М
Е
Х
А
Н
И
К
А

Модуль **1.**

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

- **Раздел 1. Статика**
- **Раздел 2. Кинематика**
- **Раздел 3. Динамика точки**
- **Раздел 4. Общие теоремы динамики**
- **Раздел 5. Аналитическая механика**

Лекционный курс - 51 час
Практические занятия – 51 час
Самостоятельная работа :
- Решение задач.
- Выполнение и защита расчетно-графических заданий (РГЗ)

МЕХАНИКА

Теоретическая механика.
Модуль 1

Раздел 1 – СТАТИКА

- ВВЕДЕНИЕ В СТАТИКУ
  - ЛЕКЦИЯ 1
  - ЛЕКЦИЯ 2
  - ЛЕКЦИЯ 3
- УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ
  - ЛЕКЦИЯ 4
  - ЛЕКЦИЯ 5
- ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ
  - ЛЕКЦИЯ 6

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

Введение в статику

ЛЕКЦИЯ 1
План:

1.1 Основные понятия и определения.
1.2. Аксиомы статики.
1.3. Связи и их реакции

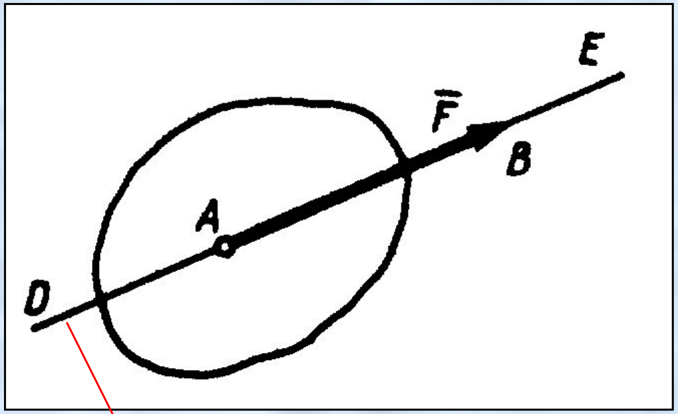
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Статика - *раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и условиях равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.*

Равновесие - *это состояние покоя тела по отношению к другим телам, например по отношению к Земле.*

Абсолютно твердое тело - *такое тело, расстояние между каждыми двумя точками которого всегда остается постоянным.*

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ



линия действия силы

Сила *в механике – это величина, являющаяся основной мерой механического взаимодействия материальных тел.*

Действие силы на тело определяется:

- ***модулем*** *силы;*
- ***направлением*** *вектора силы;*
- ***точкой приложения*** *вектора силы*.

Основная единица измерения силы - 1 ньютон (1 Н).

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Система сил - ***совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело***

Системы сил

- **Плоские** *(линии действия всех сил лежат в одной плоскости)*
- **Пространственные** *(линии действия сил не лежат в одной плоскости)*

- **Параллельные** *(линии действия сил параллельны друг другу)*
- **Произвольные** *(линии действия сил не пересекаются и не параллельны)*
- **Сходящиеся** *(линии действия сил пересекаются в одной точке)*

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

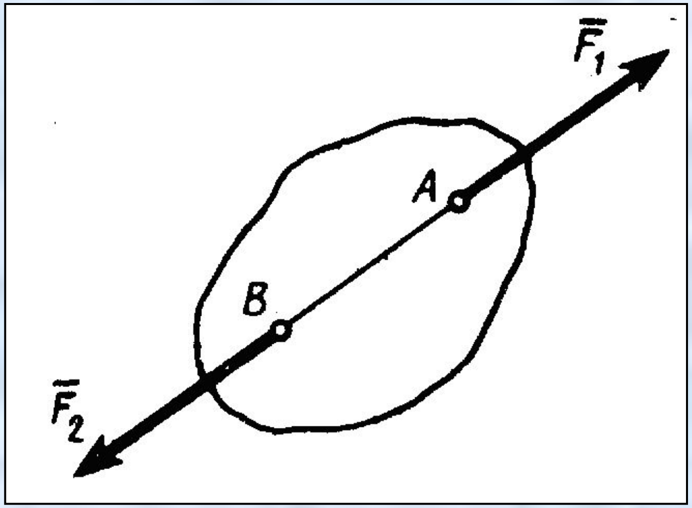
Эквивалентными *называются две системы сил, приводящие тело к одному и тому же кинематическому состоянию.*

Уравновешенная *(эквивалентная нулю) – это такая система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое.*

Равнодействующей системы сил, *называется сила, эквивалентная данной системе сил.*

Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется ***сосредоточенной****.*
Силы, действующие на все точки объема или части поверхности тела, называются ***распределенными****.*

АКСИОМЫ СТАТИКИ



1. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ($F_1 = F_2$) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны

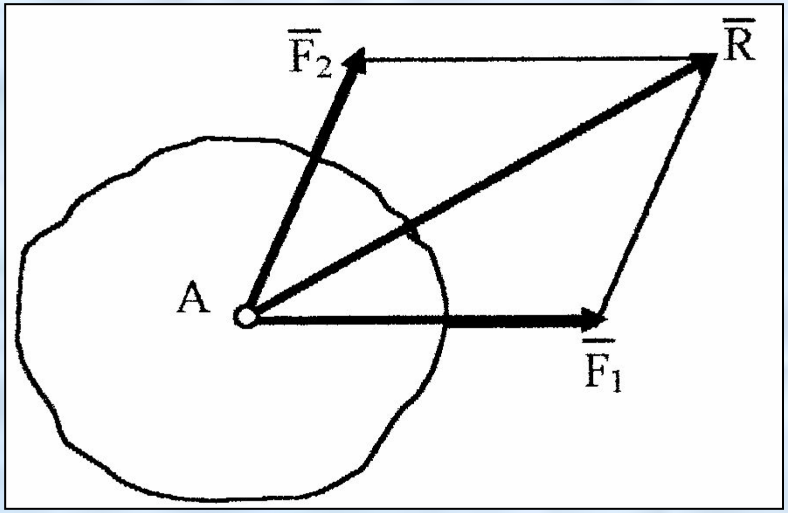
2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменяется, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил

Следствие: *действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.*

АКСИОМЫ СТАТИКИ

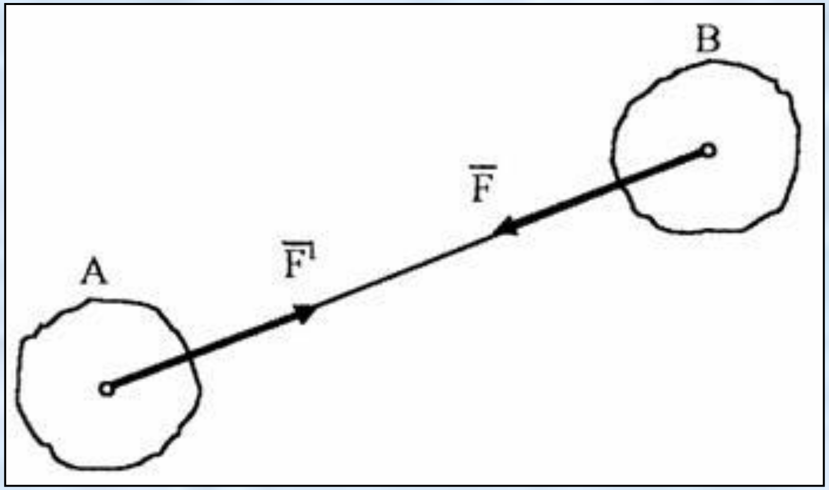
3. Закон параллелограмма сил: *две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах*

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$



АКСИОМЫ СТАТИКИ

4. Закон равенства действия и противодействия: *при всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же численно, но противоположное по направлению противодействие, т.е.*



5. Принцип отвердевания: *равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием уравновешенной системы сил, возможно только при его «отвердевании»*

СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Свободным *называется тело, которое может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве*

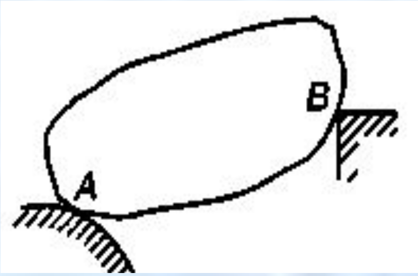
Несвободным *называется тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним, тела* (**связи**)

Реакция связи *– это сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется.*

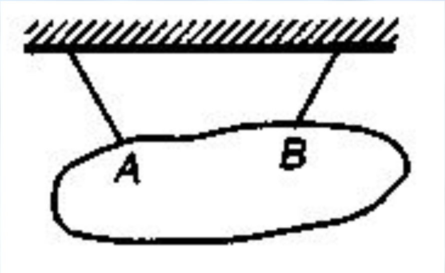
Принцип освобождаемости от связей: *всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связей заменить их реакциями, приложенными к данному телу*

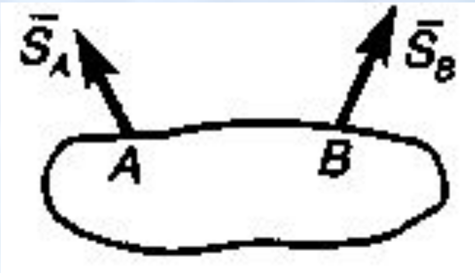
СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Гладкая поверхность

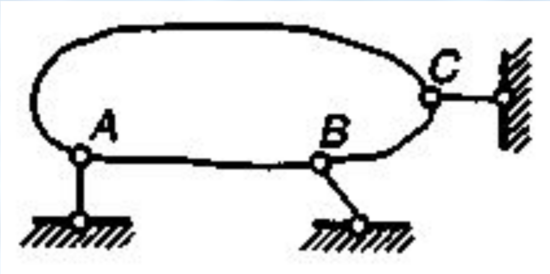


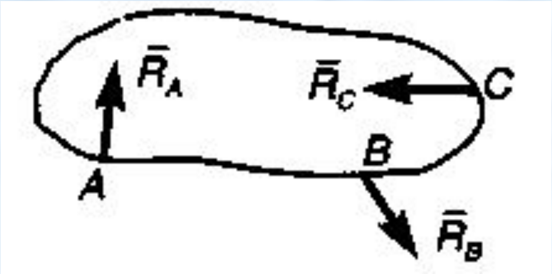
Гибкая связь





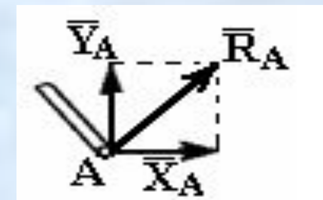
Шарнирный стержень



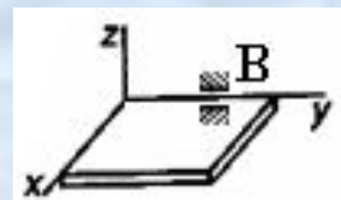


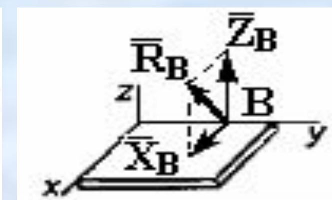
СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Шарнирно-неподвижная опора

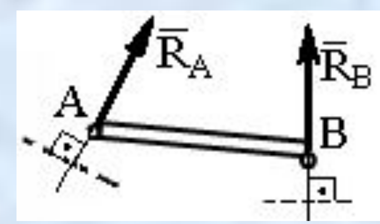


Цилиндрический шарнир

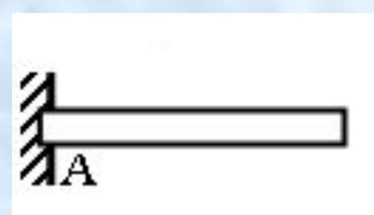


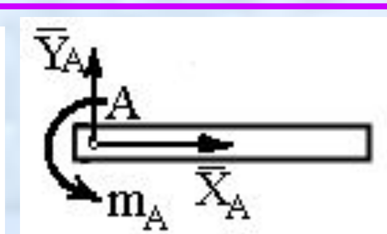


Шарнирно-подвижная опора



Жесткая заделка





2.1

МЕХАНИКА

Модуль 1
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

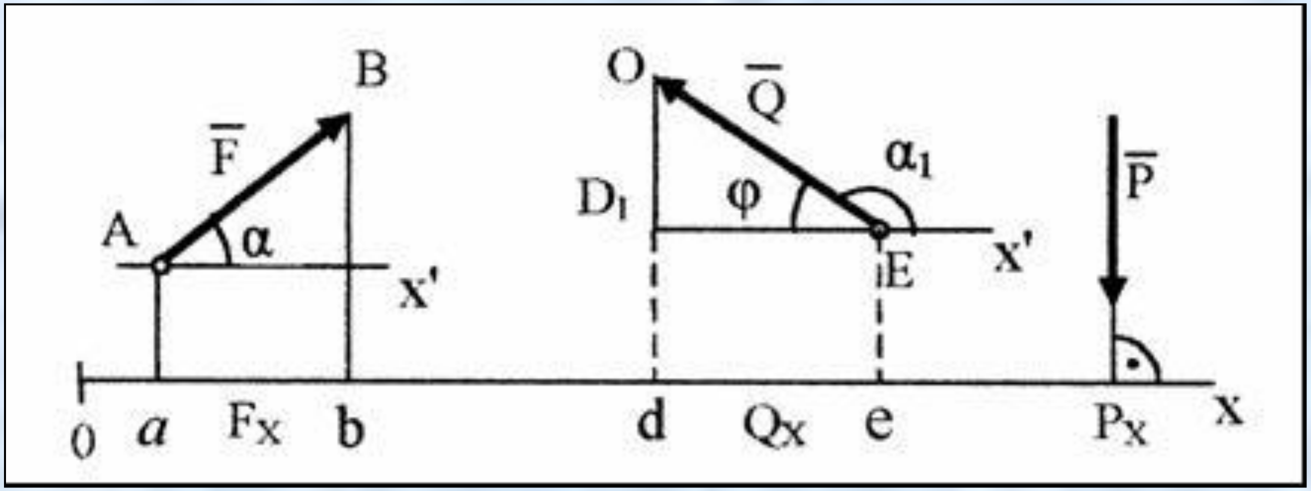
Введение в статику

ЛЕКЦИЯ 2
План:

2.1. Проекции сил.
2.2. Момент силы относительно точки и относительно оси.
2.3. Пара сил, момент пары

ПРОЕКЦИИ СИЛ

Проекция силы на ось - *алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси:*



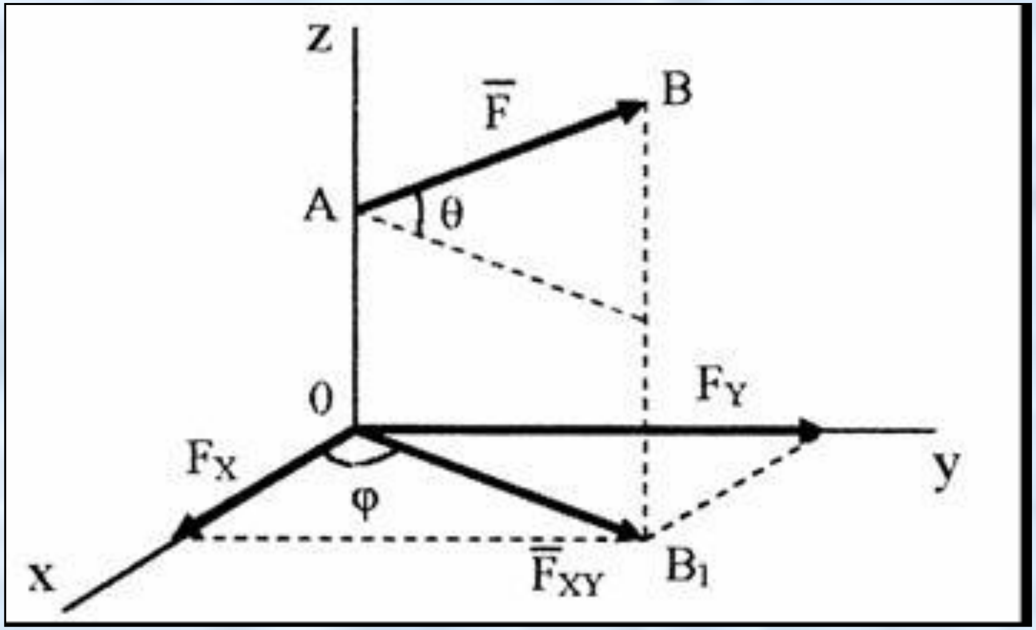
$F_x = F\cos\alpha = ab;$

$Q_x = Q\cos\alpha_1 =$
$= -Q\cos\phi = -de$

$P_x = 0$

ПРОЕКЦИИ СИЛ

Проекция силы на плоскость *это вектор , заключенный между проекциями начала и конца силы на эту плоскость*

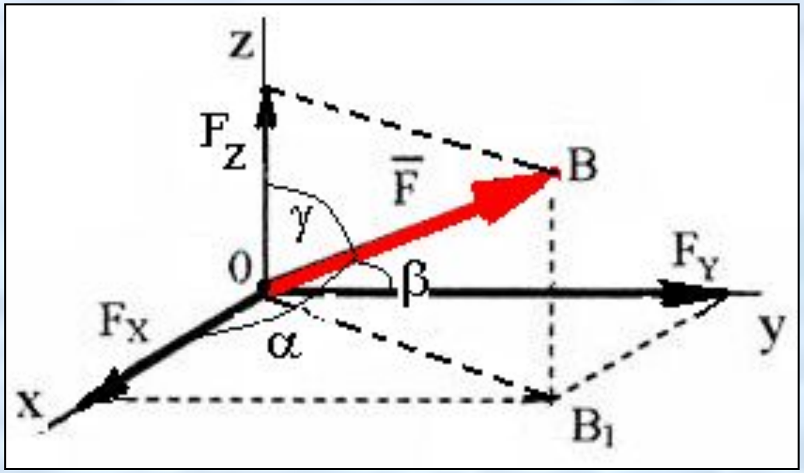


2.4

Введение в статику

ПРОЕКЦИИ СИЛ

Силу можно задавать ее проекциями F_x, F_y, F_z на координатные оси:



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos\alpha = F_x / F,$$

$$\cos\beta = F_y / F,$$

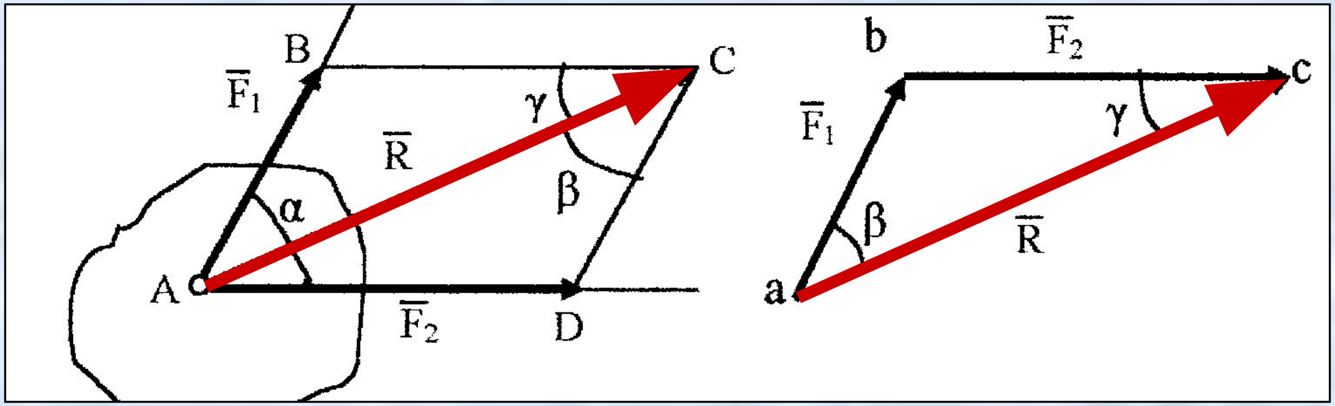
$$\cos\gamma = F_z / F$$

СПОСОБЫ СЛОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ СИЛ

1. Сложение двух сил

Величину, равную геометрической сумме сил системы, называют **главным вектором этой системы сил**

