

An illustration featuring a blue inkwell with a gold rim and a silver quill pen resting inside it. To the right of the inkwell is a large, unrolled scroll of parchment with a torn edge. The title text is centered over the scroll.

Векторы в пространстве

Цели урока

- Знать: *определение вектора в пространстве и связанные с ним понятия; равенство векторов*
- Уметь: *решать задачи по данной теме*



Физические величины

Скорость $\vec{v}$

Ускорение $\vec{a}$

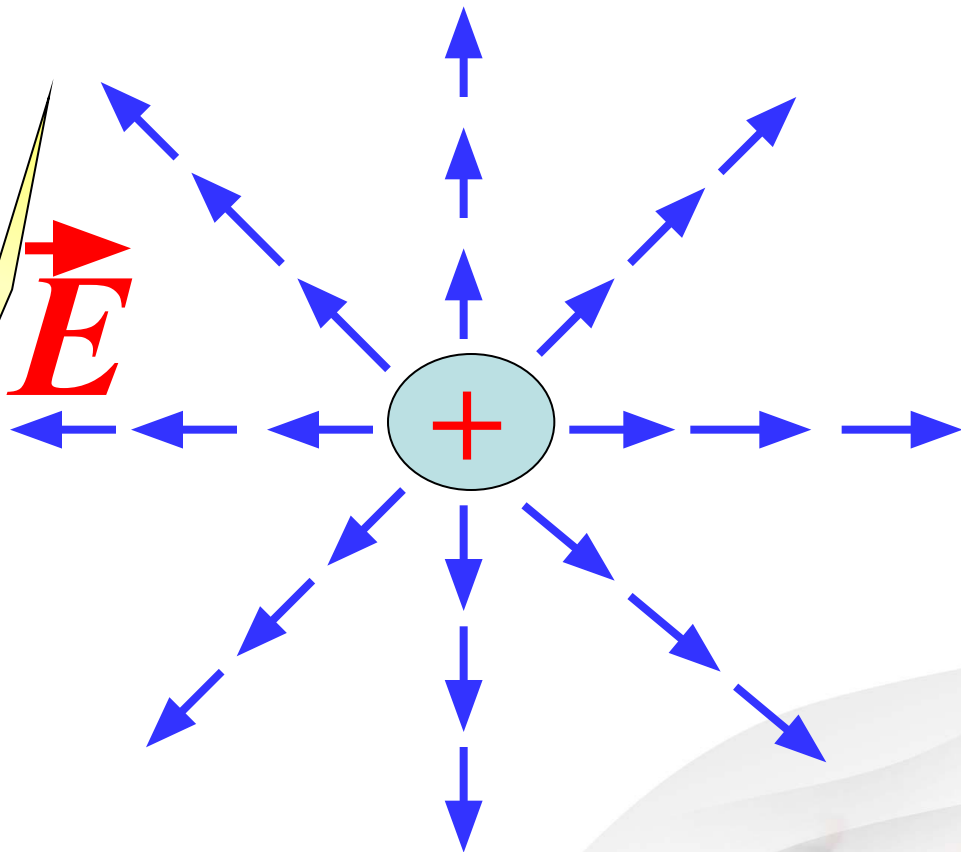
Перемещение $\vec{s}$

Сила $\vec{F}$



