

ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**Факультет фізики, математики та інформатики
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу**

Дипломна робота

**на тему: Узагальнене обернення матриць та його
застосування до розв'язання деяких задач**

Виконала: Кулєш Ю.А.

Керівник: доц. Плоткін Я.Д.

Херсон – 2013 рік

Актуальність теми

Важливість матриць у математиці важко переоцінити. Вони були предметом дослідження у багатьох наукових роботах, їх дослідженню надають багато часу і нині. Завдяки матрицям можна розв'язувати достатню кількість різнопланових задач.

З їх допомогою досліджуються графіки функцій та рівнянь як на площині так і в просторі, розв'язують системи лінійних рівнянь з n невідомими та багато іншого. В наш час матриці знайшли собі нове використання у комп'ютерній техніці, яка з кожним роком все більше розвивається покращуючи і полегшуючи нам життя.

Об'єкт, предмет та мета досліджень

Об'єкт дослідження:

- узагальнене обернення матриць;
- узагальнено-обернена матриця, що має жорданів ланцюг;
- псевдо-обернена матриця;
- застосування узагальнено обернених матриць до розв'язку систем лінійних та звичайних диференціальних рівнянь;
- обчислення інтегралів від функцій, які залежать від матриць.

Предмет дослідження:

- властивості узагальнено-оберненої та псевдо-оберненої матриць;
- диференціювання узагальнено-обернених матриць, які залежать від параметра по параметру;
- асимптотичний підхід до переносу граничних умов для систем диференціальних рівнянь.

Мета випускної роботи:

- вивчення головних питань з теорії узагальнено-обернених матриць;
- розгляд можливості диференціювання узагальнено-оберненої матриці, яка залежить від параметра по параметру;
- дослідження теоретичних основ розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою узагальнено-обернених матриць, виявлення їх зв'язку з розв'язком крайової задачі;
- обчислення інтегралів функцій, які залежать від матриць, побудовою жорданових ланцюгів.

Для досягнення мети було поставлено наступні завдання:

- ознайомитись з поняттям узагальнено-оберненої та псевдо-оберненої матриць;
- вивчити властивості узагальнено-оберненої та псевдо-оберненої матриць;
- проаналізувати існуючі методи побудови псевдо-обернених матриць;
- розробити проектні алгоритми диференціювання узагальнено-оберненої матриці, яка залежить від параметра по параметру;
- розглянути спектральне представлення матриць та їх застосування до розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь за допомогою переносу граничних умов;
- запропонувати використання узагальнено-обернених матриць до обчислення інтегралів від функцій, які залежать від матриць

Означення оберненої матриці

Теорема: Якщо визначник ($\det A$) не дорівнює нулю, то матриця A має обернену:

$$\det(A) \neq 0.$$

Матриця A^{-1} називається оберненою для квадратної не виродженої матриці A , якщо виконується співвідношення:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

- Розглянемо квадратну матрицю A яка має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Лінійне рівняння в однозначно розв'язне, якщо складається з нульового вектора. У цьому випадку визначена обернена матриця в m

$$Ax = f \quad \longrightarrow$$

$$A^{-1}f = x, f \in R(A)$$

Властивості псевдо-обернених матриць:

$$1. (A^*)^+ = (A^+)^*;$$

$$2. (A^+)^+ = A;$$

$$3. (AA^+)^* = AA^+, \quad (AA^+)^2 = AA^+;$$

$$4. (A+A)^* = A+A, \quad (A+A)^2 = A+A.$$

Асимптотичний підхід – це один із найпопулярніших, найпростіших та найдоступніших методів опису граничної поведінки.

Дана методологія має багато застосувань в природничих науках.

Наприклад,

- в **інформатиці** для **аналізу алгоритмів**, при розгляді виконання алгоритмів, що застосовуються для дуже великих наборів вхідних даних.
- поведінка дуже великих **фізичних систем**.
- в **аналізі аварій**, коли встановлюється причина аварії за допомогою кількісного моделювання, з великим числом аварійних ситуацій в даний час і даному місці.