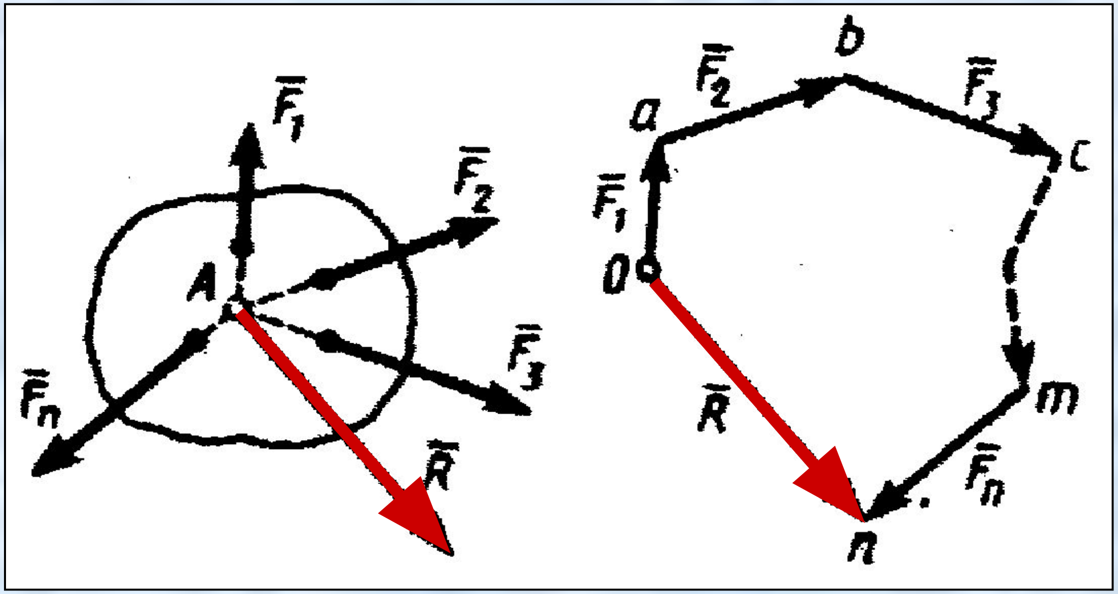
$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} \qquad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$



СПОСОБЫ СЛОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ СИЛ

2. Сложение системы сил

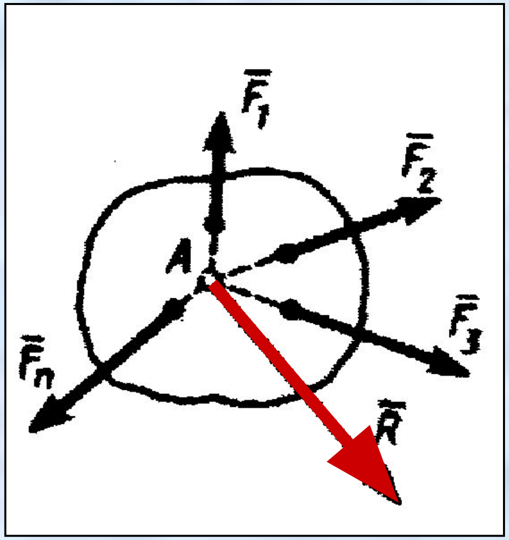
$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_n} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_k}$$



Аналитический способ сложения сил

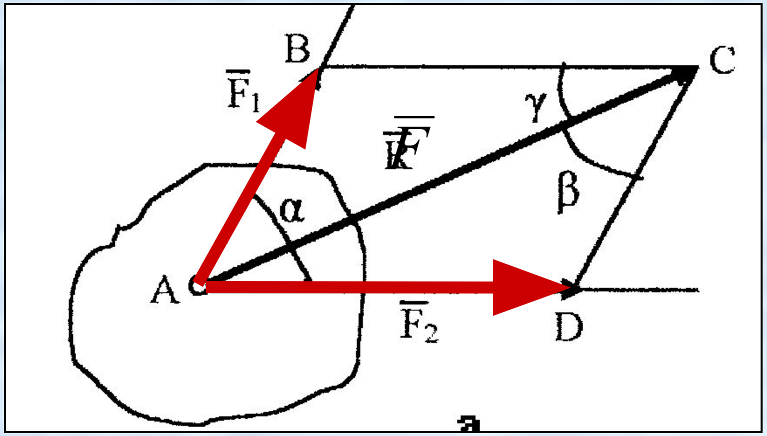
$$R_x = \sum F_{kx};$$
$$R_y = \sum F_{ky};$$
$$R_z = \sum F_{kz}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$
$$\cos\alpha = R_x / R,$$
$$\cos\beta = R_y / R,$$
$$\cos\gamma = R_z / R.$$



Разложение сил

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$$

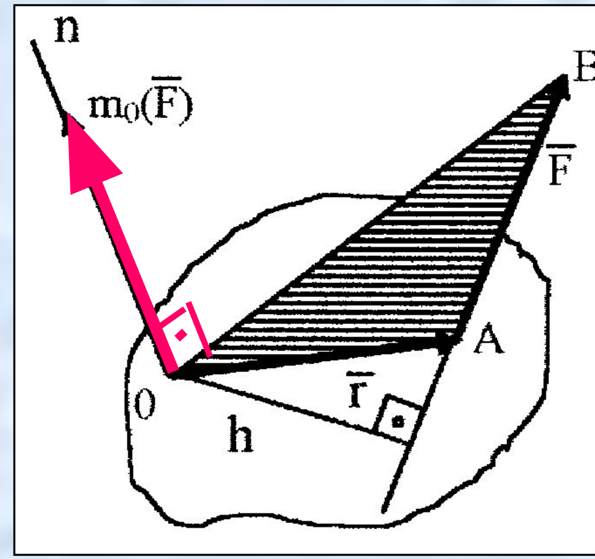


Момент силы относительно точки

Векторный момент силы *относительно центра О - это приложенный в центре О вектор*

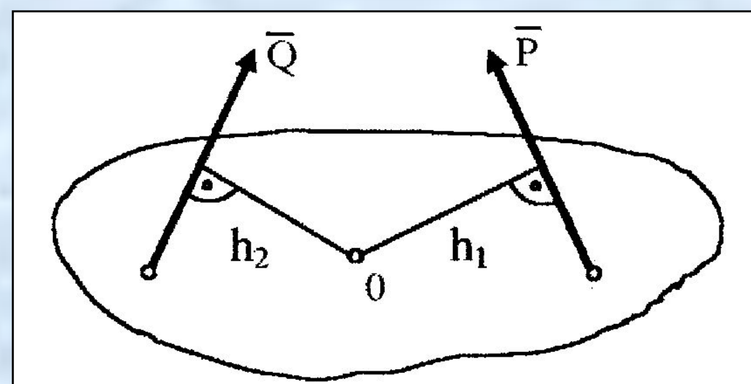
$$\overline{m}_0(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$$

где $\overline{OA} = \overline{r}$ *- радиус-вектор точки А, проведенный из центра О.*



Алгебраический момент силы *относительно центра*

$$m_0(\overline{F}) = \pm F\,h.$$

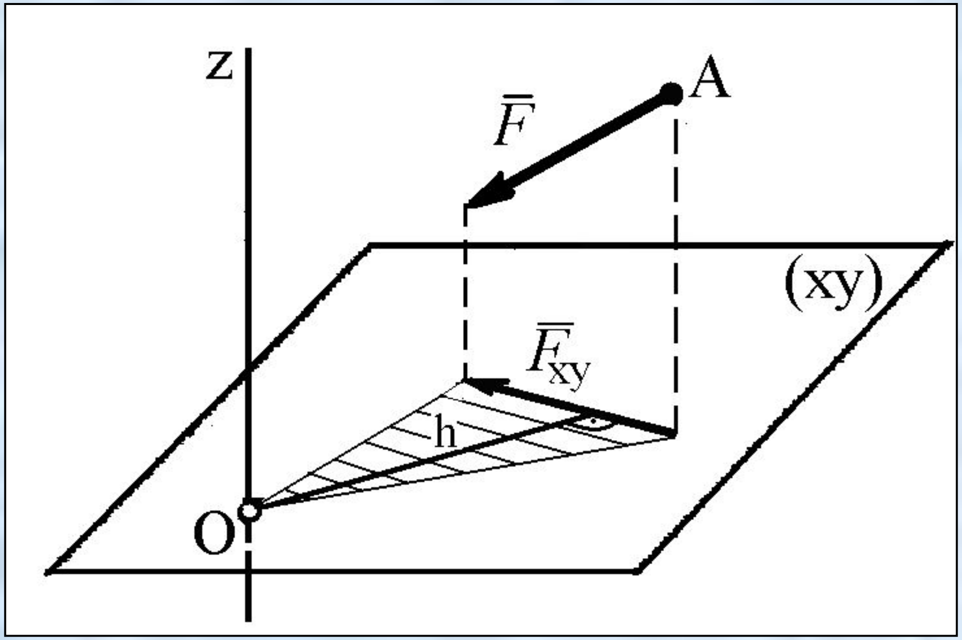


$$m_0(\overline{P}) = P\,h_1,\quad m_0(\overline{Q}) = -\,Q\,h_2$$

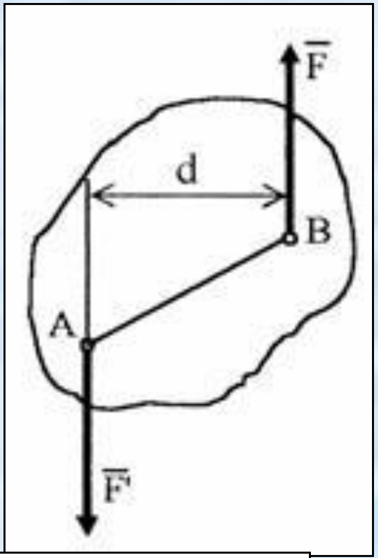
Момент силы относительно оси

- это момент проекции вектора силы на плоскость перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси с этой плоскостью

$$m_z(\overline{F}) = \pm\left|F_{xy}\right|h$$



Пара сил, момент пары



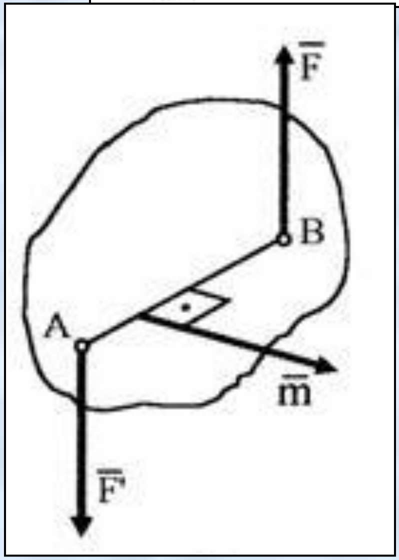
Плоскость действия пары - *плоскость, проходящая через линии действия сил пары*

Алгебраический момент пары

$$m = \pm F\, d$$

Плечо пары d **-** *кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары*

Векторный момент пары - *это вектор* $\overline{m}$*, направленный перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки*



Этот вектор называется ***скользящим***

3.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

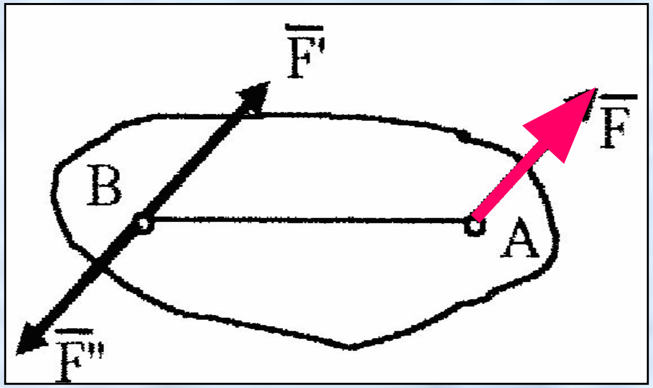
СТАТИКА

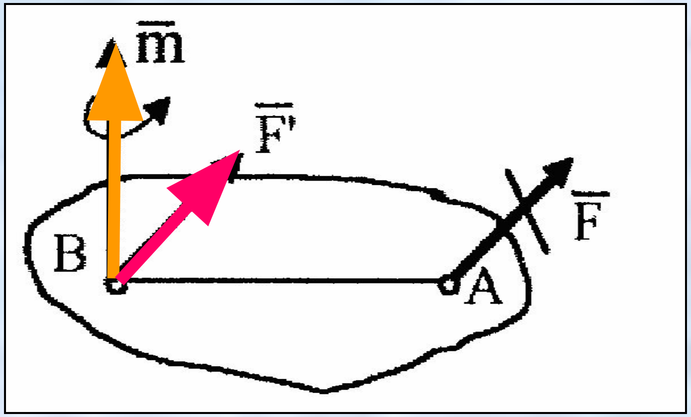
Введение в статику

ЛЕКЦИЯ 3
План:

3.1. Теорема о параллельном переносе силы.
3.2. Приведение системы сил к центру. Главный вектор и главный момент системы сил

Теорема о параллельном переносе силы

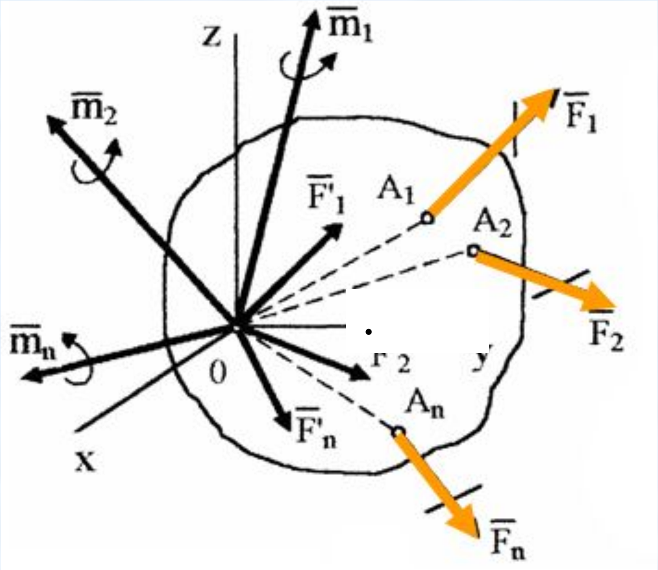




Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя её действия, переносить из данной точки в новый произвольный центр, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно нового центра

Приведение системы сил к центру

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) = (\overline{F}_1', \overline{F}_2', ..., \overline{F}_n') + (\overline{m}_1, \overline{m}_2, ..., \overline{m}_n)$$

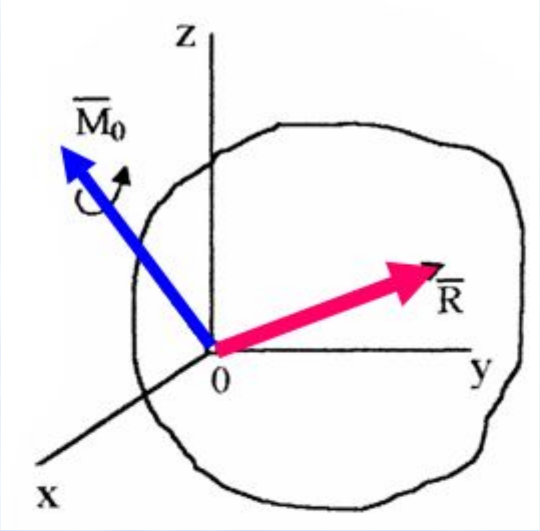


$\overline{F}_1' = \overline{F}_1$, и т д. $\quad \overline{m}_1 = \overline{m}_0(\overline{F}_1)$ и тт.д

$$\boxed{(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) = \overline{R}, \overline{M}_o}$$

$$\overline{R} = \sum \overline{F}_k$$

$$\overline{M}_0 = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k)$$



$\overline{R}$ - **главный вектор системы сил;**

$\overline{M}_0$ - **главный момент системы сил относительно центра О**

Приведение системы сил к центру

Частные случаи приведения системы сил к центру:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{R}=0\\\overline{M}_0\neq 0\end{array}\right]$$ *данная система сил приводится к одной паре сил*

$$\left.\begin{array}{l}\overline{R}\neq 0\\\overline{M}_0=0\end{array}\right]$$ *данная система сил приводится к одной силе, т. е. к равнодействующей*

$$\left.\begin{array}{l}\overline{R}=0\\\overline{M}_0=0\end{array}\right]$$ *данная система сил будет уравновешенной*

4.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

Условия равновесия

ЛЕКЦИЯ 4

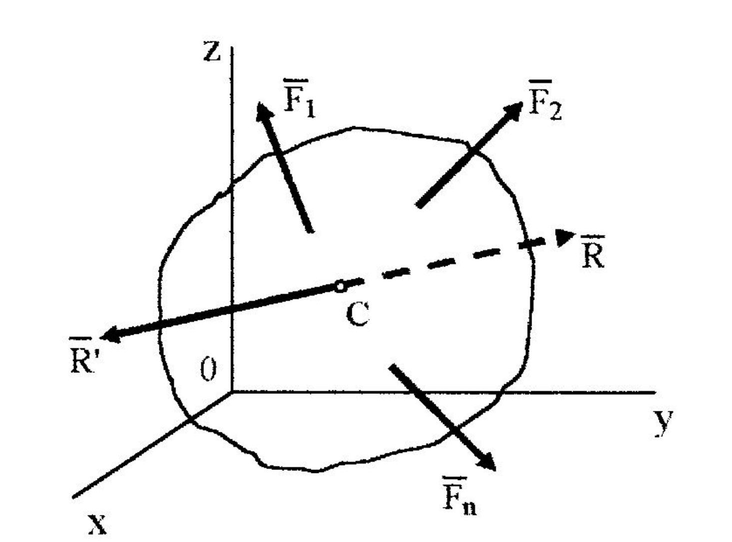
План:

4.1. Теорема Вариньона.

4.2. Условия равновесия различных систем сил.

ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА

Пусть система сил приводится к равнодействующей $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n = \overline{R}$



Приложим в точке С силу $\overline{R}' = \overline{R}$

Система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n, \overline{R}'$ *будет находиться в равновесии и для нее*

$\overline{M}_0 = 0$ *или* $\sum \overline{m}_0(\overline{F}_k) + \overline{m}_0(\overline{R}') = 0$

$$-\overline{m}_0(\overline{R}') = \boxed{\overline{m}_0(\overline{R}) = \sum m_o\left(\overline{F}_k\right)}$$

Если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра О равен сумме моментов сил системы относительно того же центра

4.3

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие пространственной системы произвольно расположенных сил

$$\overline{R} = 0 \qquad \overline{M}_0 = 0$$

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum m_x(\overline{F}_k) = 0,$$
$$\sum F_{ky} = 0, \qquad \sum m_y(\overline{F}_k) = 0,$$
$$\sum F_{kz} = 0, \qquad \sum m_z(\overline{F}_k) = 0.$$

Равновесие пространственной системы параллельных сил

$$\sum F_{kx} = 0,$$
$$\sum F_{ky} = 0,$$
$$\sum m_z(\overline{F}_k) = 0.$$

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны оси z

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие системы сходящихся сил

$$\boxed{\overline{R} = \sum \overline{F}_k = 0}$$

в геометрической форме: *необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из векторов сил, был замкнутым*

в аналитической форме:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0, \text{ } \textit{или}$$

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0,$$

$$\boxed{\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0}$$

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие плоской системы произвольных сил

1

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum F_{kx}=0,\\&\sum F_{ky}=0,\\&\sum m_0(\overline{F}_k)=0\end{aligned}}$$

2

$$\left.\begin{aligned}&\sum m_A(\overline{F}_k)=0,\\&\sum m_B(\overline{F}_k)=0,\\&\sum F_{kx}=0\end{aligned}\right]$$

ось Ох, не перпендикулярна прямой АВ

3

$$\left.\begin{aligned}&\sum m_A(\overline{F}_k)=0,\\&\sum m_B(\overline{F}_k)=0,\\&\sum m_C(\overline{F}_k)=0\end{aligned}\right]$$

центры А, В и С, не лежат на одной прямой

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие плоской системы параллельных сил

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum F_{ky} = 0,\\ &\sum m_0(\overline{F}_k) = 0\end{aligned}}$$

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны оси Oy

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum m_A(\overline{F}_k) = 0,\\ &\sum m_B(\overline{F}_k) = 0\end{aligned}}$$

точки A и B не должны лежать на прямой, параллельной векторам сил.

5.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

Условия равновесия

ЛЕКЦИЯ 5

План:

5.1. Равновесие систем тел.

5.2. Равновесие тела при наличии трения

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМ ТЕЛ

Внутренние связи – это связи, соединяющие части конструкции

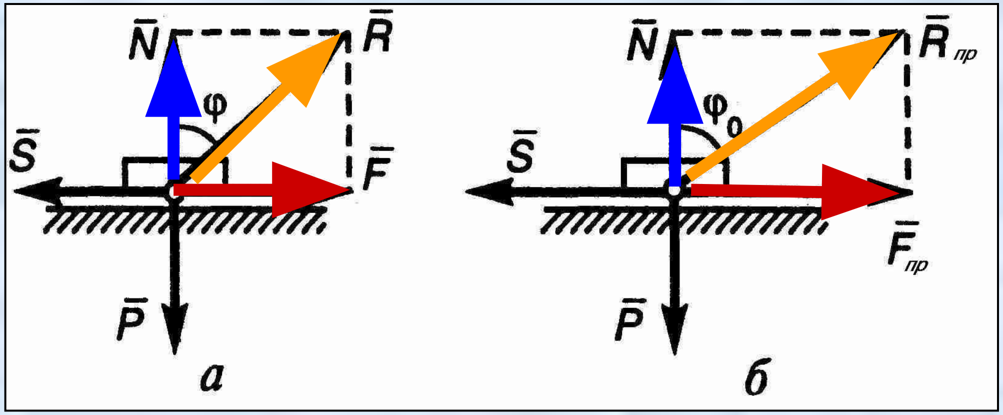
Два способа решения задач
на равновесие составной конструкции:

1 способ. Рассматривают равновесие всей конструкции как единое целое (не учитывая реакции внутренних связей) и дополнительно равновесие какой-нибудь одной или нескольких частей конструкции с учетом реакций внутренних связей.

2 способ. Конструкцию расчленяют на части и рассматривают равновесие каждой части, учитывая при этом реакции внутренних связей. При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Сцепление и трение скольжения



Условие равновесия:

$$S \le f_0 N$$

$$\bar F_{\text{ТР}} = -\bar S$$

ϕ_0 - *угол трения покоя*

$$0 \le F_{\text{ТР}} \le F_{\text{ПР}}.$$

$$\mathrm{tg}\phi_0 = F_{\text{ПР}} / N.$$

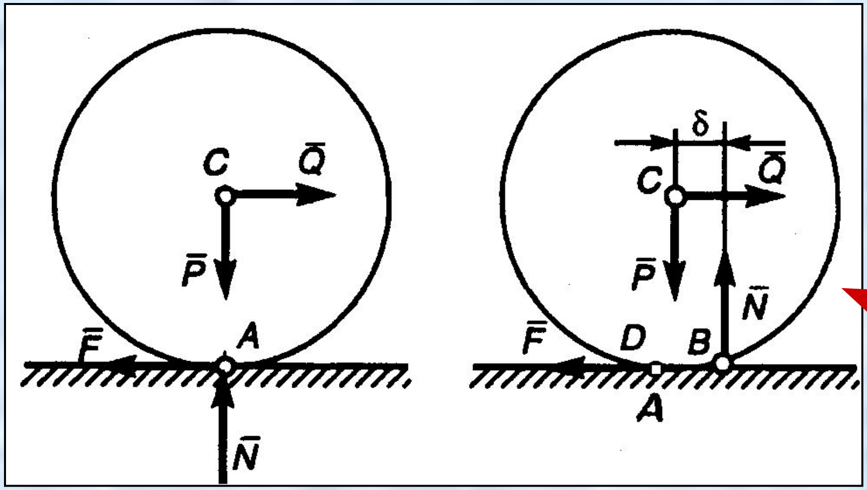
$$F_{\text{ПР}} = f_0 N$$

$$\mathrm{tg}\phi_0 = f_0.$$

5.4

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Трение качения



$$\Sigma m_A(\overline{F}_k) = 0$$

$$N\delta - Q_{\text{ПР}}R = 0$$

$$Q_{\text{ПР}} = (\delta / R)\, N.$$

Условие равновесия:

$$Q \le \frac{\delta}{R} N$$

$$Q \le f_0 N$$

$(\overline{Q}, \overline{F})$ – *пара сил*

$(\overline{N}\ \ \overline{P})$ – *пара сил*

6.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

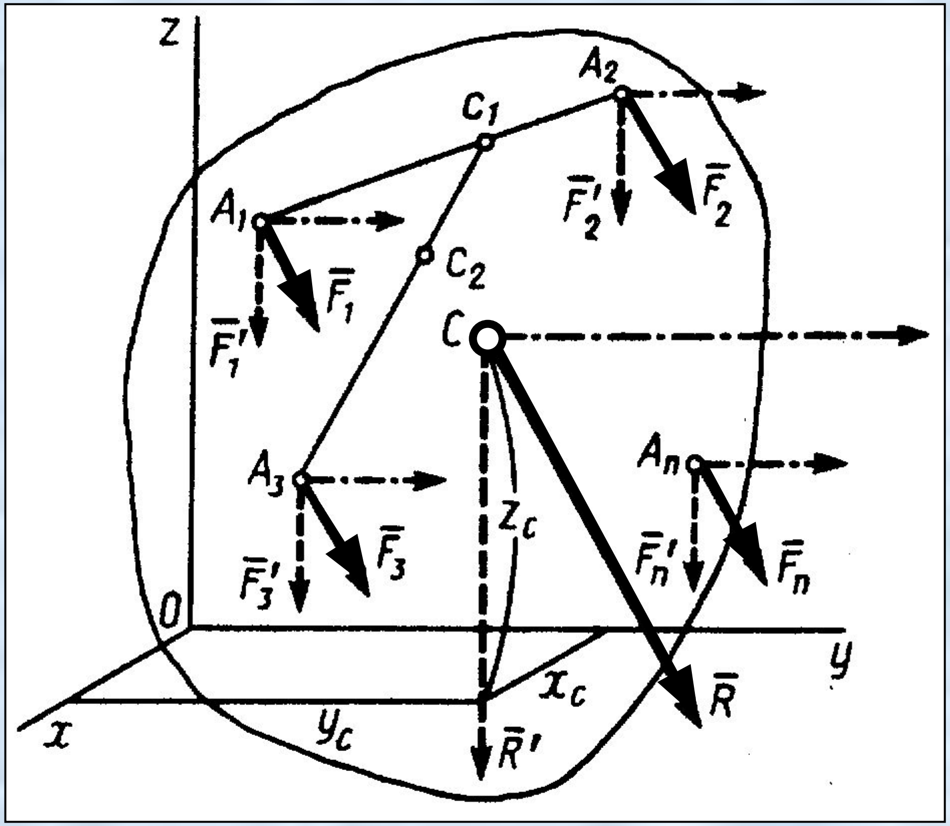
ЛЕКЦИЯ 5

План:

6.1. Центр параллельных сил

6.2. Центр тяжести твердого тела

ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ



$$m_y\left(\overline{R'}\right)=\sum m_y\left(\overline{F_k'}\right)=R\cdot x_C$$

$$R\,x_C=F_1x_1+F_2x_2+\ldots+F_nx_n$$

$$R\,x_C=\sum F_kx_k.$$

Координаты центра параллельных сил:

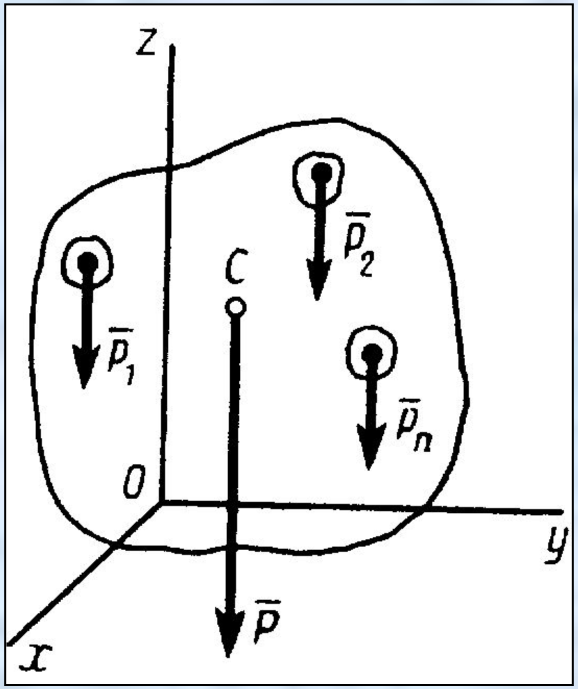
$$\boxed{x_c=\frac{\sum F_kx_k}{R}\qquad y_c=\frac{\sum F_ky_k}{R}\qquad z_c=\frac{\sum F_kz_k}{R}}$$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Силовое поле – это область, в которой на каждую материальную точку действует сила, зависящая от положения этой точки,

*Поле тяжести вблизи земной поверхности можно назвать **однородным полем тяжести**.*

*Модуль равнодействующей сил тяжести называется **весом тела P***



Координаты центра тяжести:

$$x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P} \qquad y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P} \qquad z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P}$$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Центр тяжести некоторых однородных тел

1 Для однородного объемного твердого тела (вес пропорционален объему):

$$x_C = \frac{\sum V_k x_k}{V} \qquad y_C = \frac{\sum V_k y_k}{V} \qquad z_C = \frac{\sum V_k z_k}{V}$$

2. Для тела, представляющего собой однородную пластину (вес пропорционален площади):

$$x_C = \frac{\sum S_k x_k}{S} \qquad y_C = \frac{\sum S_k y_k}{S} \qquad z_C = \frac{\sum S_k z_k}{S}$$

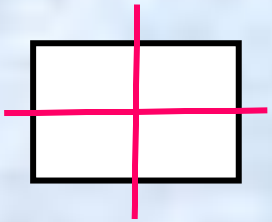
3. Координаты центра тяжести тонкого прямого стержня (вес пропорционален длине):

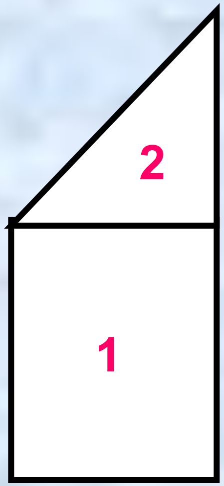
$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L} \qquad y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L} \qquad z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L}$$

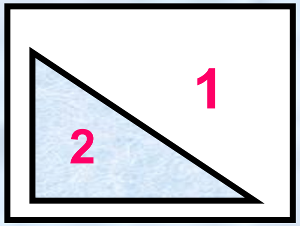
ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Способы нахождения положения центров тяжести тел сложной формы:

- Способ симметрии
- Способ разбиения
- Способ дополнения
- Способ интегрирования







$$x_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} x dV, \quad y_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} y dV, \quad z_C = \frac{1}{V}\int_{(V)} z dV.$$

МЕХАНИКА

Теоретическая механика

Модуль 1

Раздел 2 – КИНЕМАТИКА

- КИНЕМАТИКА ТОЧКИ
  - ЛЕКЦИЯ 7
  - ЛЕКЦИЯ 8
- КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
  - ЛЕКЦИЯ 9
- СЛОЖНОЕ ДВИЖЕИЕ ТОЧКИ
  - ЛЕКЦИЯ 10
  - ЛЕКЦИЯ 11
- ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА
  - ЛЕКЦИЯ 12
  - ЛЕКЦИЯ 13

7.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Кинематика точки

ЛЕКЦИЯ 7
План:

7.1. Векторный способ задания движения точки.
7.2. Координатный способ задания движения

7.2

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности и действующих на них сил.

Траекторией точки называется непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета.

Для задания движения точки можно применять способы:

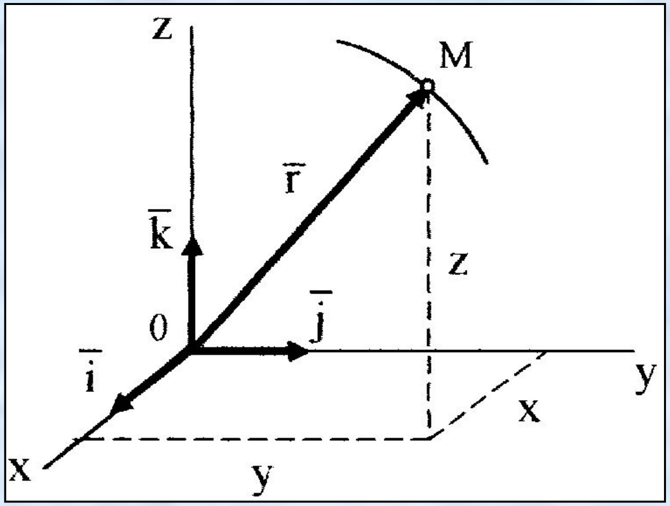
- векторный;

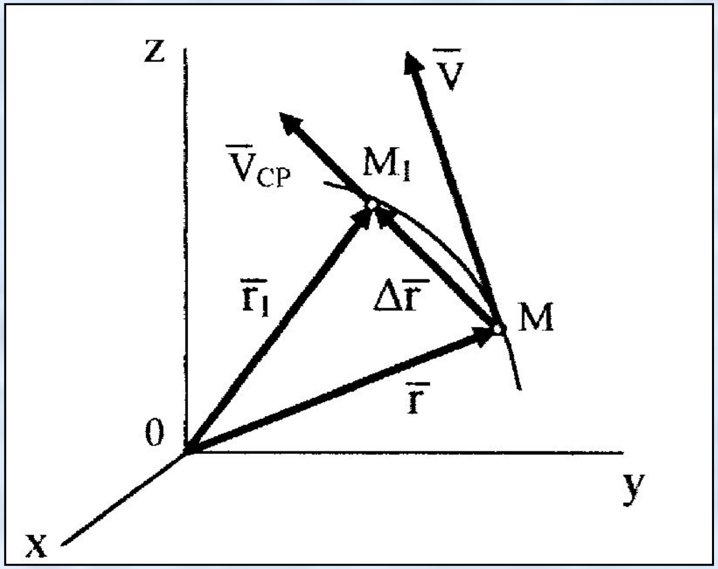
- координатный;

- естественный.

Векторный способ задания движения точки

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t)}$$ закон движения точки





Скорость точки в момент времени t

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Ускорение точки в момент времени t $\bar{a} = \dfrac{d\bar{V}}{dt} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$

Координатный способ задания движения точки

$$x = f_1(t);\quad y = f_2(t);\quad z = f_3(t).$$

закон движения точки

скорость точки

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \qquad \cos\alpha = v_x / v$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} \qquad \cos\beta = v_y / v$$

$$\cos\gamma = v_z / v.$$

ускорение точки

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \cos\alpha_1 = a_x / a,$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \qquad \cos\beta_1 = a_y / a,$$

$$\cos\gamma_1 = a_z / a.$$

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Кинематика точки

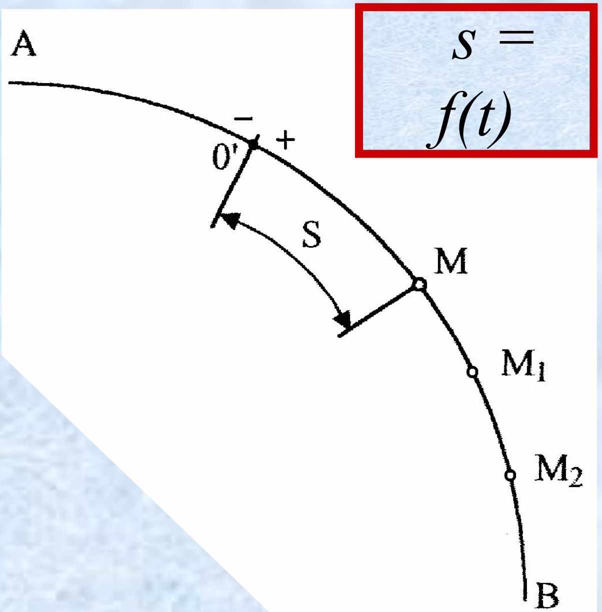
ЛЕКЦИЯ 8
План:

8.1. Естественный способ задания движения точки.
8.2. Частные случаи движения точки

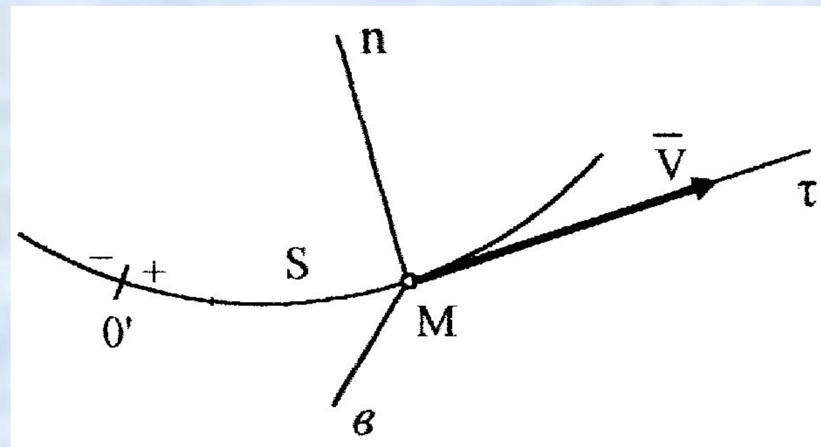
Естественный способ задания движения точки

Закон движения точки

$$s = f(t)$$



Оси естественного трехгранника



ось **Mτ** *- касательная*

ось Mn *- главная нормаль*

ось Mb *- бинормаль*

Естественный способ задания движения точки

Скорость точки

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \textit{или} \quad \boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

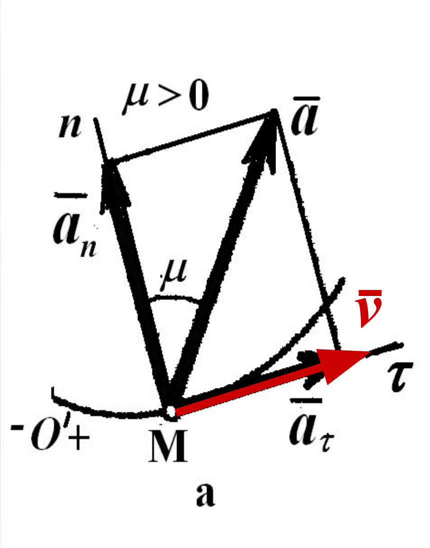
Кривизна траектории

в точке М

$k = 1/\rho,$

для прямой линии $\rho = \infty;$

для окружности $\rho = R.$



Ускорение точки

$$\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}}$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}}$$

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}$$

$$tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n}$$

Естественный способ задания движения точки

Частные случаи движения точки

Прямолинейное движение

$\rho = \infty$

Тогда

$a_n = v^2/\rho = 0$

Полное ускорение :

$a = a_\tau = dv/dt.$

При равномерном движении

$v = \text{const}$, $a_\tau = 0$,

$a = 0$

Криволинейное движение

- равномерное движение

$v = \text{const}$

$a_\tau = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$

$a = a_\mathrm{n} = v^2/\rho.$

- равнопеременное движение

$a_\tau = \text{const}$ $a_\mathrm{n} = v^2/\rho.$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Кинематика твердого тела. Простейшие движения

ЛЕКЦИЯ 9

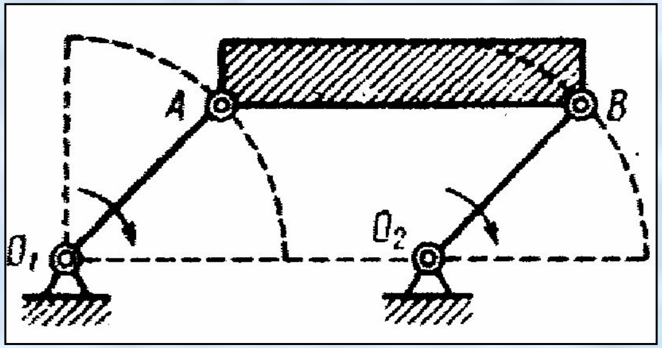
План:

9.1. Поступательное движение тела.