Электрическое поле

Вектор
напряженности



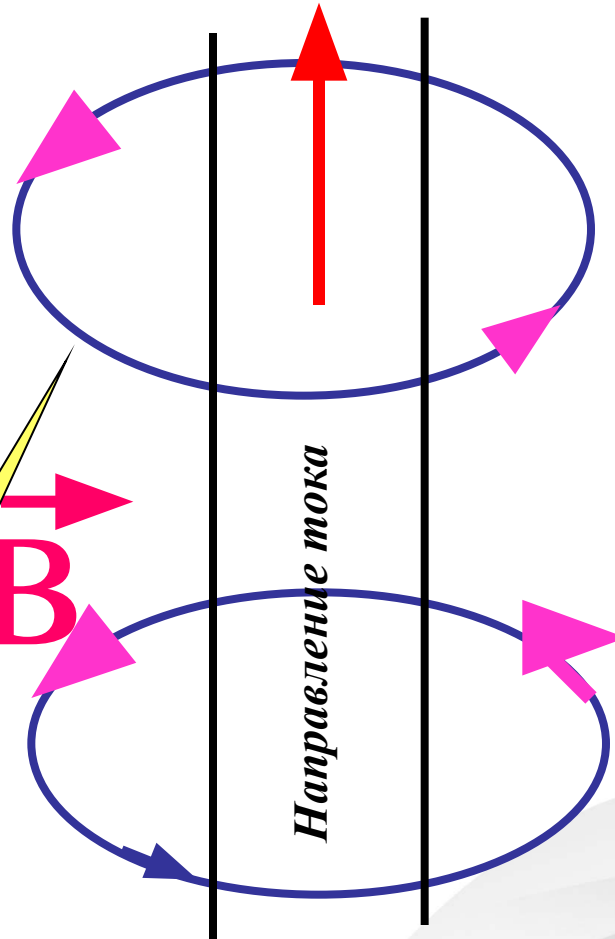
Магнитное поле

Вектор магнитной
индукции



$\vec{B}$

Направление тока

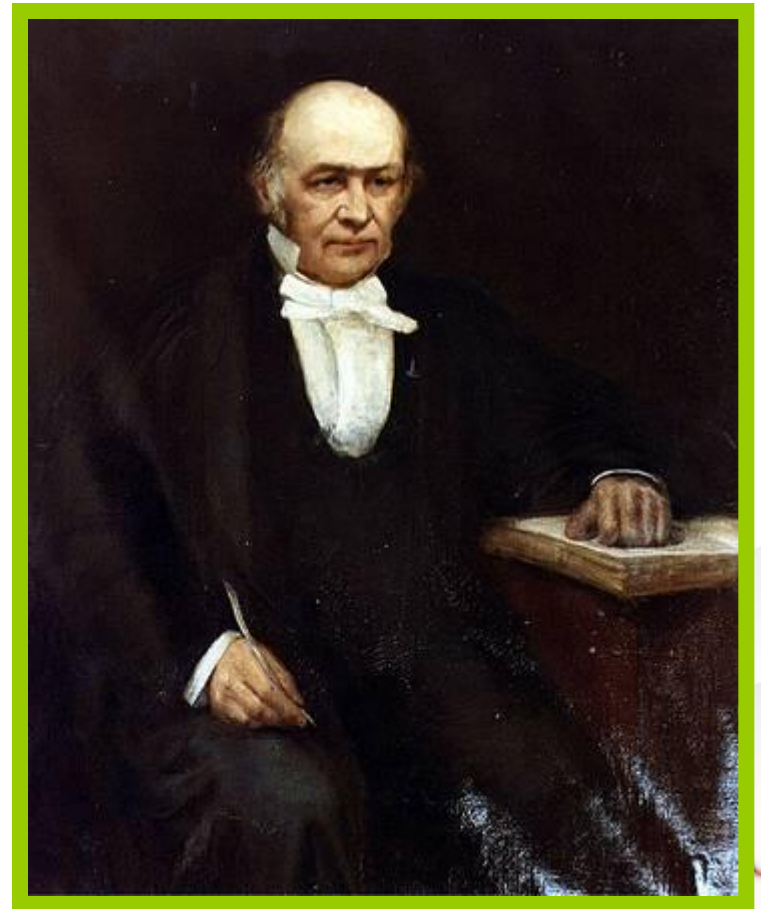


Понятие вектора появилось в 19 веке в работах математиков

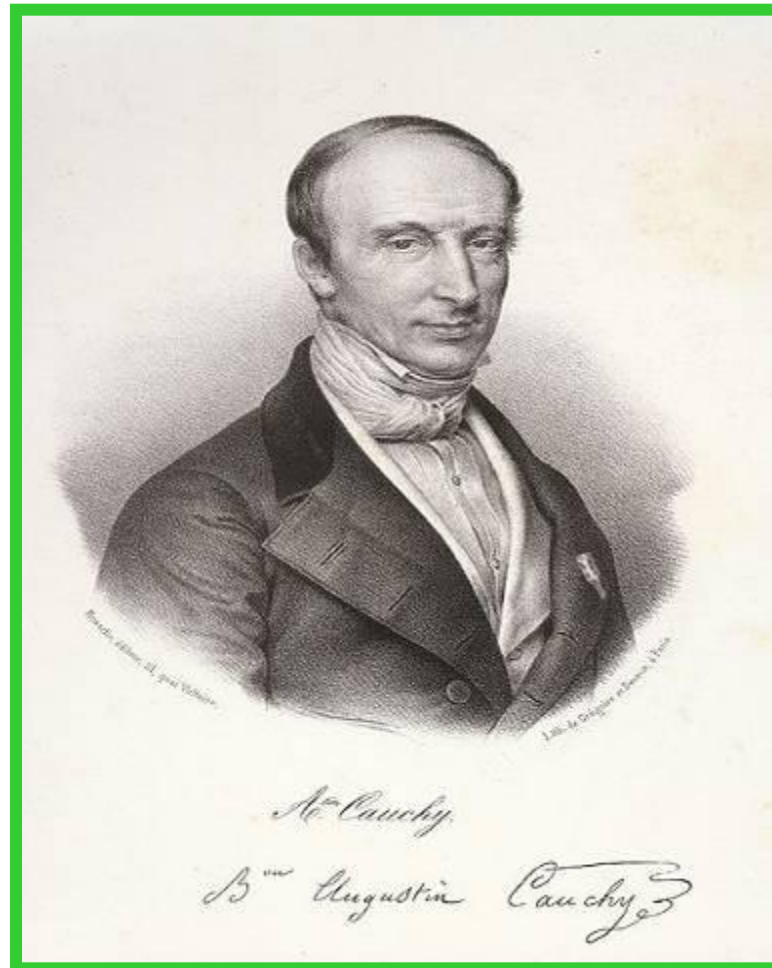
Г. Грассмана



У. Гамильтона



Современная символика для обозначения
вектора $\vec{r}$ была введена в 1853 году
французским математиком О. Коши.



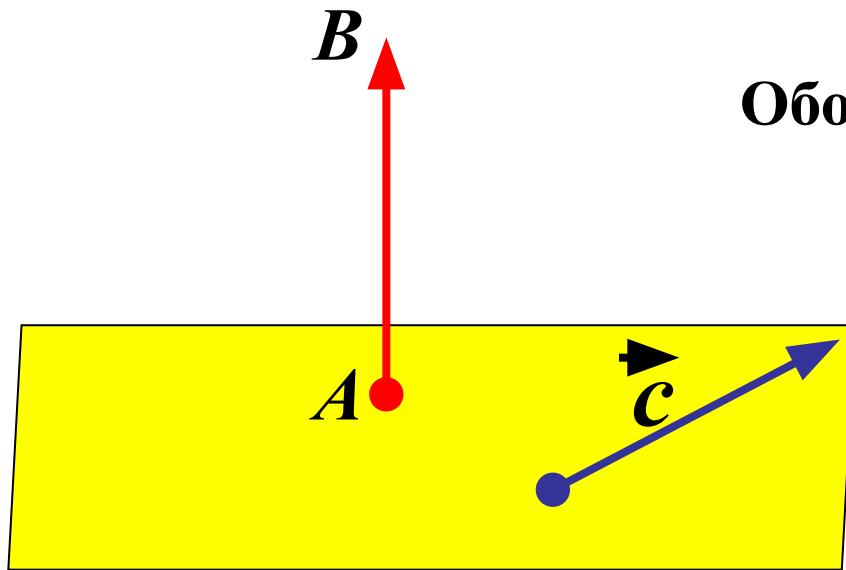
Задание

Повторить все термины по теме «Векторы на плоскости»

