Математик
а

Решение неравенств. Подготовка к ЕГЭ.

«Метод решения хорош,
Если с самого начала
мы можем предвидеть –
И впоследствии подтвердить,
Что, следуя этому методу,
Мы достигнем цели.»

Лейбниц

Решить неравенство: $x \cdot \log_5\left(3 + x - x^2\right) \geq 0.$

Решение:

1)Определим ОДЗ:

$3+x-x^2>0,$

$x^2-x-3<0,$

$f(x)=x^2-x-3,$

$x^2-x-3=0,$

$$x_1=\frac{1-\sqrt{13}}{2},$$

$$x_2=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

$$\frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$3<\sqrt{13}<4 \qquad -4<-\sqrt{13}<-3$$

$$4<1+\sqrt{13}<5 \qquad -3<1-\sqrt{13}<-2$$

$$2<\frac{1+\sqrt{13}}{2}<2{,}5 \qquad -1{,}5<\frac{1-\sqrt{13}}{2}<-1$$

2)Упрощаем неравенство, используя метод рационализации, в котором $\log_n f \to (n-1)(f-1)$

$x(5-1)(3+x-x^2-1)\geq 0,$

$4x(-x^2+x+2)\geq 0 \quad \Big| \cdot(-0{,}25)$

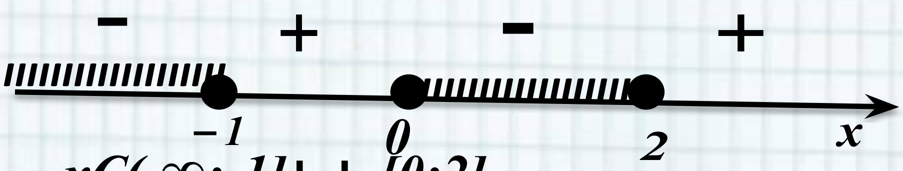
$x(x^2-x-2)\leq 0$

$x(x-2)(x+1)\leq 0,$

f(x)= x(x-2)(x+1),

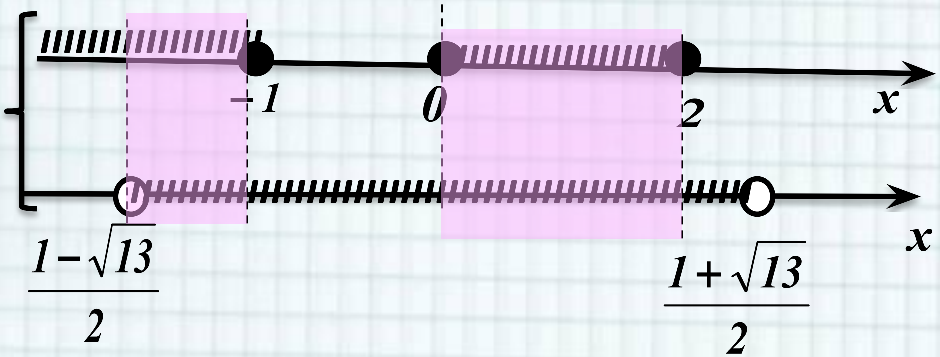
x(x-2)(x+1)=0,

x=0 или x=2 или x=-1



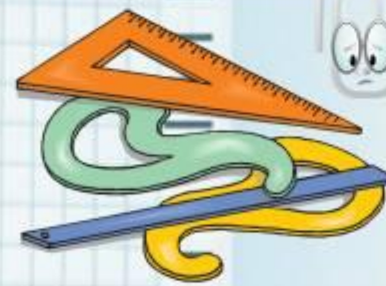
*x*Є(-∞;-1] ∪ [0;2]

Пересечение с ОДЗ дает решение



$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2} ;-1 \right] \cup [0;2]$$

<u>*Ответ*</u> : $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2} ;-1 \right] \cup [0;2]$



Самостоятельно
Решить неравенство:

$$(5x-13)\log_{2x-5}(x^2-6x+10)\geq 0$$

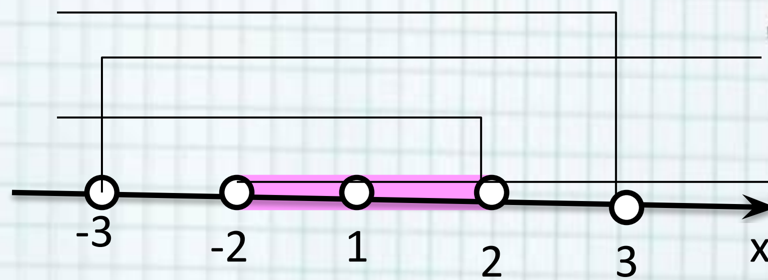
Решение:

Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0$

Решение.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2-x>0,\\ 2-x\ne 1,\\ x+2>0,\\ x+3>0,\\ x+3\ne 1,\\ 3-x>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2,\\ x\ne 1,\\ x>-2,\\ x>-3,\\ x\ne -2,\\ x<3\end{cases}$$



$x\in(-2;1)\cup(1;2).$

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0$$

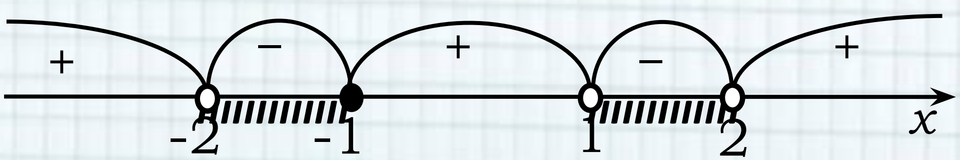
$(2-x-1)(x+2-1)(x+3-1)(3-x-1)\le 0,$

$(1-x)(x+1)(x+2)(2-x)\le 0,$

$(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)\le 0,$

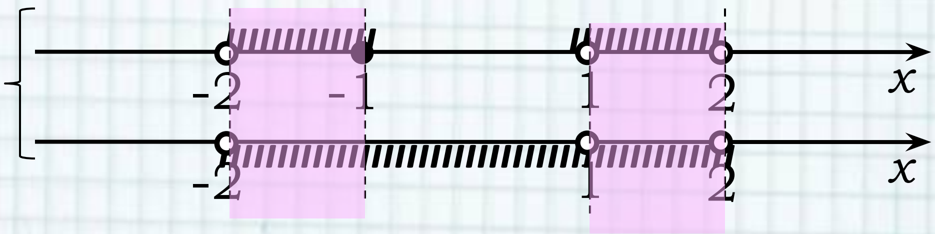
$$\begin{cases} x\ne -2,\\ x=-1,\\ x\ne 1,\\ x\ne 2\end{cases}$$

Получаем следующие точки на числовой оси:



$$x\in(-2;-1]\cup(1;2)$$

С учетом ОДЗ , имеем



$x \in (-2;\ -1] \cup (1;\ 2).$

Ответ : $\boldsymbol{(-2; -1] \cup (1; 2).}$

Решить неравенство: $\dfrac{\log_3(9x)\cdot\log_4(64x)}{5x^2-|x|}\le 0.$

<u>Решение.</u>

Найдем ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ 5x^2-|x|\ne 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0, \\ 5x^2-x\ne 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0, \\ x(5x-1)\ne 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x\ne \dfrac{1}{5}. \end{cases}$

$x\in(0;0{,}2)\cup(0{,}2;+\infty)$

Воспользуемся методом рационализации, в котором

$\log_a f \vee 0 \underset{f>0}{\overset{a>0,\,a\ne 0}{\Leftrightarrow}} (a-1)(f-1)\vee 0$ при $x>0$ $\quad |x|=x,$

$\dfrac{\log_3(9x)\cdot\log_4(64x)}{5x^2-x}\le 0;\qquad \dfrac{\log_3(9x)\cdot\log_4(64x)}{x(5x-1)}\le 0;$

$$\frac{(3-1)(9x-1)(4-1)(64x-1)}{x(5x-1)}\le 0;$$

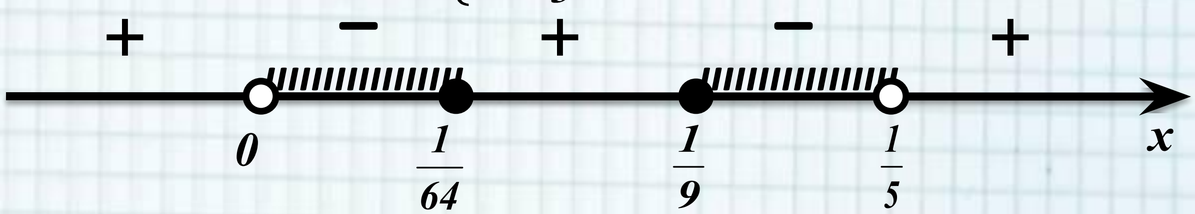
$\dfrac{6\cdot(9x-1)(64x-1)}{x(5x-1)}\le 0\,\Big|\cdot\dfrac{1}{6};$ **имеем:** $\dfrac{(9x-1)(64x-1)}{x(5x-1)}\le 0;$