9.2. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

Поступательное движение тела

Поступательным *называется движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.*



Свойства поступательного движения:

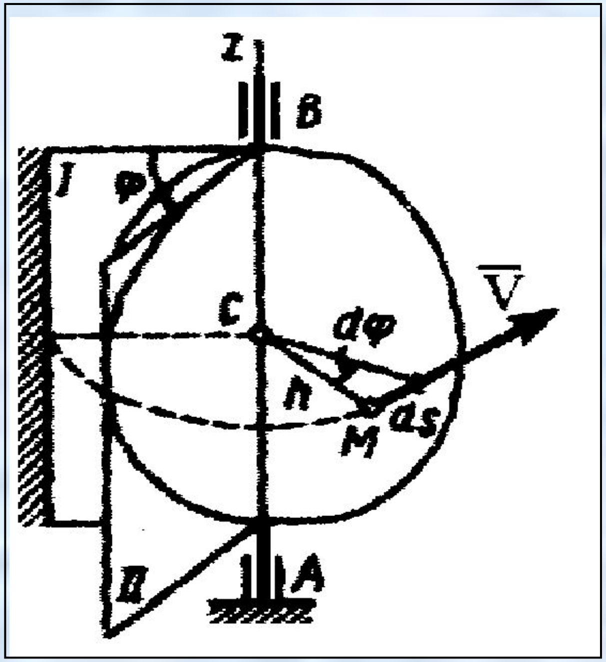
1. *Все точки тела описывают одинаковые траектории*

2. *Все точки тела имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения*

ВРАЩЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Вращательным движением *твердого тела вокруг неподвижной оси называется движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными*

Проходящая через неподвижные точки прямая - **ось вращения.**



$$\boxed{\phi = f(t)}$$

φ - *угол поворота тела*

закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

ВРАЩЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Угловая скорость тела

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Единица измерения ω

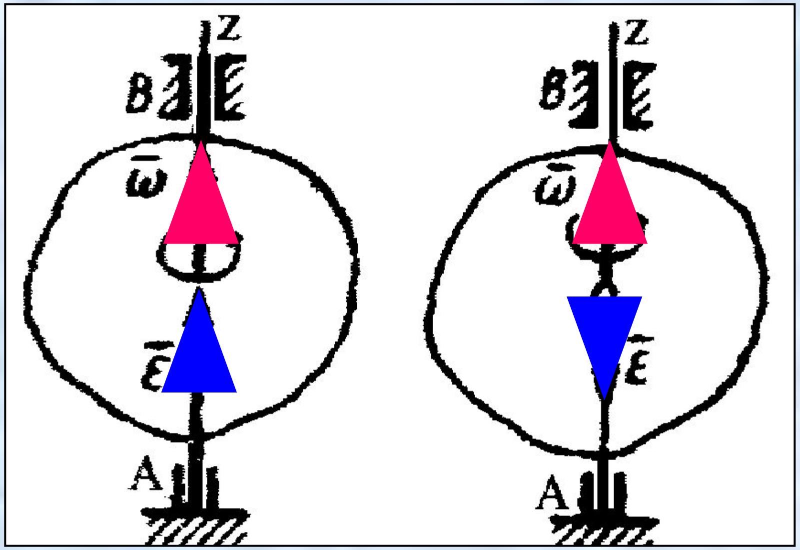
рад/с, 1/с, $с^{-1}$.

Угловое ускорение тела

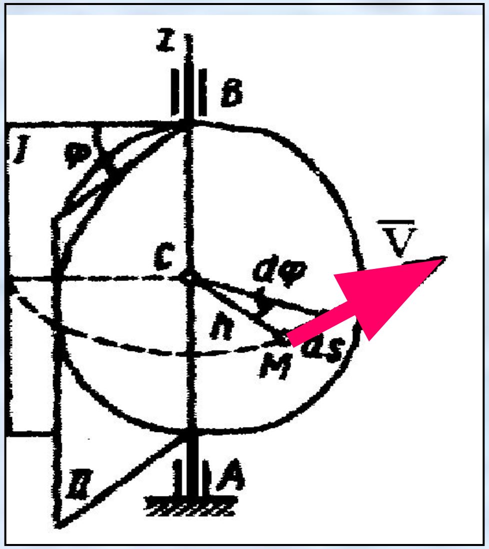
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Единица измерения ε

рад/с^2, *1/с*^{2} , $с^{-2}$.



ВРАЩЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

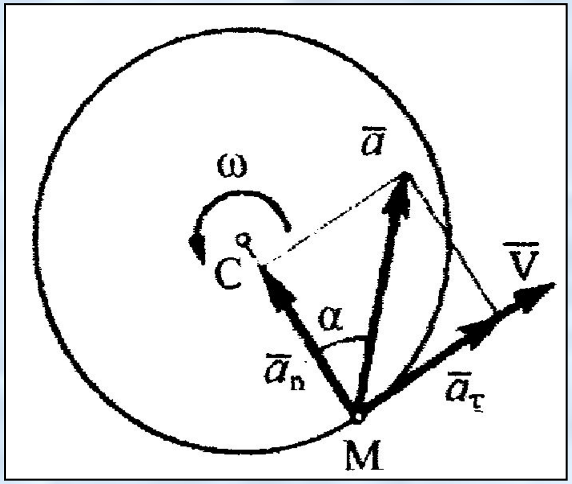


Скорости точек вращающегося тела

$$v = \frac{ds}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt}$$

$\boxed{v = h\,\omega}$ -линейная или окружная скорость точки М.

Ускорение точки *М*



$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$$a_\tau = h\,\varepsilon,\;\; a_n = h\,\omega^2.$$

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

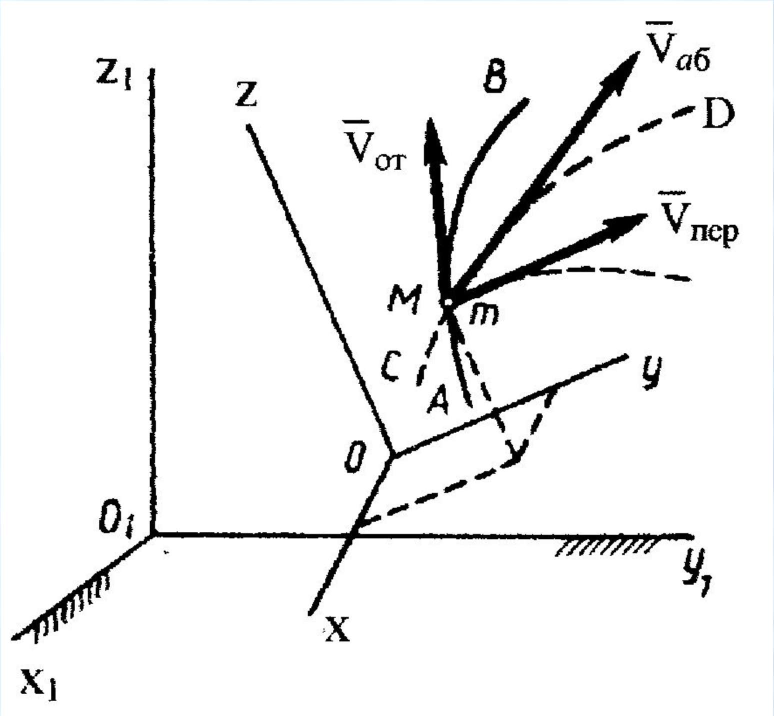
ЛЕКЦИЯ 10

План:

10.1. Основные определения.

10.2. Теорема о сложении скоростей (теорема Кориолиса).

Основные определения



Сложное движение точки – *это такое движение, при котором точка одновременно участвует в нескольких движениях.*

Две системы отсчёта:

- подвижная система отсчета - $Oxyz$

- неподвижная система отсчета $O_1x_1y_1z_1$

Основные определения

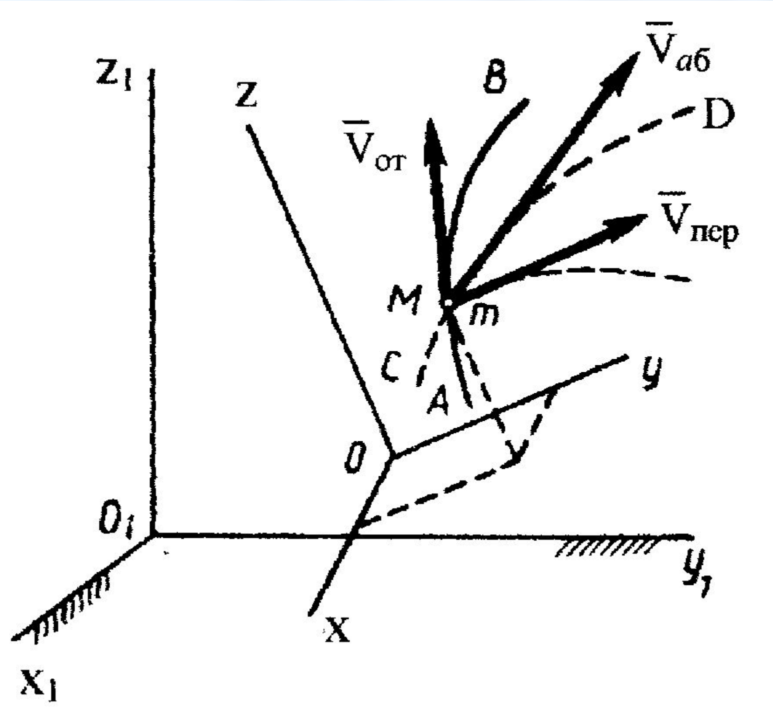
Относительное движение - *движение точки по отношению к подвижной системе отсчета*

$\bar{v}_{\text{от}}$ $\bar{a}_{\text{от}}$

Переносное движение - *движение, совершаемое подвижной системой отсчета по отношению к неподвижной системе*

$\bar{v}_{\text{пер}}$ $\bar{a}_{\text{пер}}$

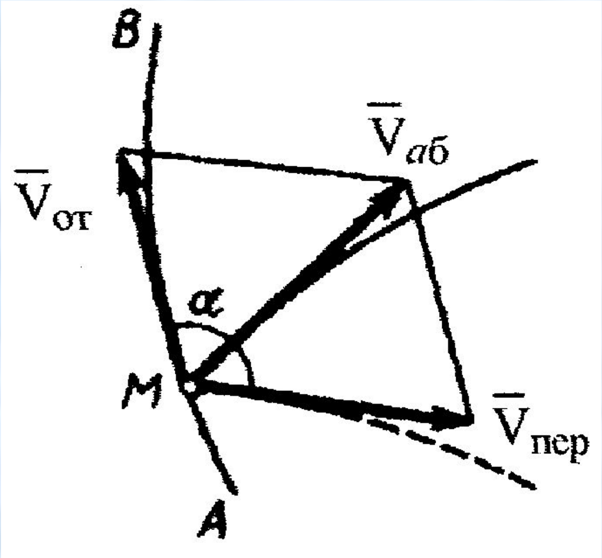
Абсолютное движение - *движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета*



Теорема о сложении скоростей

$$\boxed{\bar{v}_{\text{аб}} = \bar{v}_{\text{от}} + \bar{v}_{\text{пер}}}$$

$$v_{\text{аб}} = \sqrt{v_{\text{от}}^2 + v_{\text{пер}}^2 + 2v_{\text{от}}v_{\text{пер}}\cos\alpha}$$



при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 8

План:

11.1. Теорема о сложении ускорений.
11.2. Ускорение Кориолиса.

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

$$\bar{a}_{\text{аб}} = \frac{d\bar{v}_{\text{аб}}}{\mathrm{dt}} = \frac{d\bar{v}_{\text{от}}}{\mathrm{dt}} + \frac{d\bar{v}_{\text{пер}}}{\mathrm{dt}}$$

$$\bar{a}_{\text{аб}} = \frac{(d\bar{v}_{\text{от}})_{\text{от}}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{\text{от}})_{\text{пер}}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{\text{пер}})_{\text{от}}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{\text{пер}})_{\text{пер}}}{dt}$$

$$\boxed{\bar{a}_{\text{аб}} = \bar{a}_{\text{от}} + \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{кор}}}$$

$$a_{\text{кор}} = \frac{(d\bar{v}_{\text{пер}})_{\text{от}}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{\text{пер}})_{\text{пер}}}{dt}$$

- кориолисово ускорение (ускорение Кориолиса)

УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА

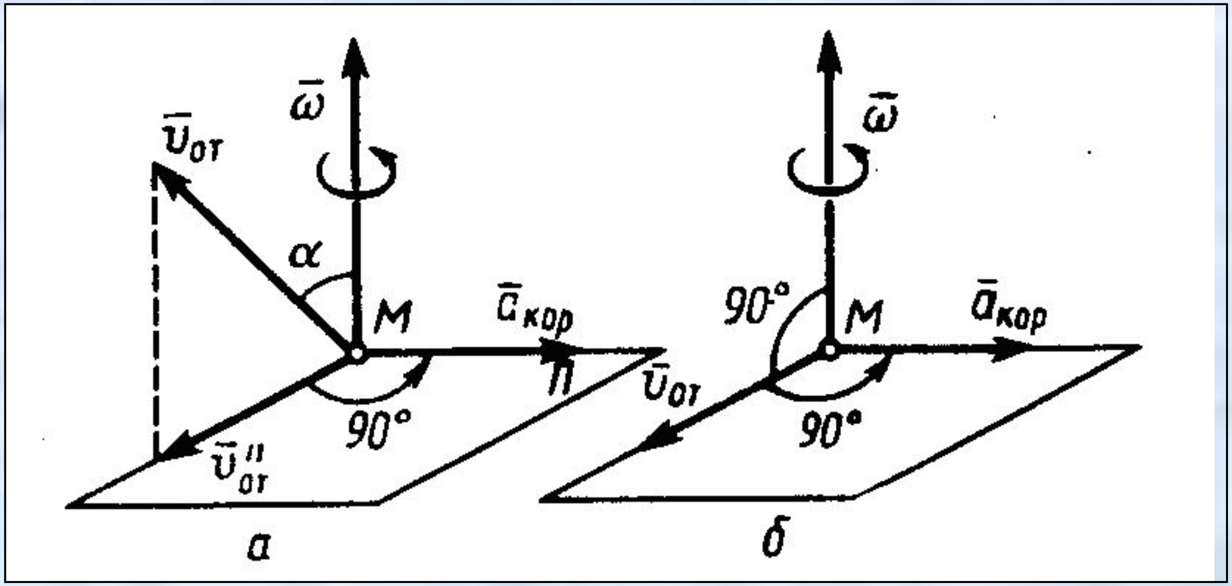
$$\bar{a}_{кор} = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{от})$$

$$a_{кор} = 2|\,\omega\,| \cdot |v_{от}|\sin\alpha$$

Направление вектора $\bar{a}_{кор}$ *можно найти двумя способами:*

- по правилу Жуковского;

- по правилу векторного произведения



11.4

УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА

$$\boxed{\bar{a}_{\text{кор}} = 0}$$

$$\boxed{\bar{a}_{\text{кор}} = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{от}})}$$

в следующих случаях:

- когда ω *= 0, т. е. переносное движение является поступательным;*

- когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;

- когда угол между векторами $\bar{\omega}$ *и* $\bar{v}_{\text{от}}$ *α = 0, или α = 180°, т.е. когда* $\bar{v}_{\text{от}}$ *параллелен оси переносного вращения*

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Плоскопараллельное движение твердого тела