Вектор
Нулевой вектор
Длина вектора
Коллинеарные векторы
Сонаправленные векторы
Противоположно направленные
векторы
Равенство векторов

Определение вектора в пространстве: вектором называется направленный отрезок

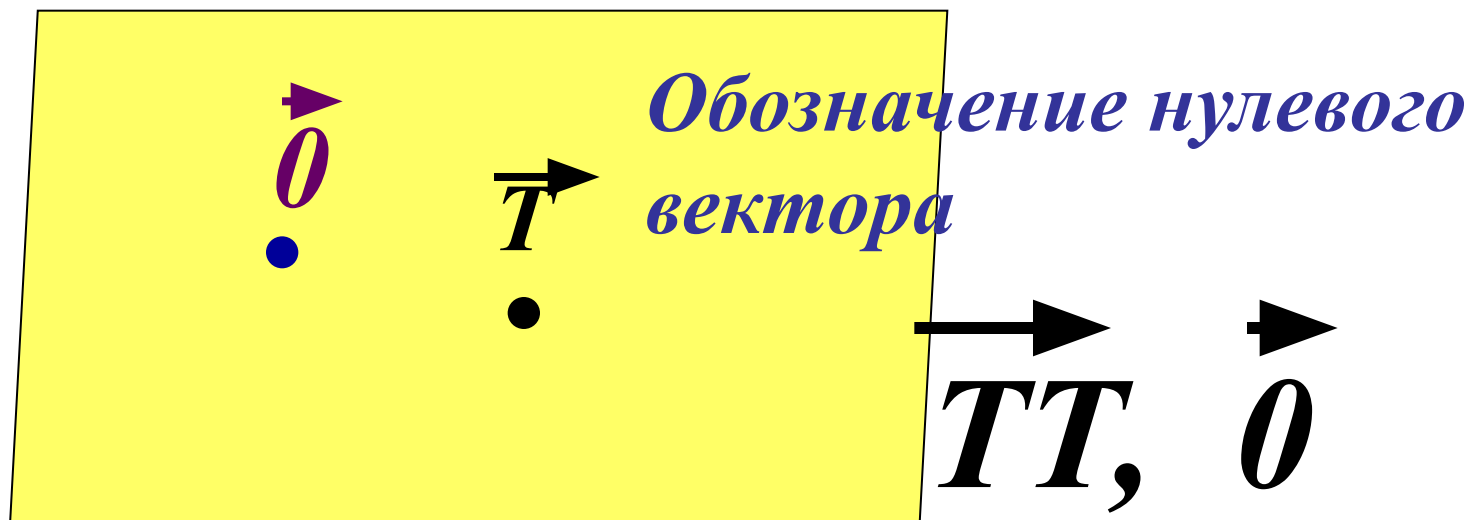
вектор имеет начало и конец(A - начало,
 B - конец)



Обозначение вектора

$\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}$ или $\overline{AB}$

Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется **нулевым**



Определение

Координатами вектора с началом в точке A_1 $(x_1; y_1; z_1)$ и концом в точке

$A_2 (x_2; y_2; z_2)$ называются числа

$$x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$$

Обозначают: $\overrightarrow{A_1 A_2} (a_1; a_2; a_3)$ или

$\overline{a} (a_1; a_2; a_3)$ или $(\overline{a_1; a_2; a_3})$ или

$\blacktriangleright (a_1; a_2; a_3)$



Решить задачу № 1 образец на следующем слайде)

Даны четыре точки

$A(1; 2; 3)$, $C(2; 3; 4)$,

$B(4; 5; 6)$, $D(7; 8; 9)$

- Найти координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CB}$



Образец решения

$A(1; 2; 3),$

$B(4; 5; 6)$

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1; 5 - 2; 6 - 3) = (3; 3; 3)$$

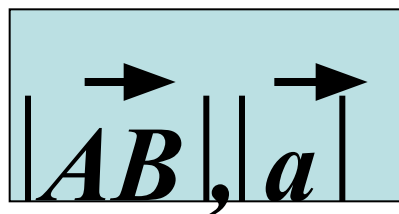
Из координат конечной точки
вычитаем координаты начальной точки



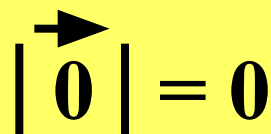
Длина ненулевого вектора

- Длиной вектора $\vec{AB}$ с координатами $(a_1; a_2; a_3)$ или абсолютной величиной называется длина отрезка AB

- Длина вектора $\vec{AB}$ (вектора a) обозначается так:


$$|\vec{AB}|, |\vec{a}|$$

- Длина нулевого вектора считается равной нулю:


$$|\vec{0}| = 0$$

Абсолютная величина
вычисляется по формуле

$$\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



Решить задачу

- Даны две точки $A(1;2;3)$ и $B(2;3;4)$. Найти длину вектора AB

Далее образец решения



Образец решения:

Сначала найдём координаты вектора:
 $\overrightarrow{AB} = (2-1; 3-2; 4-3) = (1; 1; 1)$. Затем по формуле, найдём модуль

$$\left| \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \approx 1,7$$



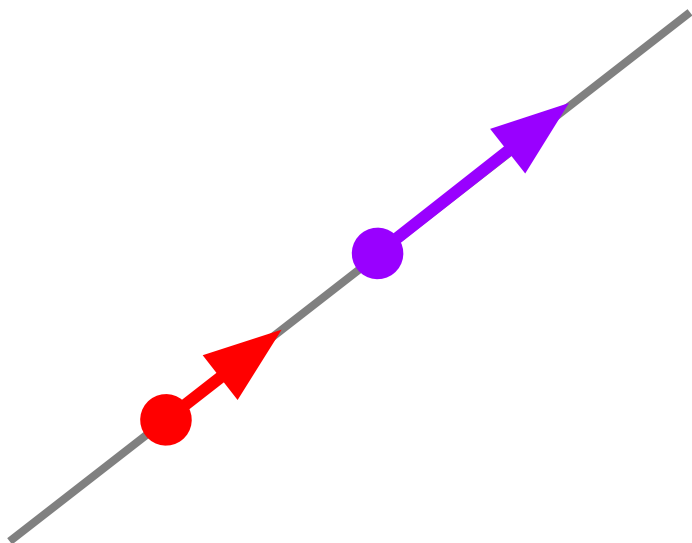
Решить задачу (самостоятельно)