$$\frac{9\cdot\left(x-\frac{1}{9}\right)\left(x-\frac{1}{64}\right)\cdot 64}{5x\left(x-\frac{1}{5}\right)}\le 0\ \Big|\cdot\frac{5}{9\cdot 64}$$

Получим: $$\frac{\left(x-\frac{1}{9}\right)\left(x-\frac{1}{64}\right)}{x\left(x-\frac{1}{5}\right)}\le 0;$$

Получаем следующие точки на числовой оси:

$$\begin{cases} x\ne 0\\ x=\frac{1}{64}\\ x=\frac{1}{9}\\ x\ne\frac{1}{5}\end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{l} 0<x\le\frac{1}{64}\\ \frac{1}{9}\le x<\frac{1}{5}\end{array}\right.$$

Пересечение с ОДЗ дает решение

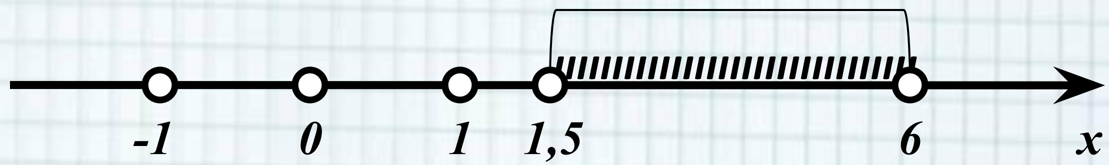
$$x\in\left(0;\frac{1}{64}\right]\cup\left[\frac{1}{9};0{,}2\right).$$

<u>***Ответ :***</u> $\left(0;\frac{1}{64}\right]\cup\left[\frac{1}{9};0{,}2\right).$

Решить неравенство: $\log_{|x|}\left(15x - 18 - 2x^2\right) \le 2.$

Решение:

1)Задаем ОДЗ: $\begin{cases} 15x - 18 - 2x^2 > 0 \\ x \ne 0 \\ |x| \ne 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 15x + 18 < 0 \\ x \ne 0 \\ x \ne \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}5 < x < 6 \\ x \ne 0 \\ x \ne \pm 1 \end{cases}$



$x \in (1{,}5;6)$

$$\log_{|x|}\left(15x - 18 - 2x^2\right) - \log_{|x|}|x|^2 \le 0;$$

Так как $x \in (1{,}5;6)$,то $|x| = x$,

2) $$\log_x\left(15x - 18 - 2x^2\right) - \log_x x^2 \le 0;$$

Упрощаем неравенство, используя метод рационализации, при котором

$$\log_a f - \log_a g \vee 0 \overset{a>0,a\ne 0}{\underset{f>0,g>0}{\Leftrightarrow}} (a-1)(f-g) \vee 0$$

$$(x-1)(15x-18-2x^2-x^2) \le 0$$

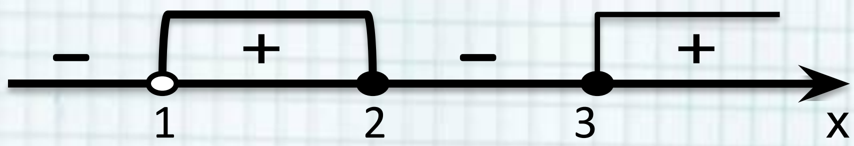
$(x-1)(15x-18-3x^2) \le 0 \quad \Big| \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$