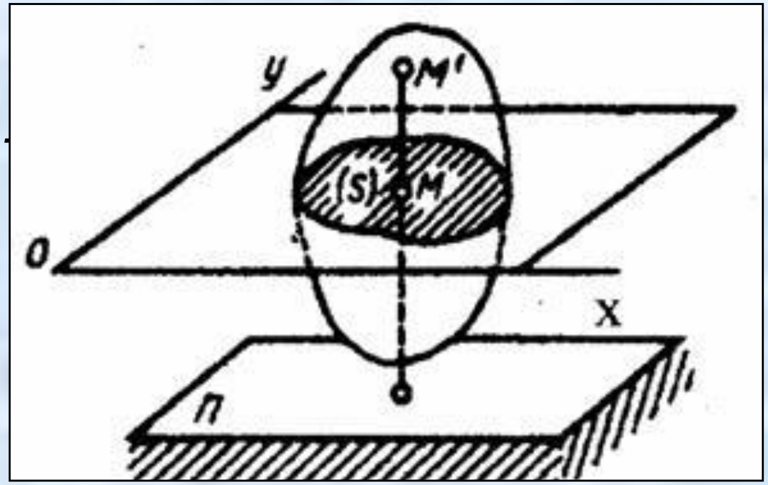
ЛЕКЦИЯ 12

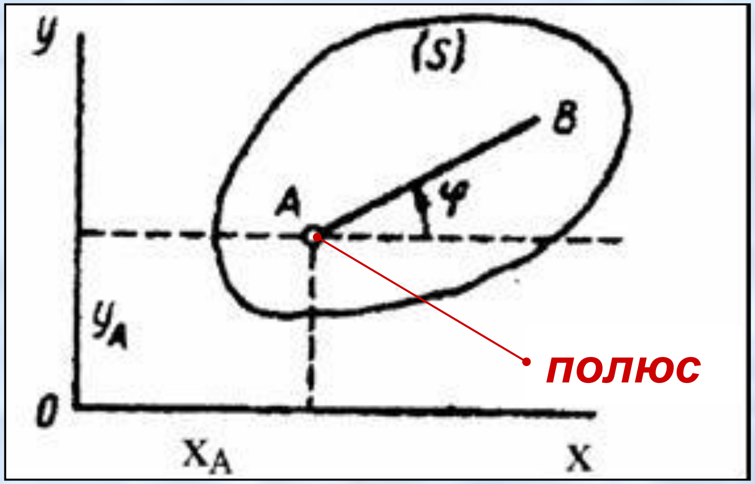
План:

12.1. Понятие плоскопараллельного движения тела
12.2. Определение скоростей точек плоской фигуры
12.3. Понятие МЦС и способы его нахождения

Понятие о плоскопараллельном движении тела

Плоскопараллельное (плоское) *движение – такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости П*

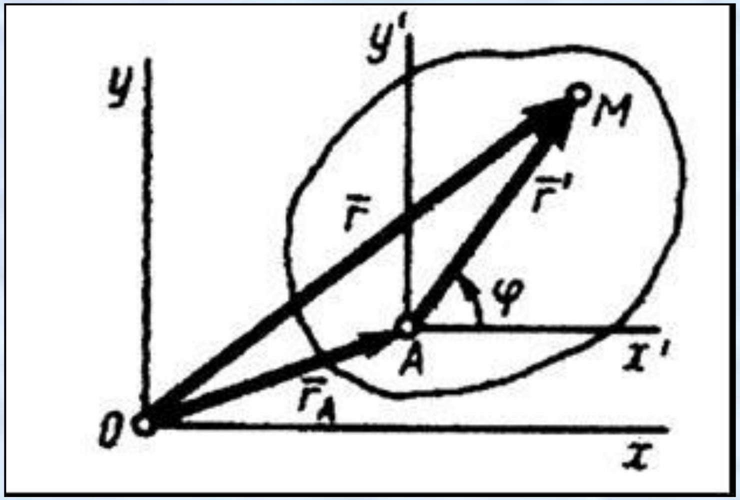




Закон движения плоской фигуры:

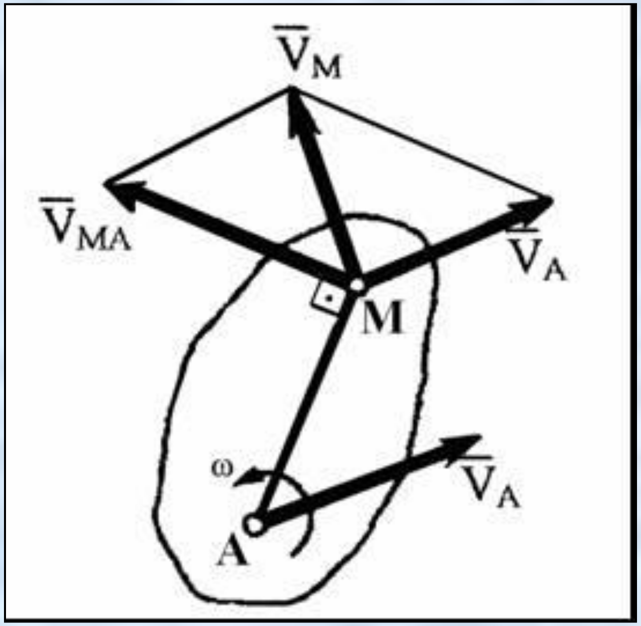
$$\boxed{x_A = f_1(t);\quad y_A = f_2(t);\quad \phi = f_3(t)}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

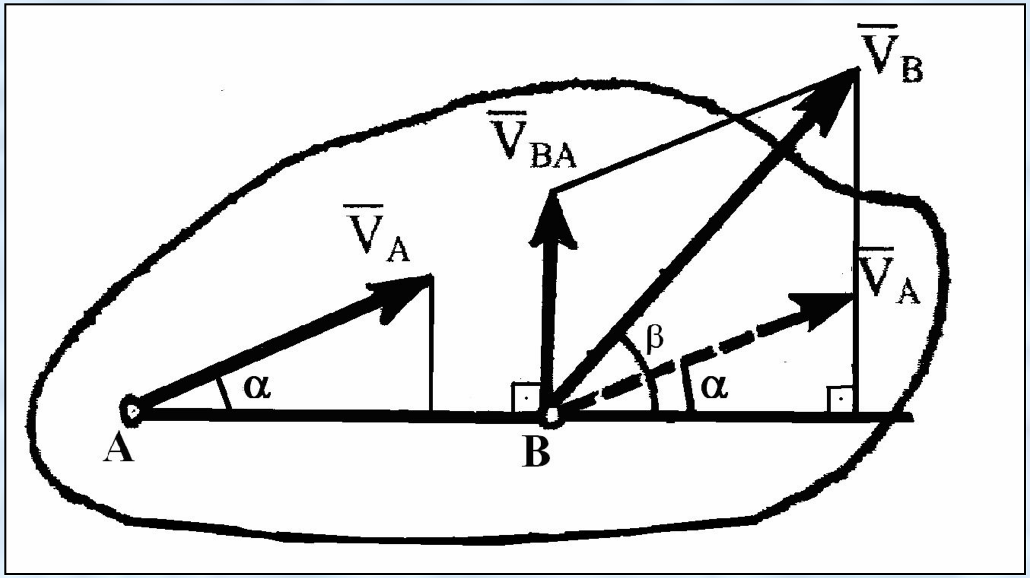


$$\boxed{\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}}$$

$$\bar{v}_M = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt},$$



ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИЯХ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ



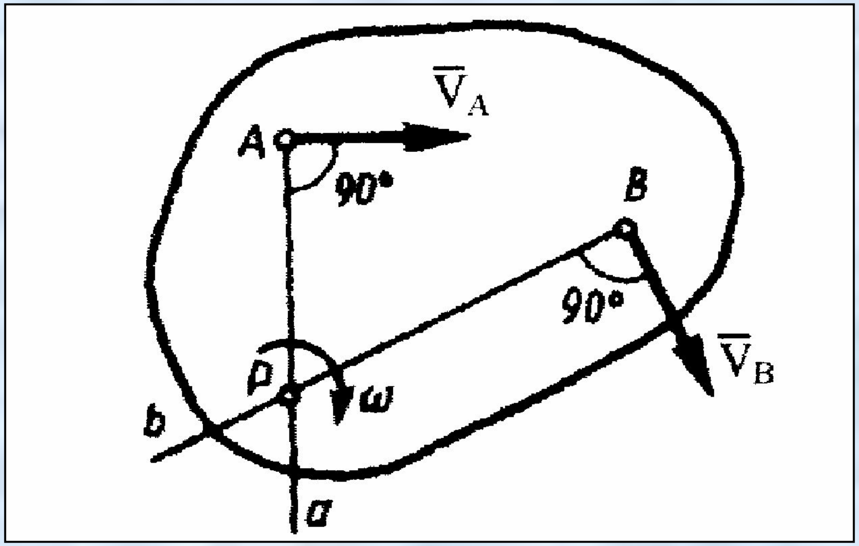
$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$$

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha.$$

Проекции скоростей точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки, равны, между собой.

Понятие МЦС и способы его нахождения

Мгновенным центром скоростей (*МЦС*) *называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю*



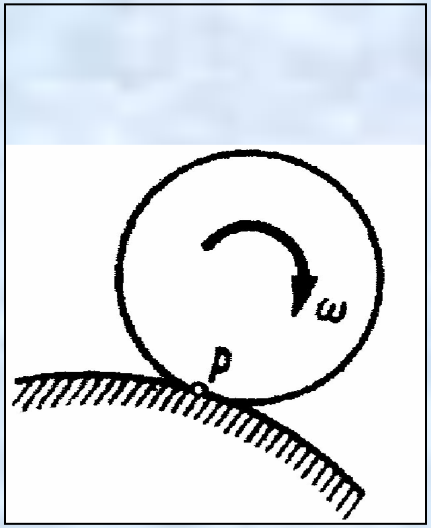
$$\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{PA} = \bar{v}_{PA}$$

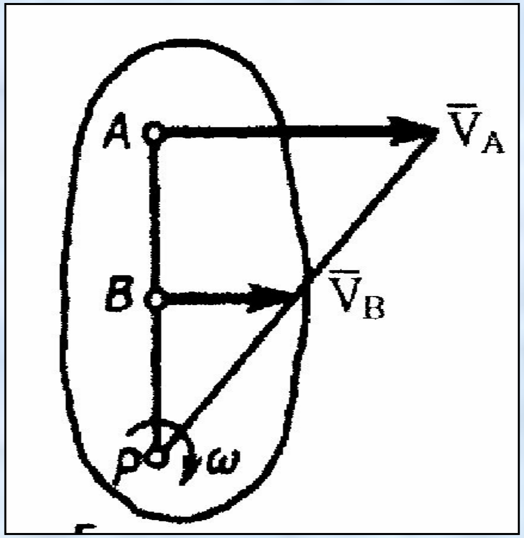
$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$$

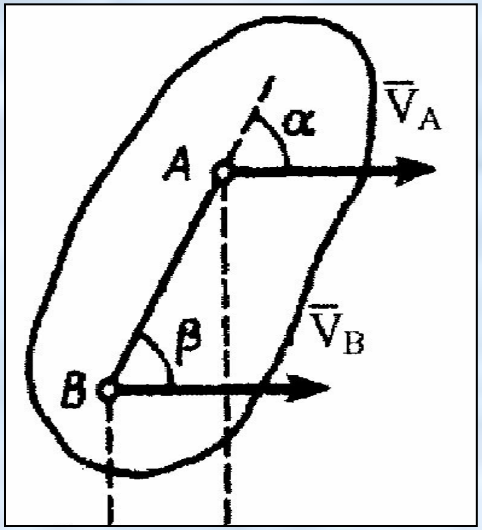
$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$$

Понятие МЦС и способы его нахождения

Частные случаи определения мгновенного центра скоростей







13.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

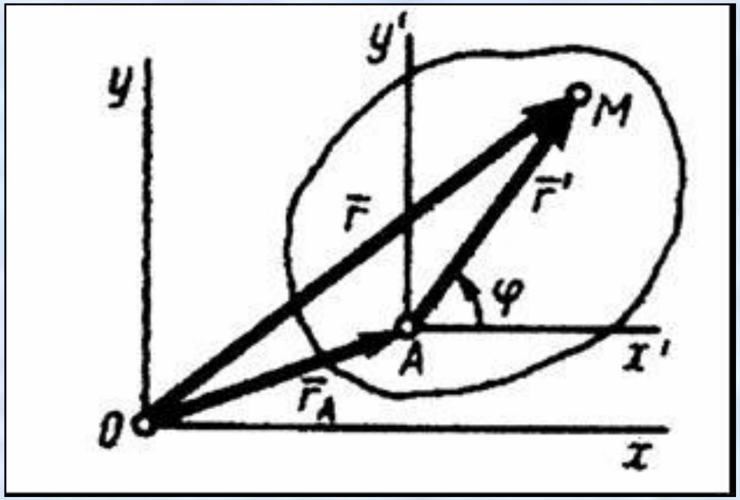
КИНЕМАТИКА

Плоскопараллельное движение твердого тела

ЛЕКЦИЯ 13
План:

13.1. Определение ускорений точек плоской фигуры
13.2. Мгновенный центр ускорений

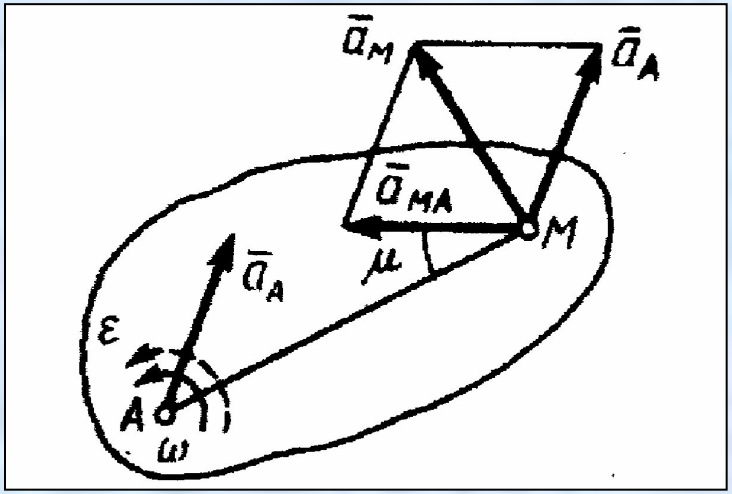
ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ



$$\bar{a}_M = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\bar{r}'}{dt^2}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^{n}$$



$$a_{MA}^{\tau} = MA \cdot \varepsilon$$

$$a_{MA}^{n} = \omega^2 MA$$

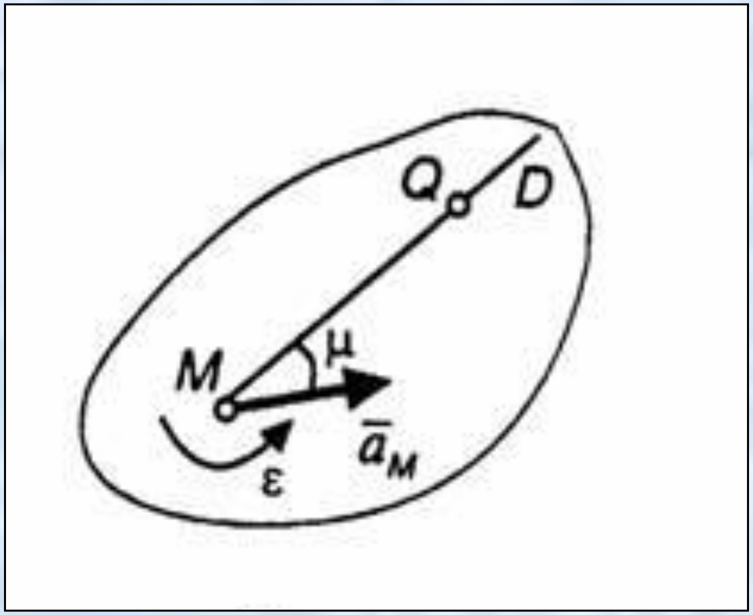
МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ

*Точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю называется **мгновенным центром ускорений** (**МЦУ**).*

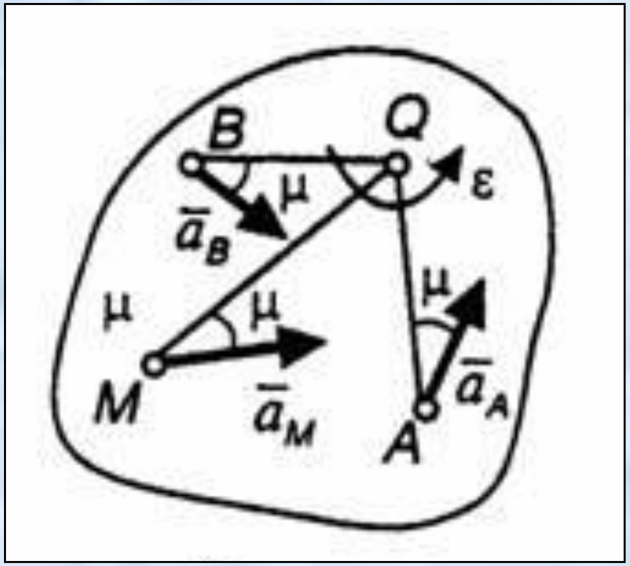
$$\overline{a}_M = \overline{a}_Q + \overline{a}_{MQ} = \overline{a}_{MQ}$$

$$a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\mathrm{tg}\mu = \varepsilon/\omega;$$



МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ



$$a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \varepsilon/\omega;$$

Частные случаи :

- если $\varepsilon = 0$, $\omega \neq 0$, то угол $\mu = 0$ и ускорения всех точек будут направлены к МЦУ;

- если $\varepsilon \neq 0$, $\omega = 0$, то угол $\mu = 90^o$ и ускорения всех точек направлены перпендикулярно к отрезкам, соединяющим эти точки с МЦУ

МЕХАНИКА

Теоретическая механика

Модуль 1

Раздел 3 – ДИНАМИКА ТОЧКИ

- ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ — ЛЕКЦИЯ 14
- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ — ЛЕКЦИЯ 15, ЛЕКЦИЯ 16

14.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА ТОЧКИ

Общие сведения

ЛЕКЦИЯ 14
План:

14.1. Основные законы механики
14.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Динамика - *это раздел механики, в котором изучается движение материальных точек, тел и механических систем под действием приложенных сил*

Основные законы механики

Первый закон (закон инерции)

Второй закон (основной закон динамики)

$$m\overline{a} = \overline{F}$$

Третий закон (закон равенства действия и противодействия)

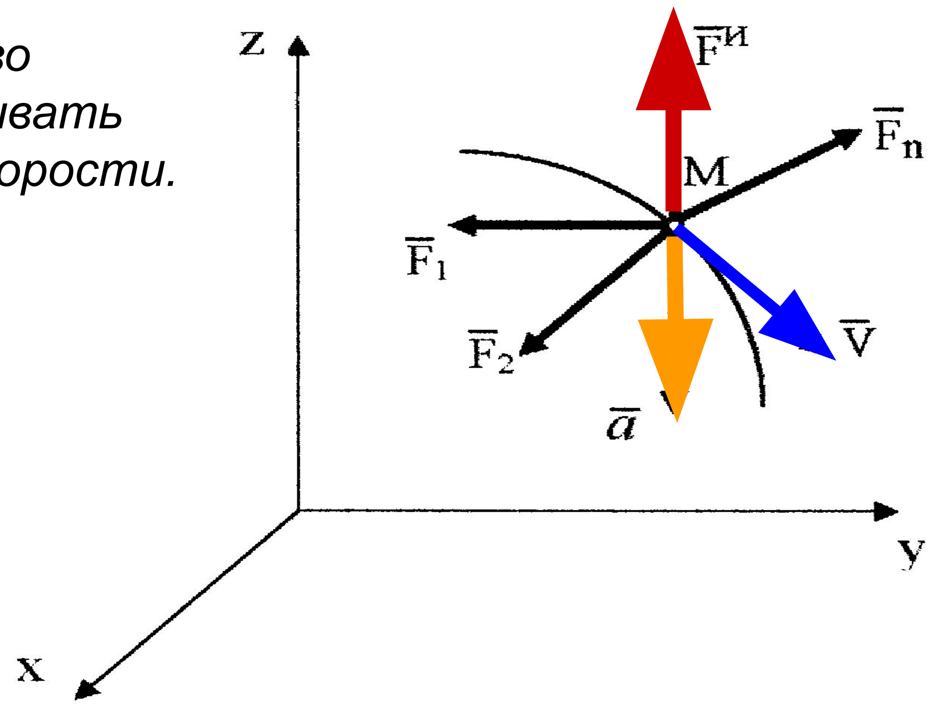
Четвертый закон (закон независимости действия сил)

$$\overline{a} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_n$$

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Инерция – *это свойство материальной точки оказывать сопротивление изменению скорости.*

$$-m\overline{a} = \overline{F}^{u}$$



Сила инерции материальной точки направлена противоположно ускорению точки и приложена к телу, сообщающему точке это ускорение

