

Способы решения
тригонометрических
уравнений



Содержание

I. Введение

II. Способы решения:

- 1) Замена переменной
- 2) Решение однородных уравнений
- 3) Разложение на множители
- 4) Решение линейных уравнений
 - а) введение вспомогательного угла
 - б) сведение к однородному

5) Решение уравнений, содержащих высокие степени

6) Решение уравнений, Решение уравнений, с Решение уравнений, с ограниченным ОДЗ

III. Обучающая самостоятельная работа

I. Введение

[перейти](#)[К оглавлению](#)[К обучающей с/р](#)

- При решении тригонометрических уравнений, стараются привести уравнения к уравнению, содержащему одну функцию одного аргумента.
- Способы решения уравнений различны, однако, можно выделить основные типы уравнений и стандартные способы их решений.

II. Способы решения

[перейти](#)**1****Замена переменной**[К оглавлению](#)[К обучающей с/р](#)

Пример: $3 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$

Решение:

$$t = \operatorname{tg} x$$

$$3t^2 + t - 2 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25$$

$$t = \frac{-1-5}{6} \text{ или } t = \frac{-1+5}{6}$$

$$t = 2/3 \quad t = -1$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \quad \operatorname{tg} x = 2/3$$

$$\left[x = -\frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. x = \operatorname{arctg} 2/3 + \pi n; n \in \mathbb{Z} \right]$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n; \operatorname{arctg} 2/3 + \pi n; n \in \mathbb{Z}$

II. Способы решения

[перейти](#)

2 решение однородных уравнений

[К оглавлению](#)[К обучающей с/р](#)

Однородные уравнения относительно $\sin x$ и $\cos x$:

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

Значения x , при которых $\cos x = 0$, не являются решениями уравнения, т.к. если $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$, а $\sin x$ и $\cos x$ не могут быть равными нулю одновременно.

$\cos x \neq 0$ в однородных уравнениях

II. Способы решения

[перейти](#)**2****решение однородных уравнений**[К оглавлению](#)[К обучающей с/р](#)

Пример: $3\sin x + 2\cos x = 0$ // разделим на $\cos x \neq 0$ в однородном уравнении

Решение:

$$3 \operatorname{tg} x + 2 = 0$$

$$3 \operatorname{tg} x = -2$$

$$\operatorname{tg} x = -2/3$$

$$x = \operatorname{arctg}(-2/3) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\operatorname{arctg}(-2/3) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

II. Способы решения

[перейти](#)**3****разложение на множители**[К оглавлению](#)[К обучающей с/р](#)

Пример:
Решение:

$$\sin 2x = 2\cos^2 x$$

$$2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0 \quad \text{! Делить на } \cos x \text{ нельзя}$$

$$2 \cos x (\sin x - \cos x) = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ или } \sin x - \cos x = 0 \text{ |разделим на } \cos x \neq 0 \\ \text{в однородном ур-и}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ или } \operatorname{tg} x - 1 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

II. Способы решения

[перейти](#)

4 Лине́йные уравнения относительно $\sin x$ и $\cos x$

[К оглавлению](#)

[К обучающей с/р](#)

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

где:

$$c \neq 0;$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$$

4а Введение вспомогательного угла

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \mu) = c,$$

$$\text{где: } \mu = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

$$a > 0$$

II. Способы решения

[перейти](#)

4 Лине́йные уравнения относительно $\sin x$ и $\cos x$

[К оглавлению](#)[К обучающей с/р](#)

4а Введение вспомогательного угла

Пример: $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$

Решение:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$\mu = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}/2$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n - \frac{\pi}{6}$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n - \frac{\pi}{6}$

II. Способы решения

[перейти](#)

5 Решение уравнений, содержащих выс. степени

[К оглавлению](#)

[К обучающей с/р](#)

Формулы понижения степени:

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x =$$

$$= \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x =$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 0,5 \sin^2 2x$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x =$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) =$$

$$= \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

II. Способы решения

[перейти](#)

5 Решение уравнений, содержащих выс. степени

[К оглавлению](#)[К обучающей с/р](#)

Пример:

$$4\sin^4 x + 12 \cos^2 x = 7$$

Решение:

$$(2\sin^2 x)^2 + 6(2\cos^2 x) = 7$$

$$(1 - \cos 2x)^2 + 6(1 + \cos 2x) = 7$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 6 + 6\cos 2x = 7$$

$$\cos^2 2x + 4\cos 2x = 0$$

$$\cos 2x(\cos 2x + 4) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \quad \text{или} \quad \cos 2x + 4 = 0$$

$$2x = \pm \pi/2 + \pi n \quad \text{или} \quad \text{т.к. } |\cos t| < 1, \text{ нет корней}$$

$$x = \pm \pi/4 + \pi n/2, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\pm \pi/4 + \pi n/2, \quad n \in \mathbb{Z}$$

II. Способы решения

[перейти](#)

6 Решение уравнений с ограниченной ОДЗ

[К оглавлению](#)[К обучающей с/р](#)

Пример:

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$$

Решение:

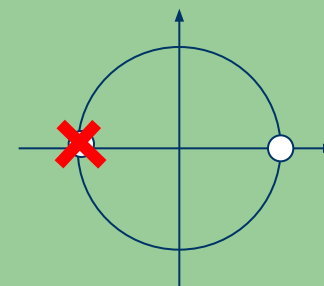
Найдем ОДЗ:

$$\cos x \neq -1; x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ – сравним с ОДЗ}$$

$$x = 2\pi n$$



Ответ: $2\pi n$