Даны точки $C(2;2;3)$ и $D(5;3;4)$, $M(5;4;7)$, $K(8;3;5)$ Найти длину векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{MK}$



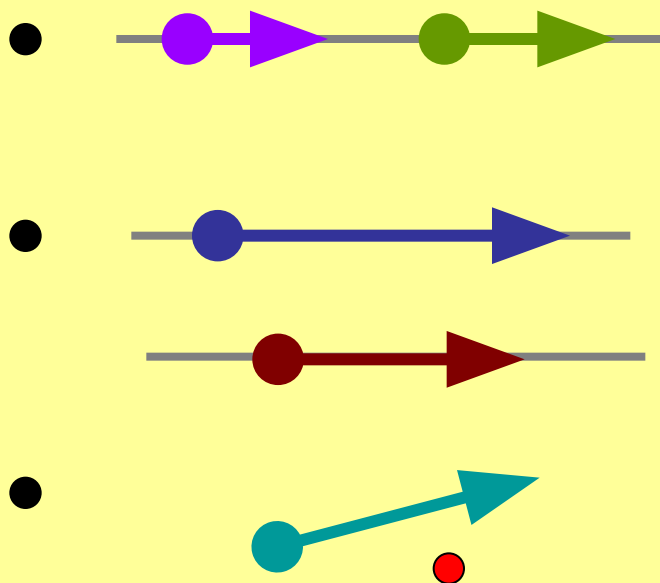
Определение коллинеарности векторов

- Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых

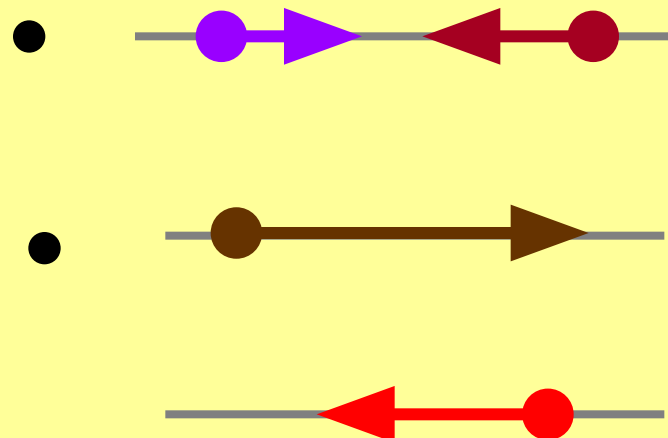


Коллинеарные векторы

Сонаправленные векторы



Противоположно направленные векторы



Какие векторы на рисунке сонаправленные?
Какие векторы на рисунке противоположно
направленные?

Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CC_1}$.

Сонаправленные векторы:

$$\overrightarrow{AA_1} \uparrow \uparrow \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{A_1D} \uparrow \uparrow \overrightarrow{B_1C}$$

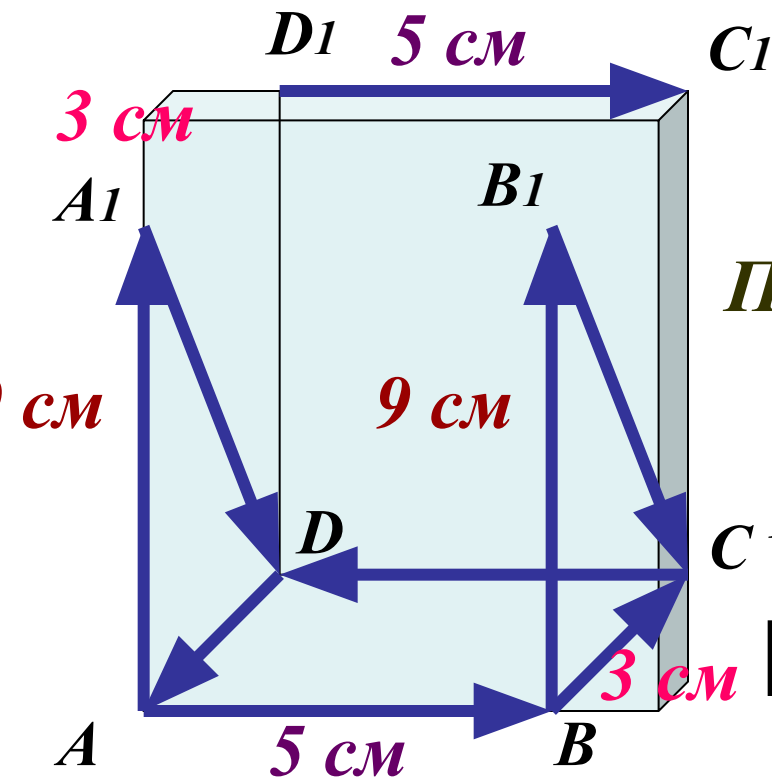
$$\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{D_1C_1}$$

Противоположно-направленные:

$$\overrightarrow{CD} \uparrow \downarrow \overrightarrow{D_1C_1}, \overrightarrow{CD} \uparrow \downarrow \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{DA} \uparrow \downarrow \overrightarrow{BC}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 5 \text{ см}; |\overrightarrow{BC}| = 3 \text{ см}; |\overrightarrow{BB_1}| = 9 \text{ см}.$$