$(x-1)(x^2-5x+6) \ge 0,$

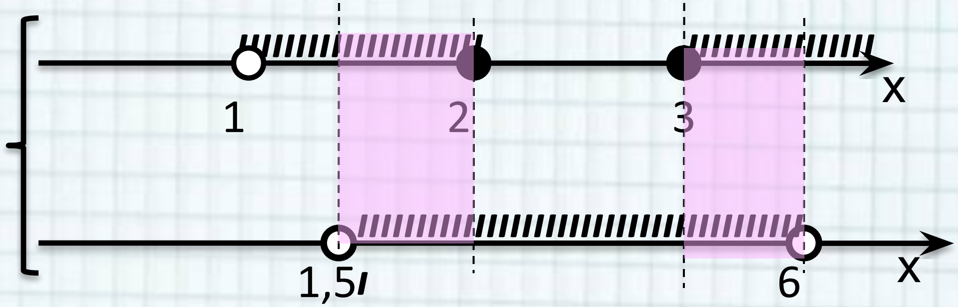
$(x-1)(x-2)(x-3) \ge 0.$

$\begin{cases} x \ne 1, \\ x = 2, \\ x = 3 \end{cases}$

Получаем точки, делящие числовую ось:



Пересечение с ОДЗ дает решение данного неравенства



$x \in (1,5;2] \cup [3;6);$

<u>Ответ:</u> *(1,5;2] ∪ [3;6).*

Решить неравенство:

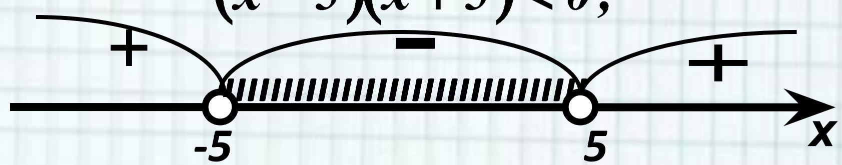
$$\log_5^2\left(25-x^2\right)-3\log_5\left(25-x^2\right)+2\geq 0.$$

Решение:

1) .Найдем ОДЗ: $25-x^2>0;$

$$x^2-25<0;$$

$$\left(x-5\right)\left(x+5\right)<0;$$



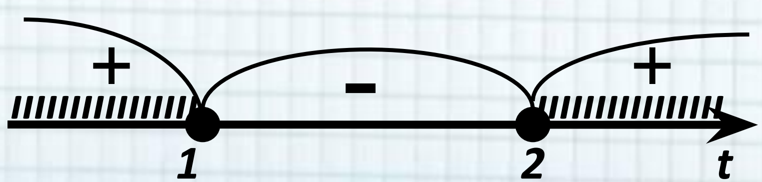
$x\in(-5;5)$

2).Делаем замену $\log_5\left(25-x^2\right)=t,$ получим $t^2-3t+2\geq 0$

$$t^2-3t+2=0$$

$$t_1=1;t_2=2$$

$$\left(t-1\right)\left(t-2\right)\geq 0$$

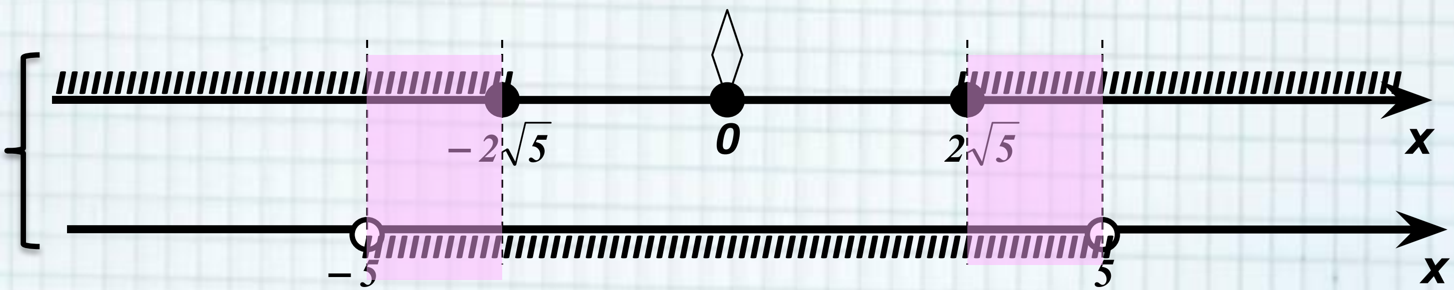


Переходя к x, имеем:

$$\left[\begin{array}{l} t \le 1 \\ t \ge 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5\left(25 - x^2\right) \le 1 \\ \log_5\left(25 - x^2\right) \ge 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5\left(25 - x^2\right) \le \log_5 5 \\ \log_5\left(25 - x^2\right) \ge \log_5 25 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} (5-1)\left(25 - x^2 - 5\right) \le 0 \\ (5-1)\left(25 - x^2 - 25\right) \ge 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 20 \ge 0 \\ x^2 \le 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(x - 2\sqrt{5}\right)\left(x + 2\sqrt{5}\right) \ge 0 \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Пересечение с ОДЗ дает решение



$$x \in (-5; -2\sqrt{5}\,] \cup \{0\} \cup [\,2\sqrt{5}; 5).$$

Ответ: $(-5; -2\sqrt{5}\,] \cup \{0\} \cup [\,2\sqrt{5}; 5).$

Решить неравенство:

$$\frac{\left(5^{x}-125\right)\left(\log_{x-1}x-\log_{x-1}3\right)}{\left(\sqrt{x^{2}+2x}-\sqrt{x^{2}+10}\right)\left(|x-8|-|x|\right)}\geq 0.$$

Решение:

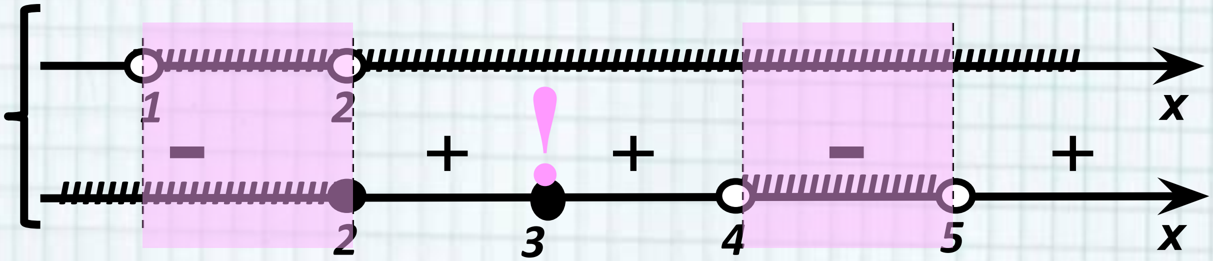
$$\frac{\left(5^{x}-5^{3}\right)\left(\log_{x-1}x-\log_{x-1}3\right)}{\left(\sqrt{x^{2}+2x}-\sqrt{x^{2}+10}\right)\left(|x-8|-|x|\right)}\geq 0.$$

Упрощаем неравенство, используя метод рационализации

$$\begin{cases} x>0, \\ x-1>0, \\ x-1\neq 1, \\ \dfrac{(x-3)(x-1-1)(x-3)}{\left(\left(x^{2}+2x\right)-\left(x^{2}+10\right)\right)\left((x-8)^{2}-x^{2}\right)}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x>1; \\ x\neq 2; \\ \dfrac{(x-3)^{2}(x-2)}{\left(x^{2}+2x-x^{2}-10\right)(x-8-x)(x-8+x)}\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1; \\ x\neq 2; \\ \dfrac{(x-3)^{2}(x-2)}{2\cdot(-8)(x-5)(x-4)}\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1; \\ x \neq 2; \\ \dfrac{(x-3)^2(x-2)}{(x-5)(x-4)} \leq 0; \end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{l} 1 < x < 2 \\ x = 3 \\ 4 < x < 5 \end{array}\right.$$

<u>**Ответ:**</u> $(1;2) \cup \{3\} \cup (4;5)$.

Решить неравенство: $\log_{\log_x 2x}(5x-2) \geq 0.$

Решение:

1)Найдем ОДЗ

$$\begin{cases} 5x-2>0, \\ \log_x 2x>0, \\ \log_x 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{2}{5}, \\ x>0, \\ x\neq 1, \\ (x-1)(2x-1)>0, \\ (x-1)(2x-x)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0{,}4, \\ x\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<0{,}5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0{,}4<x<0{,}5 \\ x>1 \end{array}\right.$$

2)