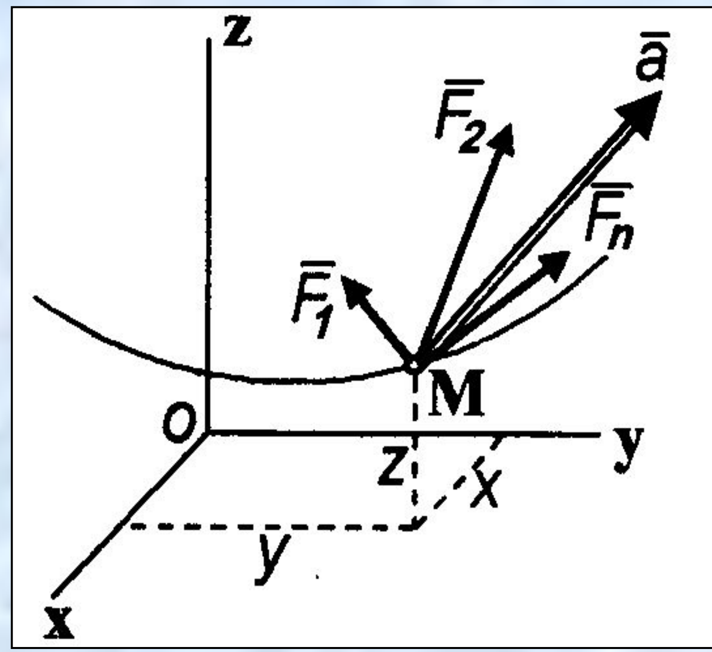
Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на декартовые оси:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}$$



Закон движения точки:

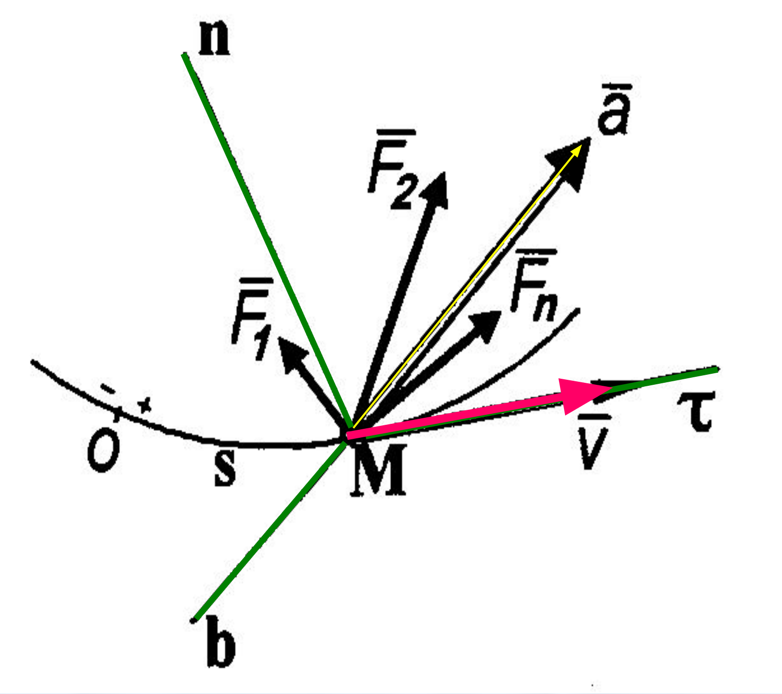
$$\begin{cases} x = f_1(t); \\ y = f_2(t); \\ z = \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Дифференциальные уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\boxed{\begin{gathered} m\frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau} \\ m\frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn} \end{gathered}}$$



15.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА ТОЧКИ

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

ЛЕКЦИЯ 15

План:

15.1. Две задачи динамики.

15.2. Решение задач

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \sum \bar{F}_k$$

ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

Первая задача динамики: по известному закону движения материальной точки находят приложенные к ней силы.

.

Вторая (основная) задача динамики: при известных действующих на материальную точку силах, определяют закон движения точки

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Решение задач динамики точки:

Первая задача динамики:

- *составить и решать дифференциальные уравнения движения материальной точки*

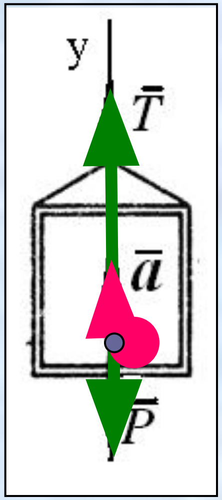
Вторая задача динамики:

- *выбрать систему координат и записать начальные условия;*
- *изобразить движущуюся точку в произвольном положении и все действующие на точку силы;*
- *составить дифференциальные уравнения движения точки;*
- *проинтегрировать полученные уравнения, определив постоянные интегрирования из начальных условий.*
- *найти искомые величины из полученных выражений.*

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Лифт весом P начинает подъем по закону:

$y = at^2.$



Определить:

натяжение троса T

Решение. *На лифт действуют сила тяжести $\overline{P}$ и реакция троса $\overline{T}$*

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}$$

$$m\ddot{y} = P_y + T_y$$

$$(P/g)\ 2a = T - P,$$

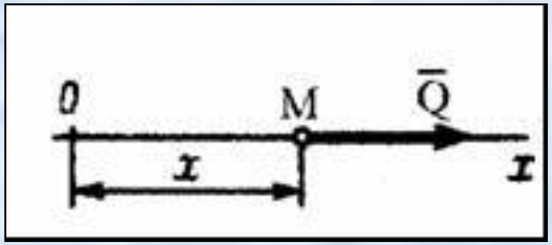
$$T = P\,(1 + 2a/g).$$

Если лифт опускается с таким же ускорением:

$$T = P\,(1 - 2a/g).$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Задача 2.
Материальная точка с массой m движется под действием постоянной силы $\overline{Q}$



Найти:
закон движения точки при начальных условиях:

$$t=0,\ x=x_0,\ v_x=v_0\ .$$

Решение:

Учитывая, что $Q_x = Q$: $\quad m\dfrac{dv_x}{dt} = Q$

$$v_x = (Q/m)\,t + C_1.$$

$$\frac{dx}{dt} = (Q/m)\,t + C_1.$$

$$x = (Q/2m)t^2 + C_1 t + C_2$$

$$v_0 = C_1,\ x_0 = C_2$$

$$x = x_0 + v_0\,t + (Q/2m)t^2.$$

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА ТОЧКИ

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

ЛЕКЦИЯ 16

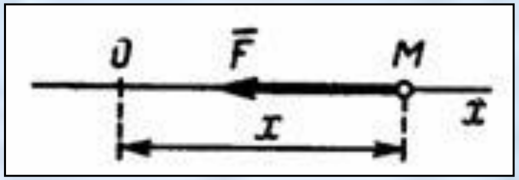
План:

16.1. Свободные прямолинейные колебания материальной точки
16.2. Влияние постоянной силы на свободные колебания точки

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки

Восстанавливающая сила F - сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия (всегда направлена к положению равновесия и зависит от величины отклонения точки от положения равновесия x).



$$F_x = -cx$$

Сила сопротивления R, зависящая от скорости движения

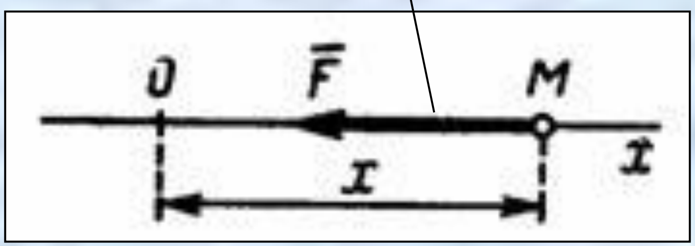
$$R_x = -\mu \dot{x}$$

Возмущающая сила, т.е. сила, являющаяся заданной функцией времени.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки

Восстанавливающая сила



$$F_x = -cx$$

$$m\ddot{x} = F_x\ ,$$ или

$$m\ddot{x} = -cx$$

если $c/m = k^2$, то

$$\boxed{\ddot{x} + k^2 x = 0}$$

дифференциальное уравнение свободных колебаний
при отсутствии сопротивления.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки

$$\boxed{\ddot{x} + k^2 x = 0}$$

Характеристическое уравнение:

$$x = e^{nt}$$

$$n^2 + k^2 = 0,\ n_{1,2} = \pm\, ik$$

общее решение

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt,$$

Пусть

$$C_1 = A\cos\alpha,$$
$$C_2 = A\sin\alpha,$$

$$x = A\,(\sin kt \cos\alpha + \cos kt \sin\alpha)$$

или

закон гармонических колебаний точки:

$$\boxed{x = A\sin(kt + \alpha).}$$

Скорость точки: $v_x = Ak\cos(kt + \alpha).$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки

$$\boxed{x = A\sin(kt + \alpha)}$$

A - амплитуда колебаний.

$(kt+\alpha) = \phi$ - фаза колебаний.

α - начальная фаза колебаний.

k - круговая частота колебаний

***Период колебаний** T - промежуток времени, в течение которого точка совершает одно полное колебание*

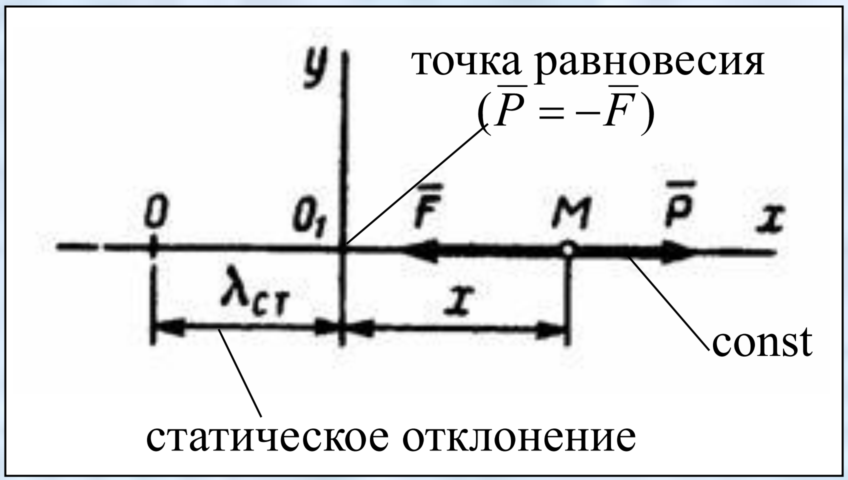
$$T = 2\pi/k.$$

***Частота колебаний** ν – число колебаний, совершаемых за 1с*

$$\nu = 1/T = k/2\pi.$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Влияние постоянной силы на свободные колебания точки



$$P = \text{const}$$

$$F = cx$$

В точке равновесия при $x = \lambda_{ст}$

$$F = P = c\lambda_{ст}$$

$$F_x = -c(x + \lambda_{ст})$$

В результате

$$m\ddot{x} = -cx$$

или

$$\boxed{\ddot{x} + k^2 x = 0}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{m\lambda_{cm} / P}}$$

МЕХАНИКА

Теоретическая механика
Модуль 1

Раздел 4 – ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

- ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС — ЛЕКЦИЯ 17, ЛЕКЦИЯ 18
- ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ — ЛЕКЦИЯ 19
- ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА — ЛЕКЦИЯ 20
- ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ — ЛЕКЦИЯ 21

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

ЛЕКЦИЯ 17

План:

17.1. Введение в динамику системы. Свойства внутренних сил.
17.2. Центр масс механической системы
17.3. Теорема о движении центра масс механической системы
17.4. Закон сохранения движения центра масс.
17.5. Примеры применения теоремы о движении центра масс.

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Введение в динамику системы

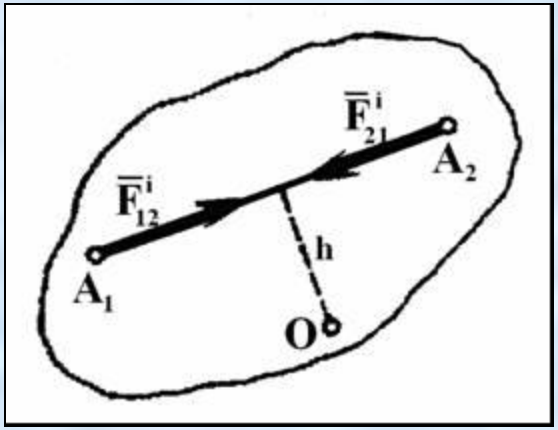
Механическая система - совокупность материальных точек или тел, находящихся в механическом взаимодействии

$\overline{F}_k^e$ *- Внешние силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы*

$\overline{F}_k^i$ *- Внутренние силы, с которыми точки или тела данной системы действуют друг на друга*

Свойства внутренних сил:

$$\sum \overline{F}_k^i = 0 \qquad \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^i) = 0$$



17.3

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Центр масс механической системы

Масса системы: $M = \sum m_k$

Центром масс *(центром инерции) механической системы называется геометрическая точка С, координаты которой :*

$$\boxed{x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M} \qquad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M} \qquad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}}$$

Радиус-вектор центра масс: $\boxed{\bar{r}_C = \dfrac{\sum m_k \bar{r}_k}{M}}$

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Для каждой точки системы

$$m_k \overline{a}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i$$

$$\sum m_k \overline{a}_k = \sum \overline{F}_k^e + \sum \overline{F}_k^i$$

$$\sum m_k \frac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \overline{r}_C}{dt^2}$$

$$\left[\begin{array}{c} \overline{r}_C = \dfrac{\sum m_k \overline{r}_k}{M} \\ \sum m_k \overline{r}_k = M \overline{r}_C \end{array}\right]$$

$$\sum m_k \overline{a}_k = M \overline{a}_C$$

$\overline{a}_C$ — *ускорение центра масс системы*

$$\boxed{M \overline{a}_C = \sum \overline{F}_k^e}$$

$$\boxed{\begin{aligned} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} &= \sum F_{kx}^e \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} &= \sum F_{ky}^e \\ M \frac{d^2 z_C}{dt^2} &= \sum F_{kz}^e \end{aligned}}$$

Дифференциальные уравнения движения центра масс в проекциях на оси координат

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

$$\boxed{M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e}$$

Закон сохранения движения центра масс

1. Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю

$$\sum \bar{F}_k^e = 0 \longrightarrow \bar{a}_C = 0 \longrightarrow \bar{v}_C = \text{const}$$

2. Пусть сумма внешних сил системы, не равна нулю, но сумма их проекций на какую-нибудь ось равна нулю

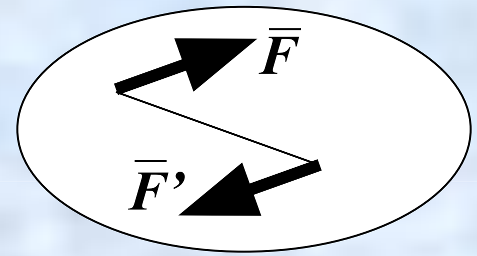
$$\sum \bar{F}_k^e \neq 0$$

$$\sum F_{kx}^e = 0 \longrightarrow M\ddot{x}_C = 0 \longrightarrow \ddot{x}_C = 0 \longrightarrow \dot{x}_C = v_{Cx} = \text{const}$$

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Примеры применения теоремы о движении центра масс

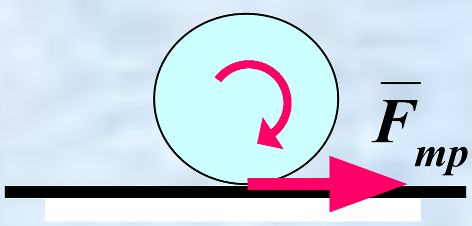
Действие пары сил на тело



$$\sum \overline{F}_k^e = \overline{F} + \overline{F}' = 0$$

$$\overline{a}_C = 0 \qquad \overline{v}_C = \text{const} = \overline{v}_{0C} = 0$$

Движение по горизонтальной плоскости



18.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

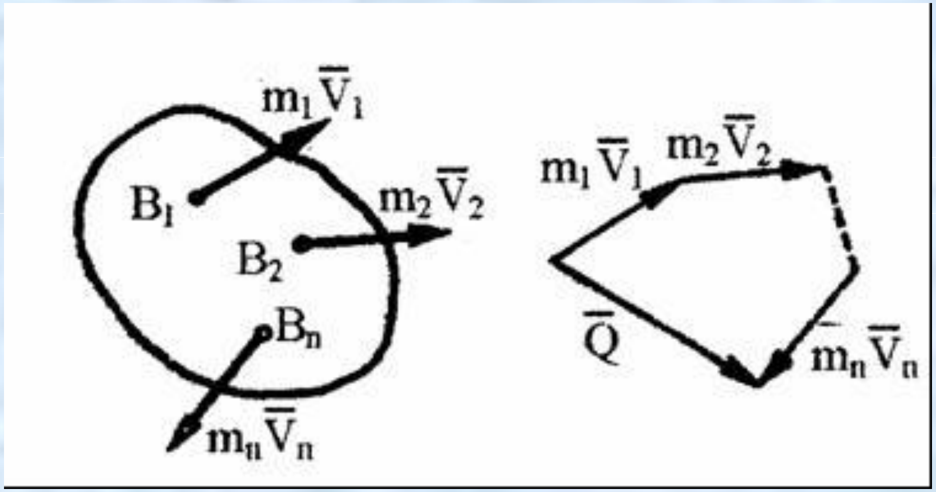
ЛЕКЦИЯ 18

План:

18.1. Количество движения.
18.2. Импульс силы.
18.3. Теорема об изменении количества движения
18.4. Закон сохранения количества движения.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Количество движения



$m\overline{v}$ *- Количество движения материальной точки*

Количество движения механической системы $\overline{Q} = \sum m_k \overline{v}_k.$

Количество движения твердого тела $\overline{Q} = M\overline{v}_C$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Импульс силы

Элементарный импульс силы: $d\overline{S} = \overline{F}dt$

Импульс силы за конечный промежуток времени t_1: $\overline{S} = \int_0^{t_1} \overline{F}dt.$

Проекции импульса на координатные оси

$$S_y = \int_0^{t_1} F_y dt. \qquad S_x = \int_0^{t_1} F_x dt. \qquad S_z = \int_0^{t_1} F_z dt.$$

Единицей измерения импульса силы в системе СИ является 1 кг·м/с = 1 Н/с.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Дифференциальное уравнение движения точки $\dfrac{d(m\bar{v})}{dt} = \sum \bar{F}_k.$

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \sum \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt.$$

$$\boxed{m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \sum \bar{S}_k}$$

Теорема об изменении количества движения материальной точки

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx},$$
$$mv_{1y} - mv_{0y} = \sum S_{ky},$$
$$mv_{1z} - mv_{0z} = \sum S_{kz}.$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Для всех точек механической системы

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i$$

$$\sum \bar{F}_k^i = 0$$

$$\sum m_k \bar{a}_k = \frac{d}{dt}\sum m_k \bar{v}_k = \frac{d\bar{Q}}{dt}.$$

Теорема об изменении количества движения системы:

$$\boxed{\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e.}$$

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \bar{F}_k^e dt$$

$$\boxed{\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e}$$

$$\boxed{\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e.}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{1x} - Q_{ox} &= \sum S_{kx}^e \\ Q_{1y} - Q_{oy} &= \sum S_{ky}^e \\ Q_{1z} - Q_{oz} &= \sum S_{kz}^e \end{aligned}}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Закон сохранения количества движения

1. $\boxed{\sum \overline{F}_k^e = 0.}$ $\quad \dfrac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_k^e = 0 \quad$ $\boxed{\overline{Q} = \mathrm{const}}$

2. $\boxed{\sum F_{kx}^e = 0.}$ $\quad \dfrac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e = 0 \quad$ $\boxed{Q_x = \mathrm{const}}$

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

ЛЕКЦИЯ 19

План:

19.1. Осевые моменты инерции тела.