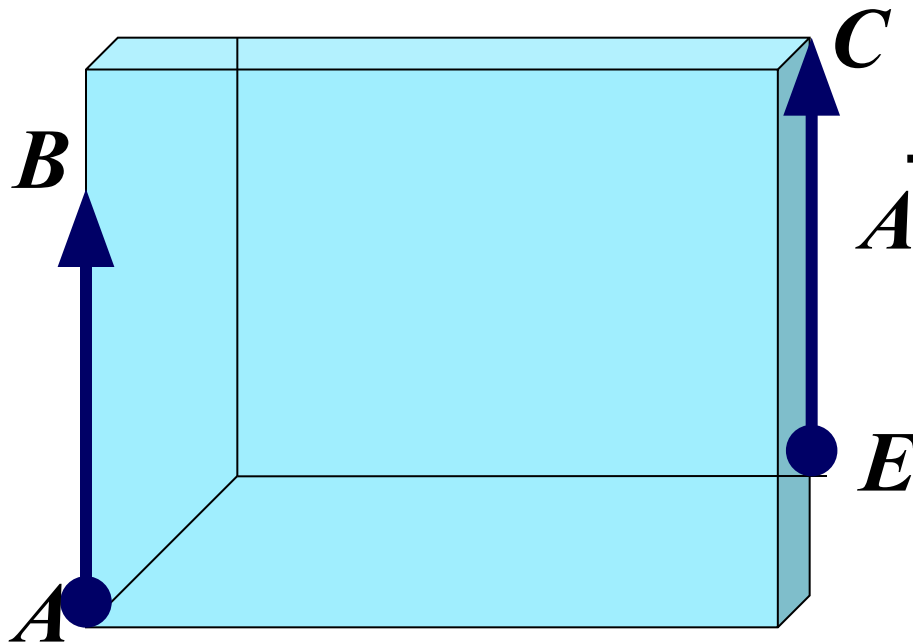


- Далее не рассматривать. Дальше будет тема следующего урока



Равенство векторов

Векторы называются *равными*, если они сонаправлены и их длины равны

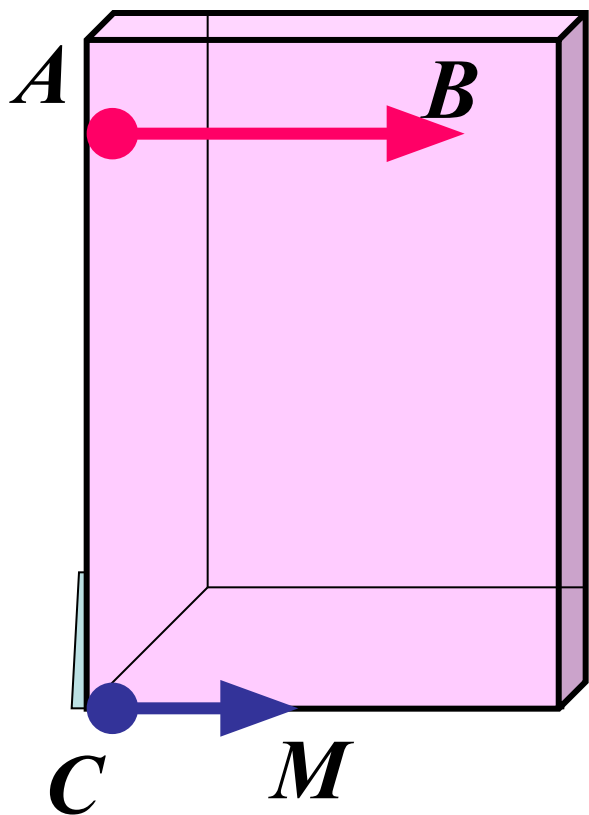


$\vec{AB} = \vec{EC}$, так как
 $\vec{AB} \uparrow \vec{EC}$ и $|\vec{AB}| = |\vec{EC}|$



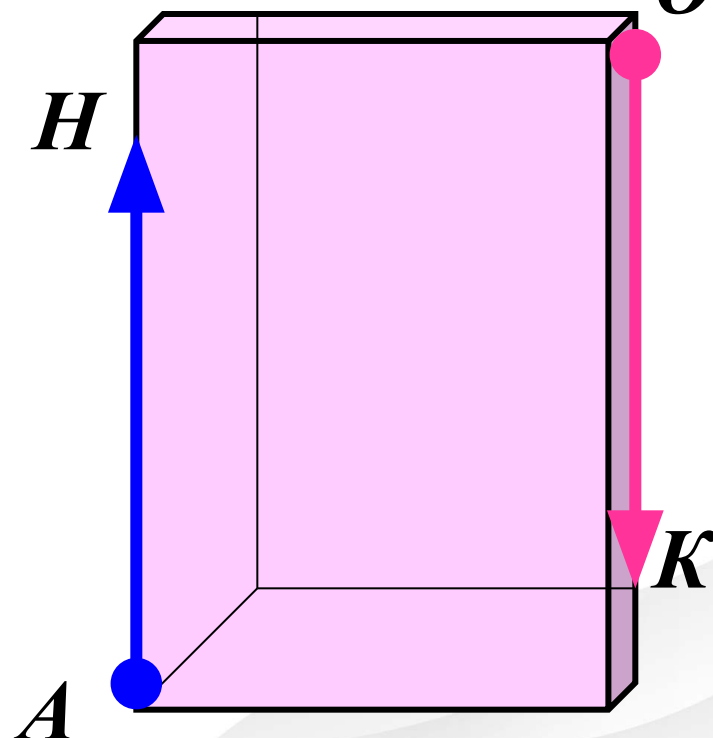
Могут ли быть равными векторы на рисунке? Ответ обоснуйте

• Рисунок № 1



$$\vec{AB} \neq \vec{CM}, \text{ т. к. } |\vec{AB}| \neq |\vec{CM}|$$

Рисунок № 2



$$\vec{AH} \neq \vec{OK}, \text{ т. к. } \vec{AH} \nparallel \vec{OK}$$

• Среди векторов найдите
равные

$$\overrightarrow{AB} = (1; 2; 3)$$

$$\overrightarrow{BC} = (2; 2; 3)$$

$$\overrightarrow{CD} = (1; 2; 5)$$

$$\overrightarrow{MK} = (1; 2; 3)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MK}$$