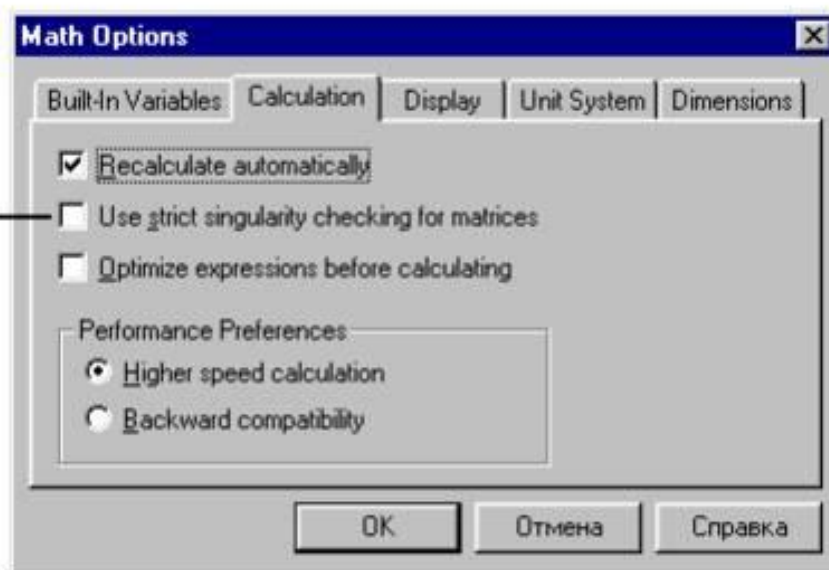
Найпростіший **приклад**, розгляд функції $f(n)$, при описі її властивостей, коли n стає занадто великим. Таким чином, якщо $f(n)=n^2+3n$, елемент $3n$ стає незначним в порівнянні з n^2 , при занадто великих n . Тоді кажуть, що функція $f(n)$ є асимптотично еквівалентна n^2 при $n \rightarrow \infty$ й символічно записують як $f(n) \sim n^2$.

Диференціювання узагальнено- оберненої матриці



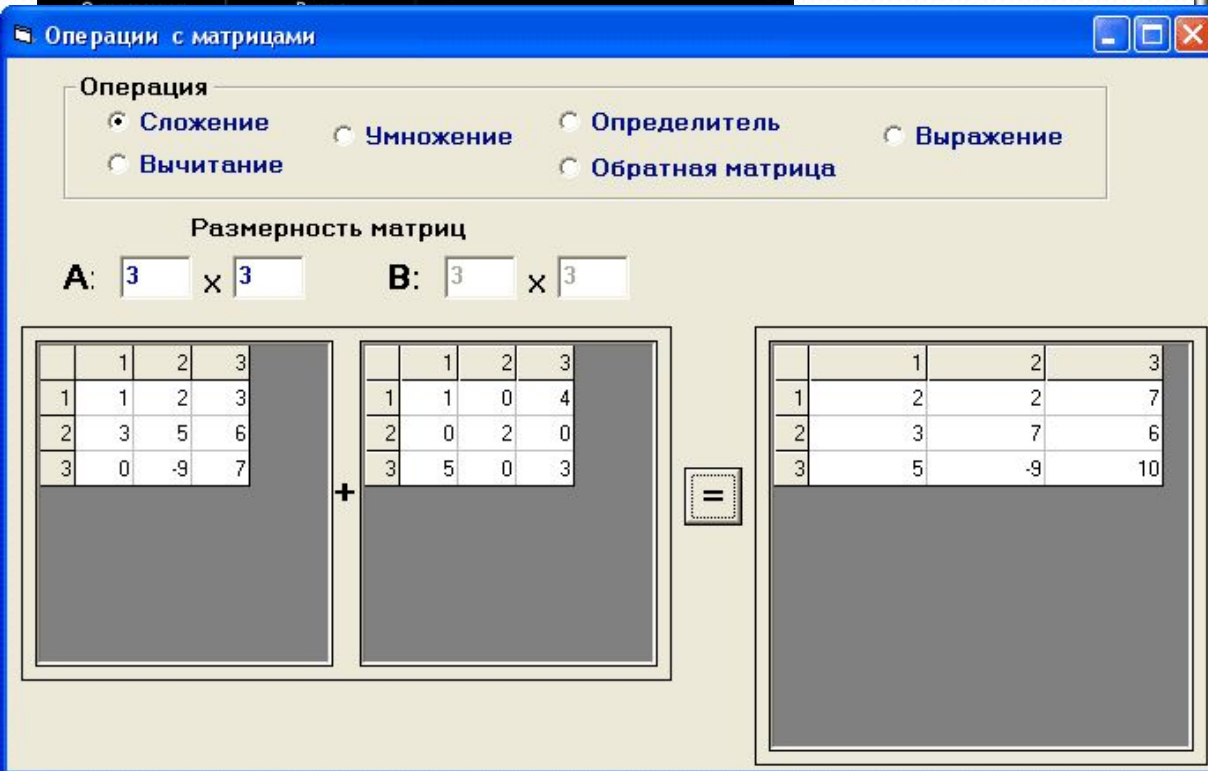
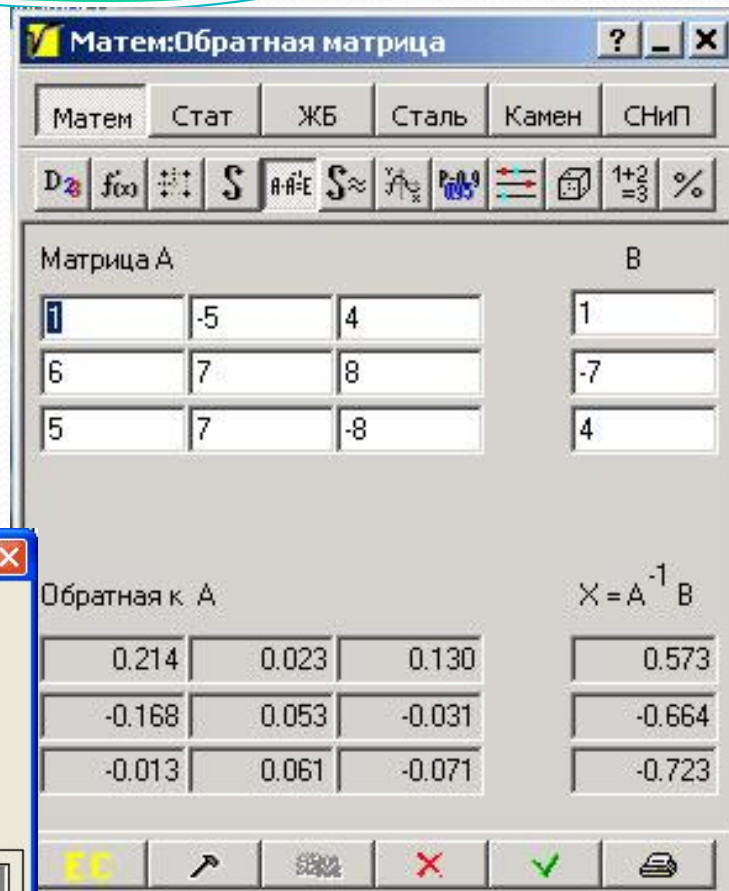
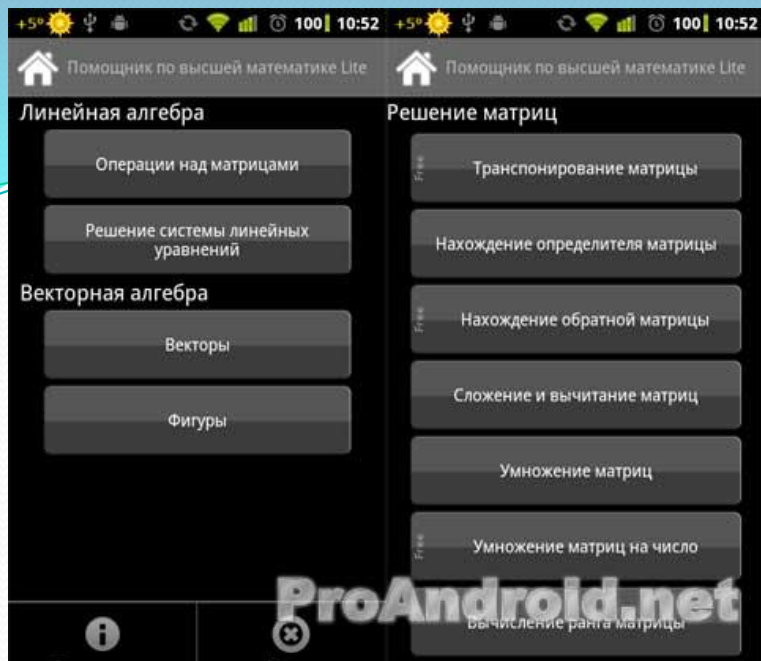
Прикладні програми з використанням об'єкту дослідження

