) f(t) dt$$

мұндағы $G(x, t, \lambda) = \frac{H(x, t, \lambda)}{\Delta(\lambda)}$, $\Delta(\lambda)$ және $H(x, t, \lambda)$ функциялары біртекті $y'' - \lambda y = 0$ дифференциалдық теңдеулер шешімінің іргелі жүйелері арқылы жазылады

$$\begin{aligned}
(A - \lambda I)^{-1} f(x) = & c \int_0^x (x-t)g(\tau-t)f(t)d\tau + b \int_x^1 (x-t)g(\tau-t)f(t)d\tau - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^1 g(1-t-x)f(t)dt - \frac{1}{2} \int_0^x g(1+t-x)f(t)dt + \frac{a-d}{2} \int_0^x (1+t-x-\tau)g(\tau)f(t)d\tau - \\
& - \frac{a+d}{2} \int_0^1 (1-x-t-\tau)g(\tau)f(t)d\tau + \\
& + 2(ad-bc) \int_0^1 t(1-x-\eta)g(\eta)f(t)d\eta. \quad (2)
\end{aligned}$$

*

Анықтама. (2) теңдігінің оң жағы A операторымен туындалған үйірткі деп аталады және g мен f функцияларының бинарлы операциясын білдіреді. g және f екі функциясының үйірткісі $(g * _A f)(x)$ арқылы белгіленеді.

***Теорема.** а) Кез келген $f, g \in L_2(0,1)$ кезінде енгізілген үйірткі сызықты емес, коммутативті, ассоциативті;

б) A операторының резольвентасы үйірткілік көрсетілімге ие: $(A - \lambda I)^{-1} f = g *_{A} f$

с) Егер $g \in D(A)$ және $A(g *_{A} f) = Ag *_{A} f$ теңдігі тура болса, f, g функцияларының үйірткісі A операторының анықталу облысына жатады;

д) A операторымен туындалатын үйірткі $g \in L_2(0,1)$ кезінде $g *_{A} f \equiv 0$ тура болса, онда $f \equiv 0$.