Решить задачу

Даны точки: $A = (1; 2; -3)$, $B = (2; -2; 3)$,
 $C = (1; -2; 5)$, $K = (1; 2; 3)$, $M = (5; 6; 7)$,
 $D(0; 2; -1)$

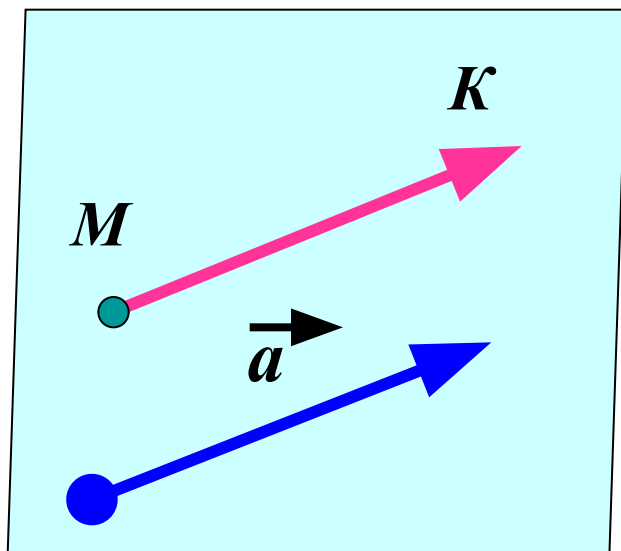
Найти векторы: AB , BC , KM , DC и
найти среди них равные



Доказать, что от любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному, и притом только один

Дано: $\vec{a}$, M .

Доказать: $\vec{v} = \vec{a}$, $M \in \vec{v}$, единственный.



Доказательство:

Проведем через вектор a и точку M плоскость.

В этой плоскости построим $\vec{MK} = \vec{a}$.

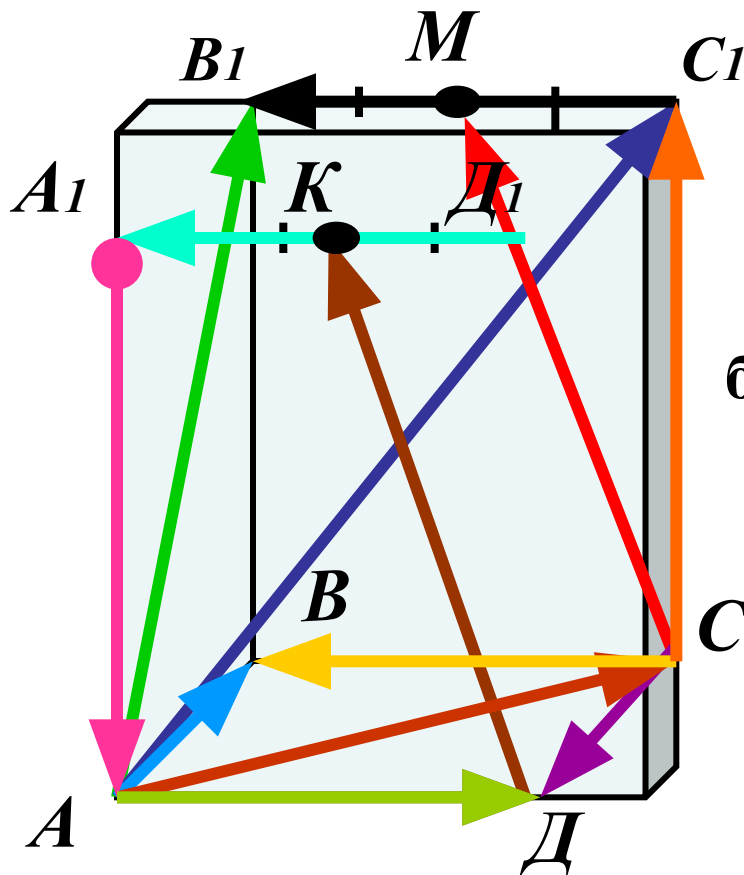
Из теоремы о параллельности $\vec{MK} = \vec{a}$ и $M \in MK$.

- ДАЛЬШЕ НЕ РАЗБИРАЕМ



Решение задач

№ 322



Укажите на этом рисунке
все пары:

а) сонаправленных векторов

$\vec{DK}$ и $\vec{CM}$; $\vec{CB}$ и $\vec{C_1B_1}$ и $\vec{D_1A_1}$;

б) противоположно направленных
векторов

$\vec{CD}$ и $\vec{AB}$; $\vec{AD}$ и $\vec{CB}$; $\vec{AA_1}$ и $\vec{CC_1}$;

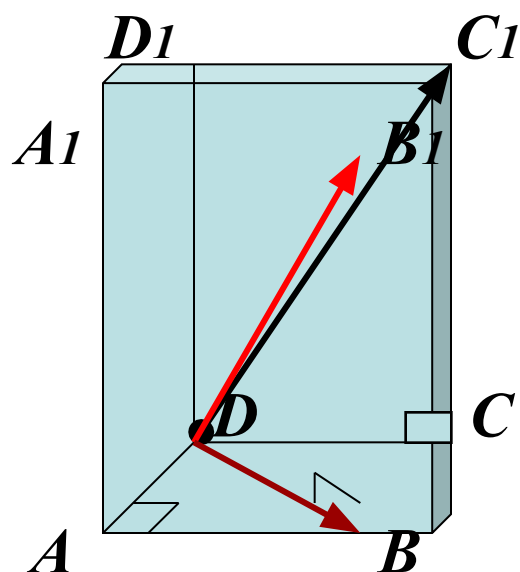
$\vec{AD}$ и $\vec{D_1A_1}$; $\vec{AD}$ и $\vec{C_1B_1}$;