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3.152 \times 10^{15} & -6.304 \times 10^{15} & 3.152 \times 10^{15} \\ -6.304 \times 10^{15} & 1.261 \times 10^{16} & -6.304 \times 10^{15} \\ 3.152 \times 10^{15} & -6.304 \times 10^{15} & 3.152 \times 10^{15} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \dots$$

Matrix is singular.
Cannot compute its inverse.



Обратная матрица'б (3x3)

О программе

A		
1	1	1
2	2	3
4	5	6

Det = -1

A^T		
-3	-1	1
0	2	-1
2	-1	0

A^{-1}		
3	1	-1
0	-2	-2
1	1	0

4x4

Рассчитать

Тип данных

☐ Дробные ☒ Десятичные

Висновки та пропозиції:

У процесі дослідження випускної роботи отримані наступні важливі результати, що стосуються дослідження питання про можливість виконання побудови узагальнено-оберненої матриці для звідно-оберненої та їх практичного застосування:

- Дано теоретичне обґрунтування поняття узагальнено-оберненої та псевдо-оберненої матриць, було досліджено їх властивості.
- Розкрито основні методи побудови псевдо-обернених матриць.
- Було показано можливість диференціювання узагальнено-оберненої матриці, яка залежить від параметра по параметру.
- В ході спектрального представлення матриць було реалізовано асимптотичний підхід до переносу граничних умов для систем звичайних диференціальних рівнянь.
- В результаті дослідження було обґрунтовано використання узагальнено-обернених матриць до обчислення інтегралів від функцій, які залежать від матриць.

Дякую за увагу!