19.2. Момент количества движения материальной точки.

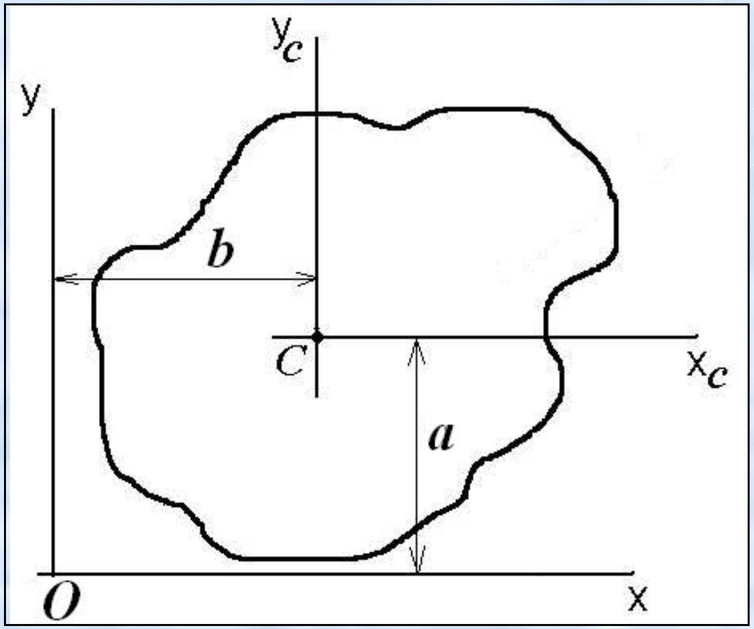
19.3. Теорема об изменении момента количества движения точки

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Осевые моменты инерции тела

$\boxed{I_z = \sum m_k h_k^2}$ $\boxed{I_z = M\rho_z^2}$

ρ - *радиус инерции тела*



Теорема Гюйгенса

$$I_{Ox} = I_{Cx} + M a^2;$$
$$I_{Oy} = I_{Cy} + M b^2.$$

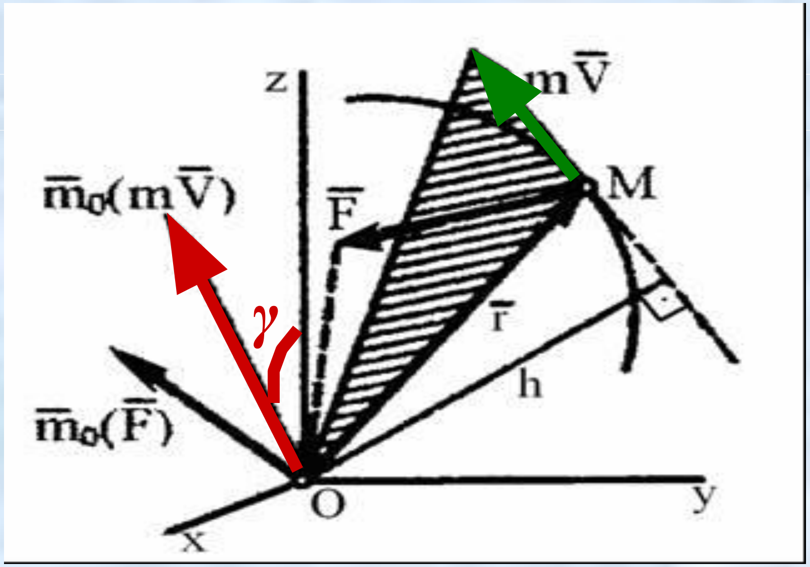
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Момент количества движения материальной точки

$$\overline{m}_0(m\overline{v}) = \overline{r} \times m\overline{v}$$

$$\left|\overline{m}_0(m\overline{v})\right| = mvh$$

$$m_z(m\overline{v}) = \left[\overline{m}_0(m\overline{v})\right]_z =$$
$$= \left|\overline{m}_0(m\overline{v})\right| \cos\gamma$$



ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Теорема об изменении момента количества движения точки

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}\times m\bar{v})=\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times m\bar{v}\right)+\left(\bar{r}\times m\frac{d\bar{v}}{dt}\right)=(\bar{v}\times m\bar{v})+(\bar{r}\times m\bar{a}).$$

$$\bar{v}\times m\bar{v}=0$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}\times m\bar{v})=\bar{r}\times\bar{F}$$

или

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\overline{m}_0(m\bar{v})\right]=\overline{m}_0(\bar{F})}$$

20.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

ЛЕКЦИЯ 20

План:

20.1. Теорема об изменении кинетического момента.

20.2. Дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

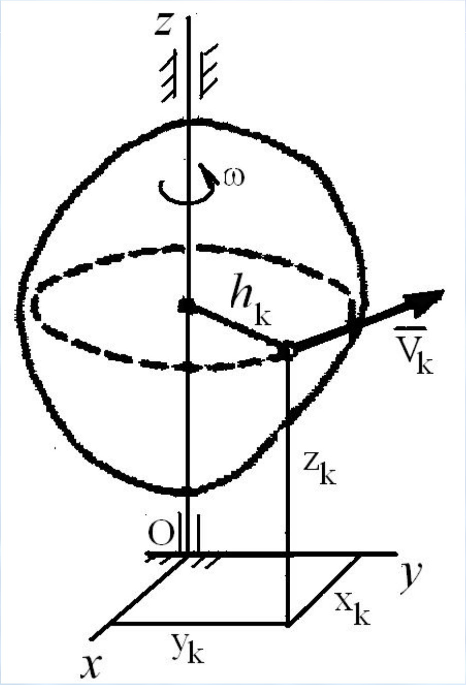
Кинетический момент системы

$$\boxed{\overline{K}_0 = \sum \overline{m}_0(m_k \overline{v}_k)}$$

$$K_x = \sum m_x(m_k \overline{v}_k)$$

$$K_y = \sum m_y(m_k \overline{v}_k)$$

$$K_z = \sum m_z(m_k \overline{v}_k)$$



Кинетический момент вращающегося тела

$$m_z(m_k \overline{v}_k) = m_k v_k h_k \qquad K_z = \sum m_z(m_k \overline{v}_k)$$

$$K_z = \sum m_k v_k h_k = \sum m_k \omega h_k^2$$

$$\boxed{K_z = I_z \omega}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Если рассмотреть одну точку системы:

$$\frac{d}{dt}[\overline{m}_0(m_k\overline{v}_k)] = \overline{m}_0(\overline{F}_k^e) + \overline{m}_0(\overline{F}_k^i),$$

для всех точек системы:

$$\frac{d}{dt}[\underline{\sum\overline{m}_0(m_k\overline{v}_k)}] = \sum\overline{m}_0(\overline{F}_k^e) + \overbrace{\sum m_0(\overline{F}_k^i)}^{=0}.$$

$$\boxed{\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \sum\overline{m}_0(\overline{F}_k^e)}$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum m_x(\overline{F}_k^e)$$
$$\frac{dK_y}{dt} = \sum m_y(\overline{F}_k^e)$$
$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\overline{F}_k^e)$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^e) \\ \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\overline{F}_k^e)\end{gathered}}$$

следствия из теоремы:

1. Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно центра О равна нулю

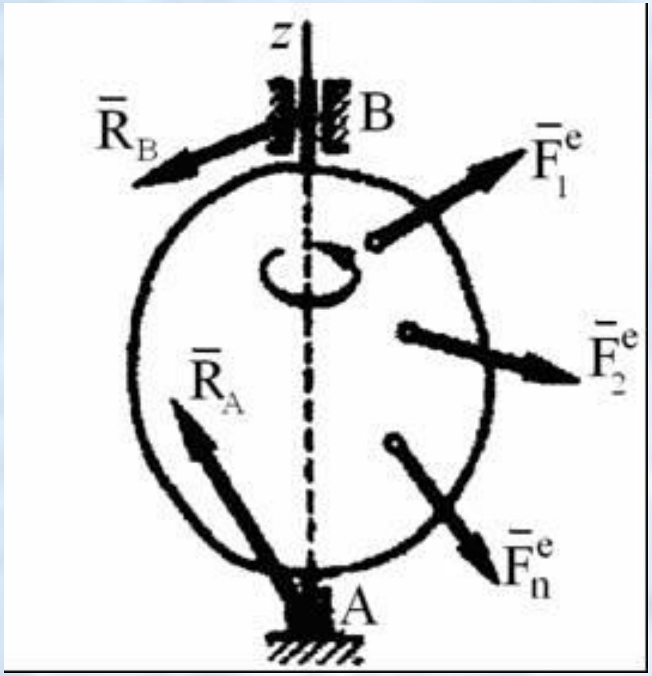
$$\sum \overline{m}_0(\overline{F}_k^e) = 0 \quad \textit{то} \quad \overline{K}_0 = \text{const}$$

2. Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно некоторой неподвижной оси равна нулю

$$\sum m_z(\overline{F}_k^e) = 0 \quad \textit{то} \quad K_z = \text{const}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси



$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\bar{F}_k^e) + \sum m_z(\bar{R}_k) = M_z$$

$$K_z = I_z\omega$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \frac{d(I_z\omega)}{dt} = I_z\frac{d\omega}{dt}{}_z$$

$$\boxed{I_z\frac{d\omega}{dt} = I_z\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z}$$

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

ЛЕКЦИЯ 21

План:

21.1. Работа силы и мощность

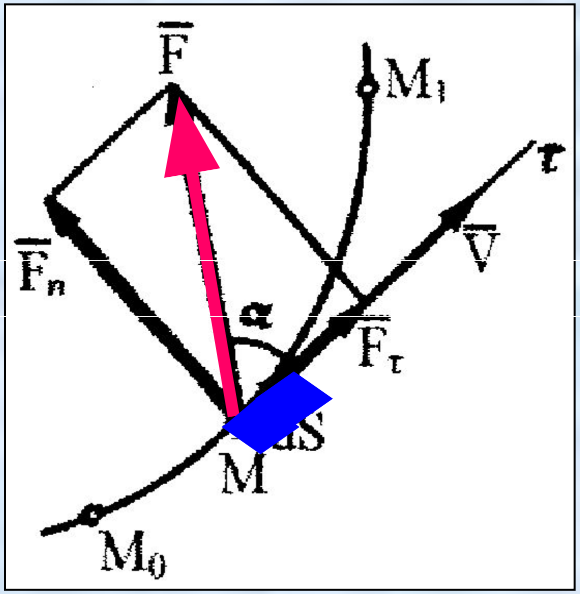
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность

Элементарная работа силы

$$\mathrm{d}A = F_\tau \mathrm{d}s,$$ *где* $$F_\tau = F\cos\alpha,$$

$$\boxed{\mathrm{d}A = F\mathrm{d}s\cos\alpha.}$$



Работа силы на конечном перемещении

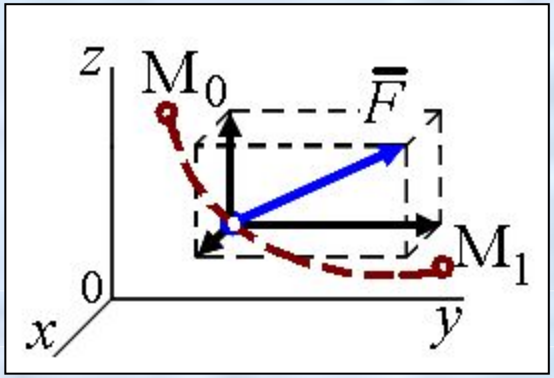
1. $(\overline{F} \neq \text{const})$ $$\boxed{A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau ds}$$

2. $(\overline{F} = \text{const})$ $$\boxed{A_{(M_0M_1)} = F_\tau s_1 = Fs_1\cos\alpha}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность

Если вектор силы спроецировать на оси координат



$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Единицей измерения работы в системе СИ является - 1 джоуль (1 Дж = 1Н·м = 1 кг·м2 /с2).

Мощность *- это величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени.*

$$N = dA/dt = F\tau\, ds/dt = F\tau v.$$

Единицей измерения мощности в системе СИ является ватт (1 Вт = 1Дж/с). В технике - 1 л.с. = 736 Вт.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

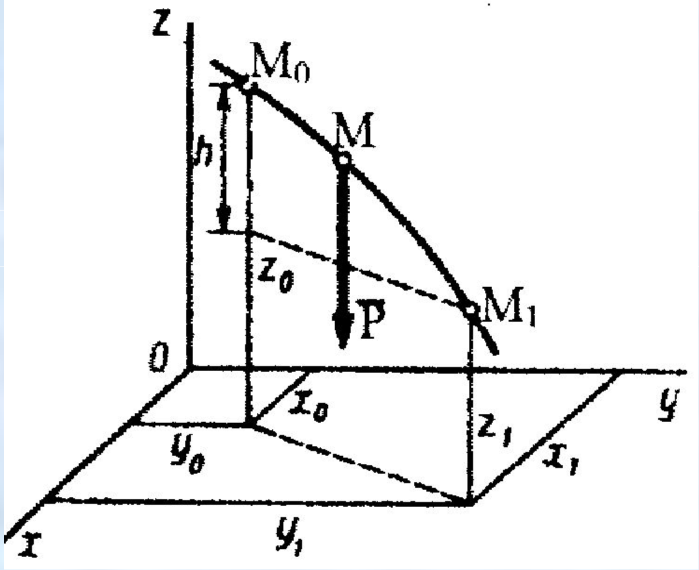
Примеры вычисления работы

Работа силы тяжести

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{z_0}^{z_1} (-P)dz = P(z_0 - z_1)$$

$$z_0 - z_1 = h$$

$$A_{(M_0M_1)} = \pm P \cdot h$$

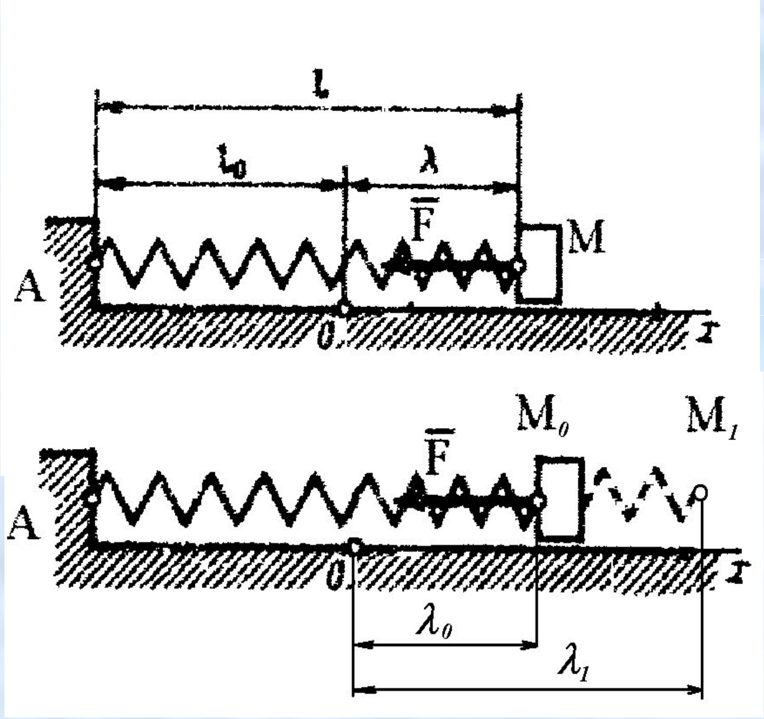


Работа силы тяжести не зависит от формы траектории точки её приложения. Силы, обладающие таким свойством, называются потенциальными силами.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность

Работа силы упругости



$$F = c\lambda = c|x| \text{ и } F_x = -cx.$$

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{x_0}^{x_1} (-cx)dx = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2).$$

$$\boxed{A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2),}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу

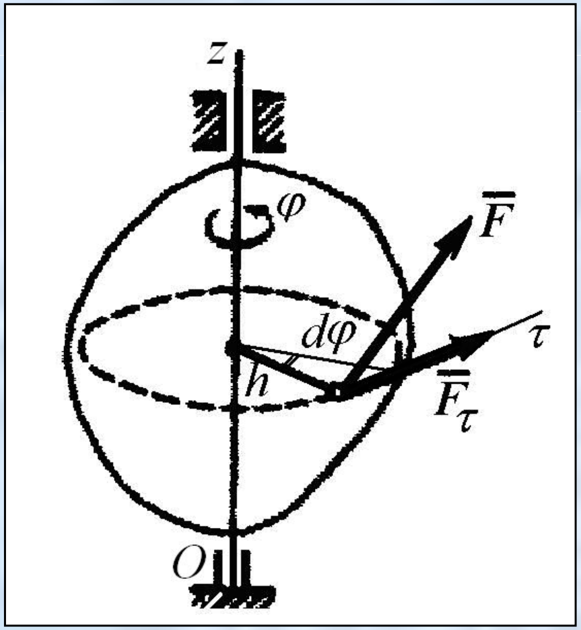
$$dA = F_\tau ds \quad \text{где} \quad ds = h\, d\varphi$$

$$dA = \underline{F_\tau h}\, d\varphi.$$

$$F_\tau h = m_z(\overline{F}) = M_z$$

$$dA = M_z\, d\varphi$$

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi \quad \text{или} \quad \boxed{A = \pm M_z \cdot \varphi.}$$



22.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

ЛЕКЦИЯ 22

План:

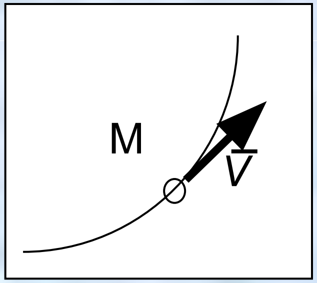
22.1. Кинетическая энергия.