в) равных векторов

$\vec{CB} = \vec{C_1B_1}$; $\vec{D_1A_1} = \vec{C_1B_1}$; $\vec{DK} = \vec{CM}$

Решение задач

№ 321 (б)



Решение:

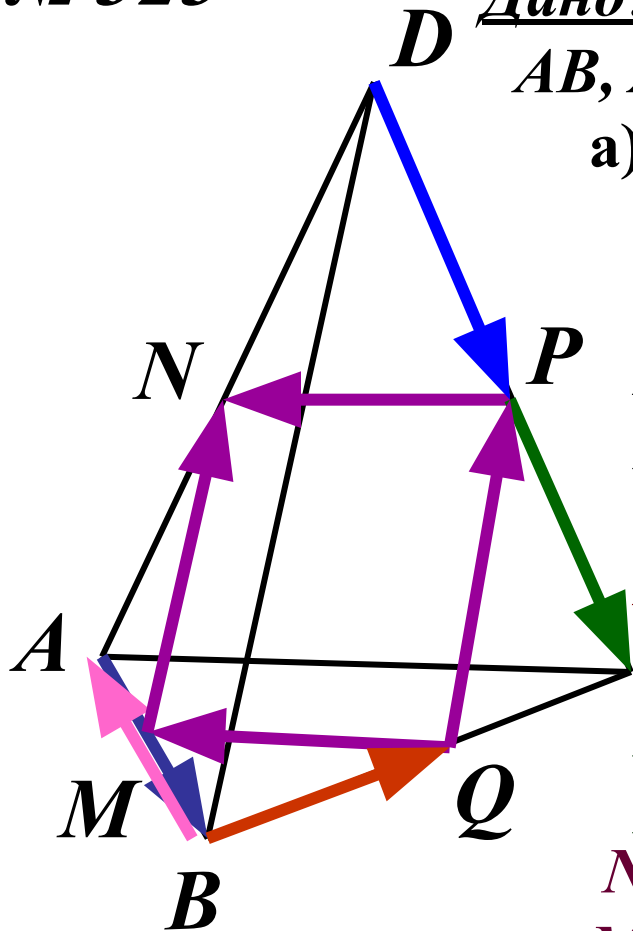
$$DC1 = \sqrt{DC^2 + CC_1^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$$

$$DB = \sqrt{DA^2 + AB^2} = \sqrt{81 + 64} = \sqrt{145}$$

$$DB1 = \sqrt{DB^2 + BB_1^2} = \sqrt{145 + 144} = 17$$

Решение задач

№ 323



Дано: точки M, N, P, Q – середины сторон AB, AD, DC, BC ; $AB=AD=DC=BC=DD=AC$;

а) выписать пары равных векторов;

$$\vec{MN} = \vec{QP}; \vec{PN} = \vec{QM}; \vec{DP} = \vec{PC};$$

б) определить вид четырехугольника $MNPQ$.

Решение: NP -средняя линия треугольника ADC , $NP = 0,5AC$, $NP \parallel AC$;

MQ -средняя линия тр. ABC , $MQ = 0,5AC$,

$MQ \parallel AC$, $NP=MQ$, $NP \parallel MQ$.

PQ -средняя линия треугольника DBC ;

$PQ = 0,5DB$, $PQ \parallel DB$;

NM -средняя линия треугольника ADB ,

$MN = 0,5DB$, $MN \parallel DB$, $PQ=MN$, $PQ \parallel MN$.

По условию все ребра тетраэдра равны, то он правильный и скрещивающиеся ребра в нем перпендикулярны.

DB перпендикулярно AC .

$$NP=MQ=PQ=MN$$

$$NP \parallel MQ$$

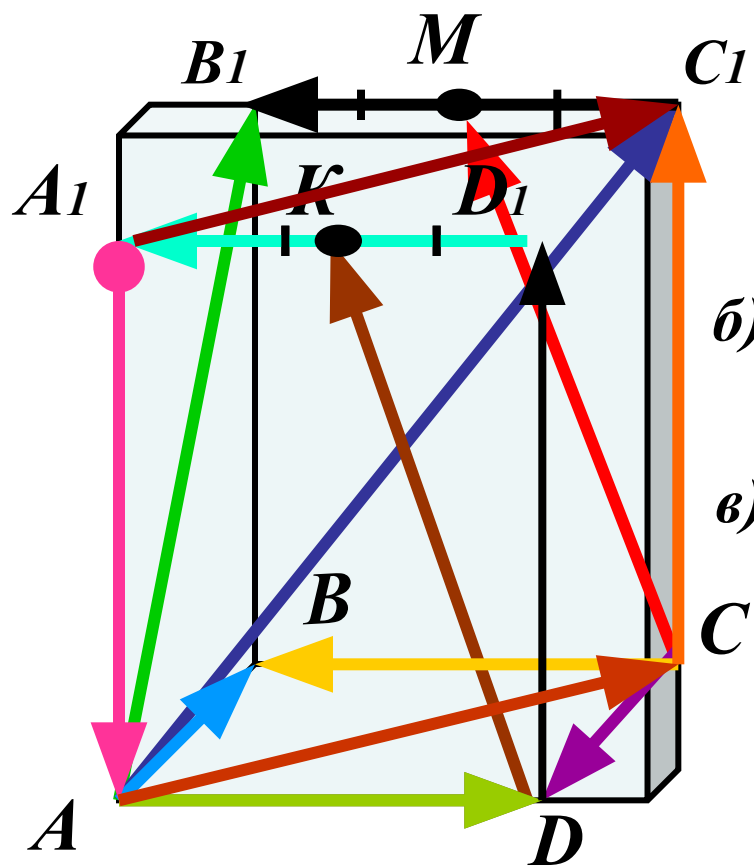
$$MN \parallel PQ$$

***MNPQ-
квадрат***



Решение задач

№ 326 (а, б, в)



Назовите вектор, который получится, если отложить:

а) от точки C вектор, равный $\overrightarrow{DD_1}$

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{DD_1}$$

б) от точки D вектор, равный $\overrightarrow{CM}$

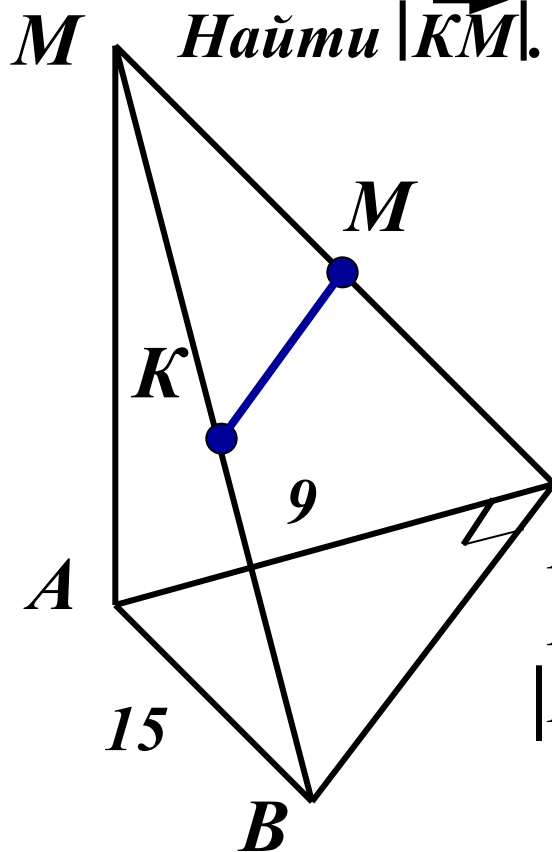
$$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CM}$$

в) от точки A_1 вектор, равный $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC}$$

Самостоятельная работа

Дан тетраэдр $MAVC$, угол ACB прямой. Точки K и P середины сторон MB и MC , $|\vec{AC}| = 9$ см и $|\vec{BA}| = 15$ см.
Найти $|\vec{KM}|$.



Решение:

Треугольник ABC , угол ACB - прямой.

По теореме Пифагора

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{225 - 81} = 12$$

KM – средняя линия треугольника MBC ,

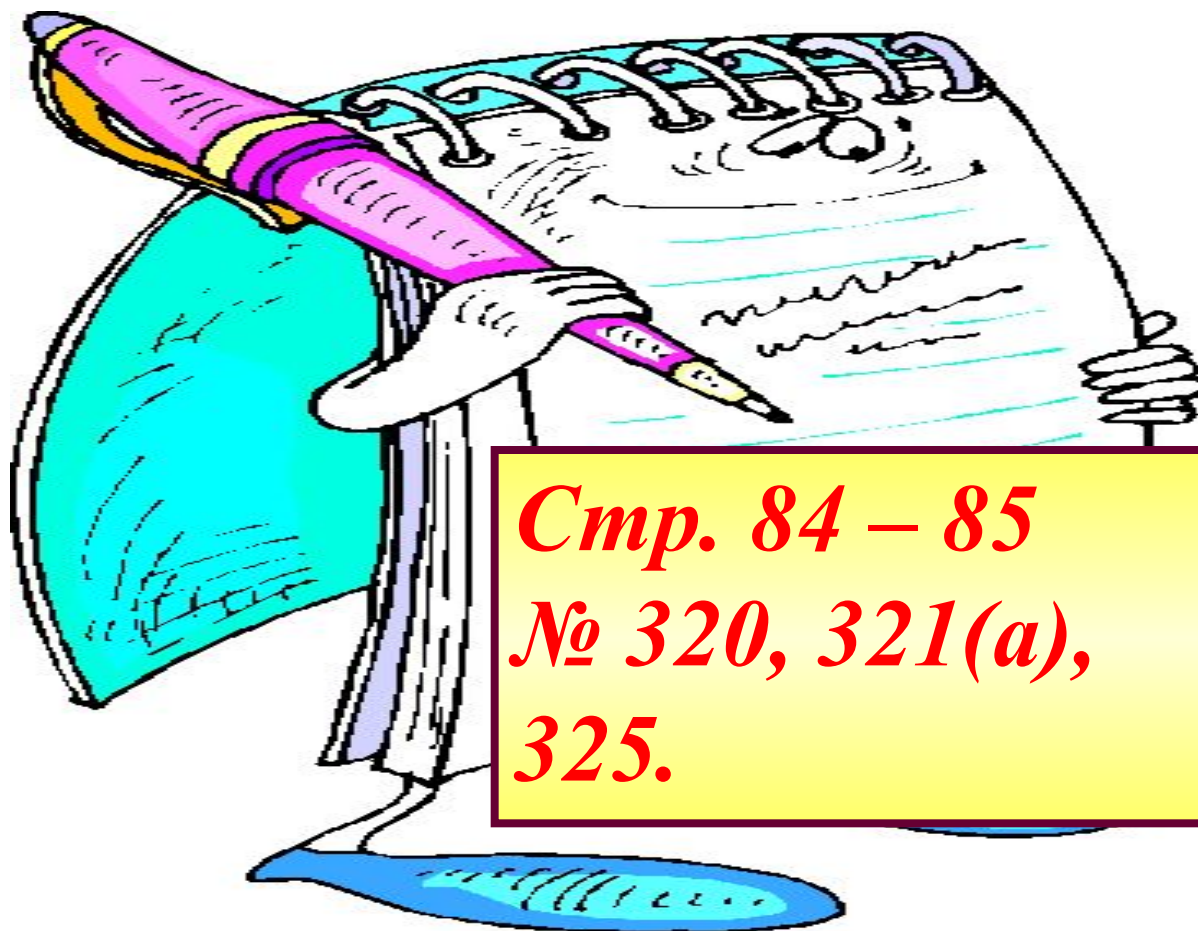
$$KM = 0,5BC = 6 \text{ см.}$$

$$|\vec{KM}| = 6 \text{ см.}$$

Кроссворд



Домашнее задание



*Стр. 84 – 85
№ 320, 321(а),
325.*