22.2. Теорема об изменении кинетической энергии

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Кинетическая энергия

для материальной точки



$$m\frac{v^2}{2}$$

для механической системы

из n материальных точек

$$T = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{v_k^2}{2}$$

Кинетическая энергия - скалярная величина

Единица измерения кинетической энергии в системе СИ - 1 Дж.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Кинетическая энергия

для твердого тела

Поступательное движение

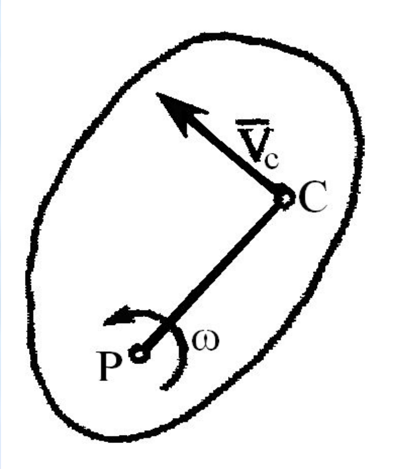
$$M\frac{v_C^2}{2}$$

Вращательное движение

$$T = I_z\frac{\omega^2}{2}$$

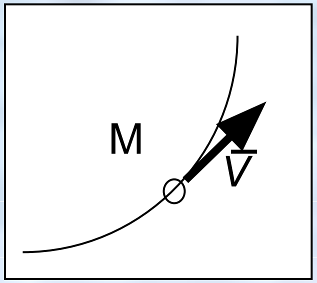
Плоскопараллельное движение

$$T_{\text{пл}} = I_P\frac{\omega^2}{2} \qquad T_{\text{пл}} = M\frac{v^2}{2} = I_c\frac{\omega^2}{2}$$



ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим материальную точку с массой m



$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}.$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

$$mv\frac{dv}{ds} = \sum F_{k\tau}$$

$$mvdv = \sum dA_k$$

$$\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum dA_k}$$

теорема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме

$$\boxed{\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}}$$

теорема об изменении кинетической энергии точки в конечном виде

22.5

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим материальную точку механической системы с массой m_k

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

Для всей механической системы

$$d\sum\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

$$\boxed{dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i}$$

теорема об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме

$$\boxed{T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i}$$

теорема об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме

МЕХАНИКА

Теоретическая механика

Модуль 1

Раздел 5 – АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

- ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА
  - ЛЕКЦИЯ 23
- ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ
  - ЛЕКЦИЯ 24
- ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ
  - ЛЕКЦИЯ 25
  - ЛЕКЦИЯ 18
- УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА
  - ЛЕКЦИЯ 26

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

ЛЕКЦИЯ 23

План:

23.1. Сила инерции.
23.2. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы.
23.3. Главный вектор и главный момент сил инерции
23.4. Динамические реакции.

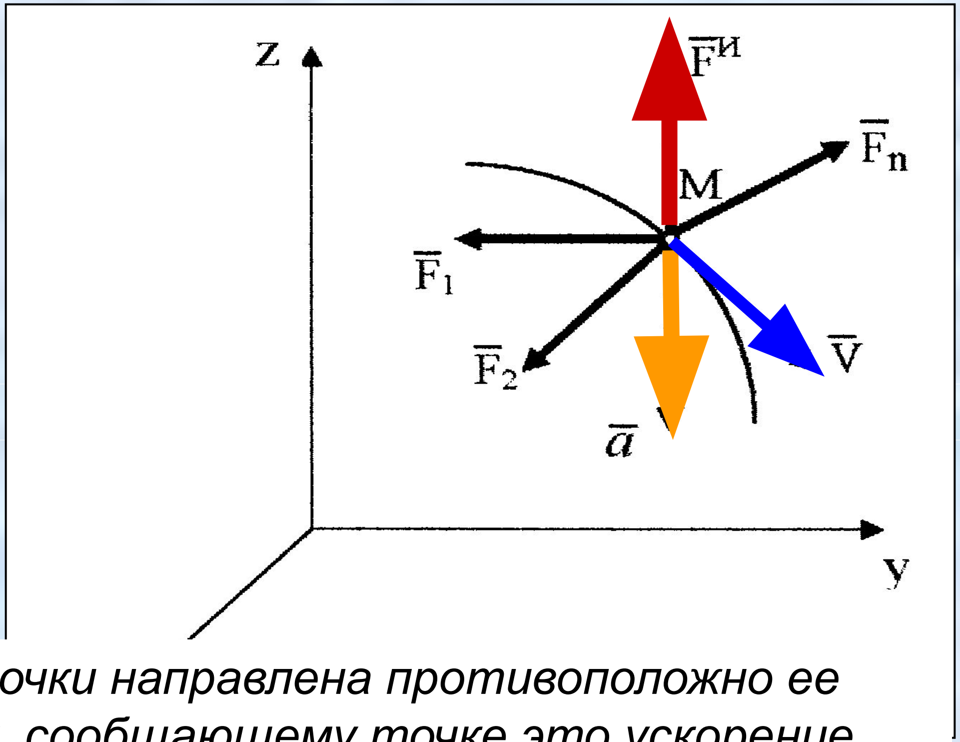
ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Рассмотрим движение материальной точки М

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k = \overline{F}^a + \overline{R}$$

$$\overline{F}^a + \overline{R} - m\overline{a} = 0.$$

$$\boxed{-m\overline{a} = \overline{F}^u}$$



*Сила инерции материальной точки направлена противоположно ее ускорению и **приложена к телу**, сообщающему точке это ускорение*

$$\boxed{\overline{F}^a + \overline{R} + \overline{F}^u = 0}$$

принцип Даламбера для материальной точки.

23.3

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Рассмотрим материальную точку механической системы:

$$\overline{F}_k^a + \overline{R_k} + \overline{F}_k^u = 0$$

для всех точек полученная система сил будет произвольной пространственной и уравновешенной:

$$\left.\begin{aligned} &\sum\left(\overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i + \overline{F}_k^u\right) = 0 \\ &\sum\left[\overline{m}_0\left(\overline{F}_k^e\right) + \overline{m}_0\left(\overline{F}_k^i\right) + \overline{m}_0\left(\overline{F}_k^u\right)\right] = 0 \end{aligned}\right\}$$

Принцип Даламбера для системы

$$\left.\begin{aligned} &\sum\overline{F}_k + \overline{R}^u = 0 \\ &\sum\overline{m}_0\left(\overline{F}_k\right) + \overline{M}_0^u = 0 \end{aligned}\right\}$$

Принцип Даламбера для твердого тела

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Главный вектор и главный момент сил инерции механической системы

Главный вектор сил инерции $\overline{R}^{u} = \sum \overline{F}_k^{u}$

$$\overline{R}^{u} = -m\overline{a}_C \qquad \overline{R}_\tau^{u} = -m\overline{a}_{C\tau} \qquad \overline{R}_n^{u} = -m\overline{a}_{Cn}$$

Главный момент сил инерции $\overline{M}_0^{u} = \sum \overline{m}_0\left(\overline{F}_k^{u}\right)$

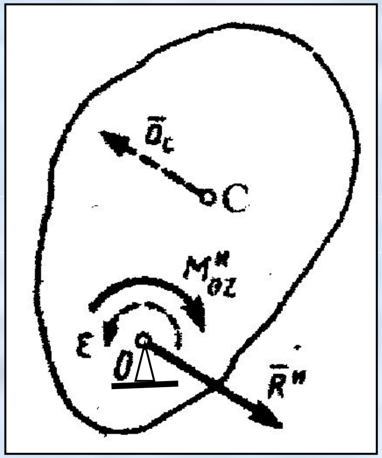
$$\overline{M}_0^{u} = \frac{d\overline{K}_0}{dt} \qquad M_z^{u} = \frac{dK_z}{dt}$$

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Частные случаи приведения сил инерции твердого тела

1. Поступательное движение

$$\overline{R}^{u} = -m\overline{a}_C$$



2. Вращательное движение (общий случай)

$$\overline{R}^{u} = -m\overline{a}_C \qquad M^{u}_{0z} = -J_{0z}\cdot\frac{d\omega}{dz} = -J_{0z}\cdot\varepsilon$$

3. Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела

$$M^{u}_{Cz} = -J_{Cz}\cdot\varepsilon$$

4. Плоскопараллельное движение

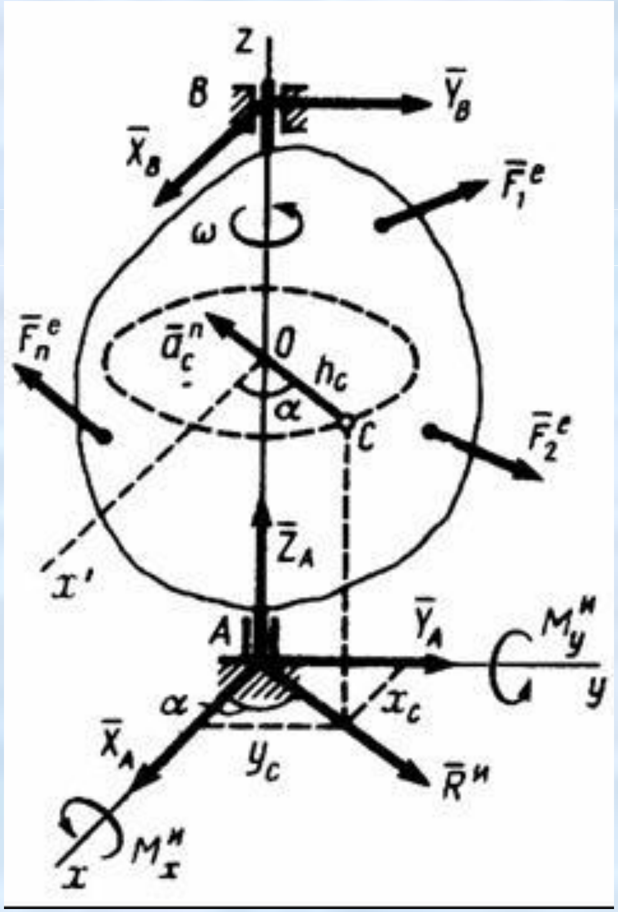
$$\overline{R}^{u} = -m\overline{a}_C \qquad M^{u}_{Cz} = -J_{Cz}\cdot\varepsilon$$

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Динамические реакции вращающегося тела

$$\left.\begin{aligned} &X_A + X_B + R_x^e + R_x^u = 0; && -Y_B b + M_x^e + M_x^u = 0;\\ &Y_A + Y_B + R_y^e + R_y^u = 0; && X_B b + M_y^e + M_y^u = 0;\\ &Z_A + R_z^e + R_z^u = 0; && M_z^e + M_z^u = 0. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &X_A + X_B = -R_x^e - m x_C \omega^2;\\ &Y_A + Y_B = -R_y^e - m y_C \omega^2;\\ &Z_A = -R_z^e;\\ &X_B b = -M_y^e - J_{xz}\omega^2;\\ &Y_B b = M_x^e - J_{yz}\omega^2. \end{aligned}\right\}$$



24.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

ЛЕКЦИЯ 24

План:

24.1. Классификация связей.
24.2. Возможные перемещения системы. Идеальные связи.
24.3. Принцип возможных перемещений

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Классификация связей

Связи - *это любого вида ограничения, которые налагаются на положения и скорости точек механической системы*

- ***Стационарные***
- ***Нестационарные***

- ***Геометрические***
- ***Кинематические (дифференциальные)***

- ***Интегрируемые***
- ***Неинтегрируемые***

- ***Голономные***
- ***Неголономные***

- ***Удерживающие***
- ***Неудерживающие***

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Возможные перемещения системы

Возможное перемещение *механической системы - это совокупность воображаемых элементарных перемещений точек системы из занимаемого в данный момент положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями*

действительное перемещение - $d\bar{r}$

дифференциал $\bar{r} = \bar{r}(t)$

возможное перемещение – $\delta\bar{r}$

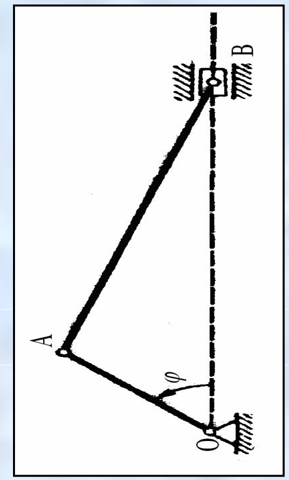
вариация $\bar{r} = \bar{r}(t)$

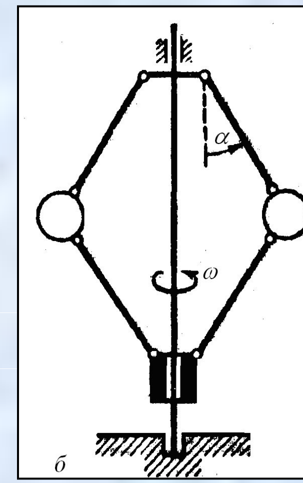
$\delta x, \delta y, \delta z$ - *проекции* $\delta\bar{r}$ *на координатные оси*

$$\delta s = |\delta\bar{r}|$$

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Число степеней свободы *системы - это число независимых, между собой возможных перемещений механической системы*





Возможная работа *- элементарная работа, которую действующая на материальную точку сила могла бы совершить на перемещении, совпадающем с возможным перемещением этой точки:*

$$\delta A = \overline{F} \cdot \delta\overline{r}$$

Идеальная связь *– это связь, для которой сумма элементарных работ ее реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю:*

$$\sum \delta A_k^R = \sum \overline{R}_k \cdot \delta\overline{r}_k = 0$$

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

(общее условие равновесия механической системы)

Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы была равна нулю:

$$\boxed{\sum \delta A_k^a = 0}$$

$$\sum \overline{F}_k^a \cdot \delta \overline{r}_k = \sum \overline{F}_k^a \cdot \delta s_k \cos\alpha_k = 0$$

25.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

ЛЕКЦИЯ 25

План:

25.1.Обобщённые координаты и обобщенные скорости.
25.2. Обобщённые силы.
25.3. Общее уравнение динамики

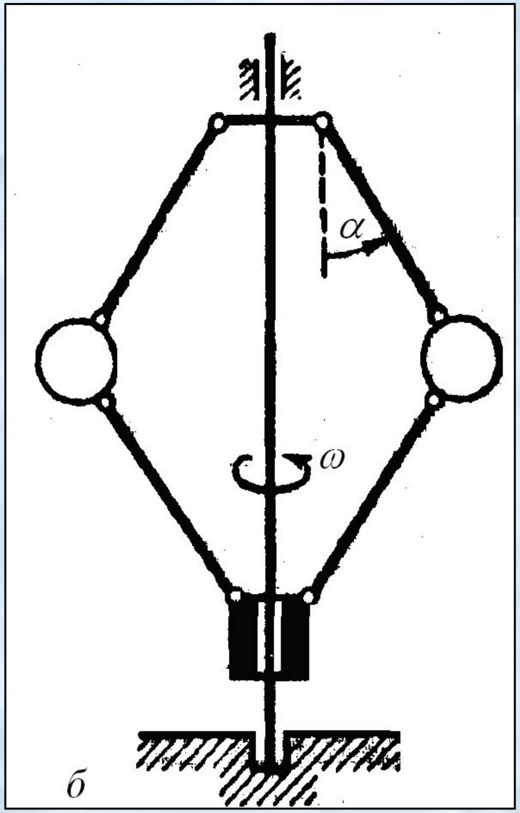
ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Обобщенные координаты *механической системы - независимые между собой параметры любой размерности, однозначно определяющие положение системы, число которых равно числу степеней свободы:*

$$q_1, q_2, \ldots, q_s$$

Положение любой точки механической системы:

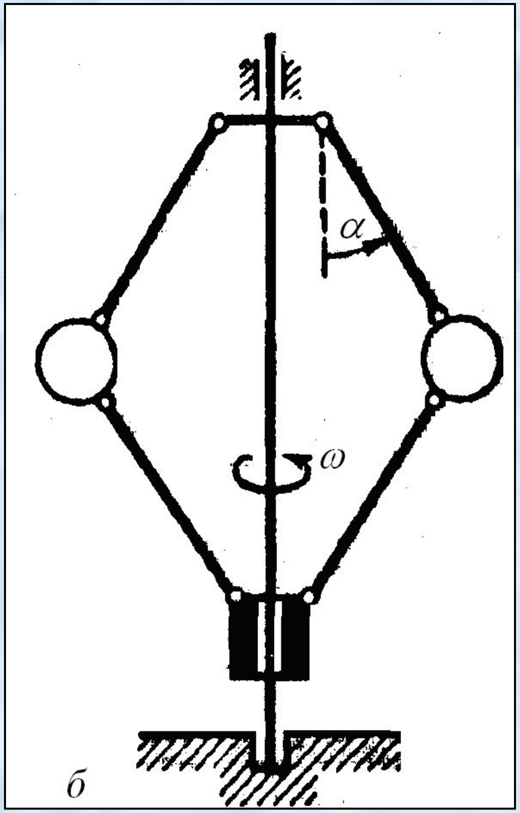
$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_s,)$$



ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Кинематические уравнения *движения системы в обобщенных координатах*

$$\boxed{\begin{aligned} q_1 &= f_1(t),\\ q_2 &= f_2(t),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ q_s &= f_s(t) \end{aligned}}$$



Обобщенные скорости *- производные от обобщенных координат по времени :*

$$\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_s$$

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Обобщённые силы

Пусть механическая система состоит из n материальных точек, на которые действуют силы : $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$

Сумма элементарных работ всех сил на возможном перемещении системы δq:

$$\sum \delta A_k = \overline{F}_1 \delta \overline{r}_1 + \overline{F}_2 \delta \overline{r}_2 + \overline{F}_n \delta \overline{r}_n$$

$$\delta \overline{r}_k \to \delta q \qquad \Sigma \delta A_1 = Q_1 \delta q_1$$

$$\boxed{Q_1 = \frac{\Sigma \delta A_1}{\delta q_1}}$$

- обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Если ко всем точкам системы кроме активных сил и реакций связей прибавить силы инерции, то по принципу Даламбера полученная система сил будет уравновешенной

Тогда, согласно принципу возможных перемещений:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u + \underbrace{\sum \delta A_k^R}_{=0} = 0$$

$= 0$ *для идеальных связей*

$$\boxed{\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0}$$

общее уравнение динамики
(**принцип Даламбера–Лагранжа**)

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Общее уравнение динамики в обобщенных координатах:

$$\boxed{\Sigma\left(Q_j + Q_j^u\right)\delta q_j = 0}$$

обобщенная активная сила

обобщенная сила инерции, соответствующая обобщенной координате q_j

Т.к. величины δq_j независимы, то:

$$\begin{cases} Q_1 + Q_1^u = 0 \\ Q_2 + Q_2^u = 0 \\ \ldots\ldots\ldots, \\ Q_S + Q_S^u = 0 \end{cases}$$

26.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

ЛЕКЦИЯ 26

План:

26.1. Уравнения Лагранжа

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Лагранж получил формулу, вычисляющую обобщенные силы инерции Q_j^u *через кинетическую энергию системы:*

$$Q_j^u = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}$$

:

где T *- кинетическая энергия системы*

Согласно общему уравнению динамики: $Q_j + Q_j^u = 0$

обобщенная сила системы: $Q_j = -Q_j^u = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}$

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_2}=Q_2,\\
&.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s.
\end{aligned}\right\}$$

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Чтобы составить уравнения Лагранжа для данной механической системы, необходимо:

- *- установить число степеней свободы системы и выбрать обобщенные координаты;*
- *- изобразить систему в произвольном положении,все действующие силы (для систем с идеальными связями только активные);*
- *- вычислить обобщенные силы, при этом каждое возможное перемещение должно быть положительным;*
- *- записать кинетическую энергию системы и выразить ее через обобщенные координаты и обобщенные скорости;*
- *- вычислить частные производные согласно уравнениям Лагранжа;*