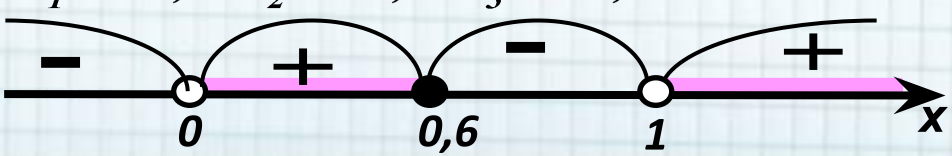
$$(\log_x 2x-1)(5x-2-1)\geq 0,$$

$$(x-1)(2x-x)(5x-3)\geq 0,$$

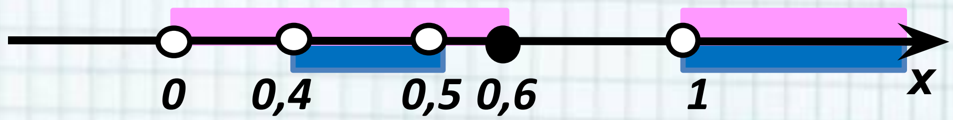
$$x(x-1)(5x-3)\geq 0,$$

$$f(x)=x(x-1)(5x-3),$$

$$x_1=0, \quad x_2=1, \quad x_3=0{,}6$$



Пересечение с ОДЗ дает решение



$$x \in (0,4;0,5) \cup (1;+\infty)$$

<u>*Ответ :*</u> $(0,4;0,5) \cup (1;+\infty)$

Решить неравенство:

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2+x-1\right)\geq \log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x-6-3x^2\right),$$

<u>**Решение.**</u>

1)Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x^2+x-1>0, \\ 11x-6-3x^2>0, \\ \dfrac{3x-1}{x+2}>0, \\ \dfrac{3x-1}{x+2}\neq 1. \end{cases}$$

Решим по отдельности каждое неравенство

а) $2x^2+x-1>0$,

$f(x)=2x^2+x-1$,

$2x^2+x-1=0$

$x_1=-1,\ x_2=0{,}5$

$$\left[\begin{array}{l} x>0{,}5 \\ x<-1 \end{array}\right.$$

б) $11x-6-3x^2>0$,

$f(x)=11x-6-3x^2$,

$11x-6-3x^2=0$,

$x_1=-1,\ x_2=-\dfrac{1}{3}$

$$\left[\begin{array}{l} x>-\dfrac{1}{3} \\ x<-1 \end{array}\right.$$

в) $\dfrac{3x-1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x+2) > 0,$

$f(x) = (3x-1)(x+2),$

$(3x-1)(x+2) = 0,$

$x_1 = -\dfrac{1}{3};\ x_2 = -2$

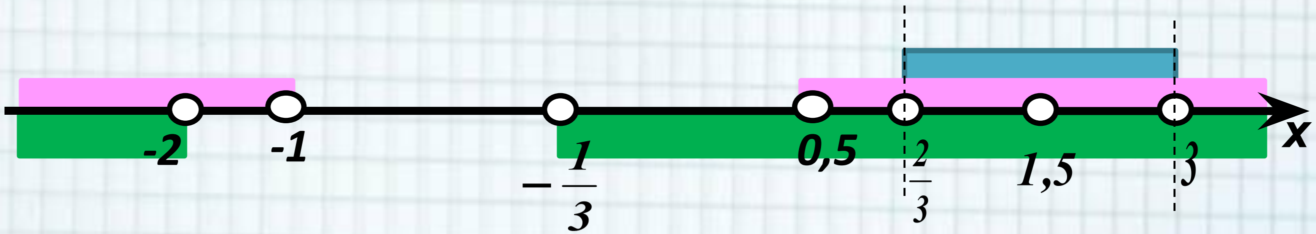
$$\left[\begin{array}{l} x > -\dfrac{1}{3} \\ x < -2 \end{array}\right.$$

г) $\dfrac{3x-1}{x+2} \neq 1,$

$3x-1 \neq x+2,$

$2x \neq 3,$

$x \neq 1{,}5$



$$x \in \left(\frac{2}{3}; 1{,}5\right) \cup (1{,}5; 3).$$

4)Возвращаемся к исходному неравенству и воспользуемся методом рационализации: $\log_n f - \log_n g \to (n-1)(f-g)$

На заданном ОДЗ можем записать

$$\left(\frac{3x-1}{x+2} - 1\right)\left(2x^2 + x - 1 - 11x + 6 + 3x^2\right) \geq 0,$$

$$\left(\frac{3x-1}{x+2}-1\right)\left(2x^2+x-1-11x+6+3x^2\right)\ge 0,$$

$$\frac{3x-1-x-2}{x+2}\left(5x^2-10x+5\right)\ge 0,$$

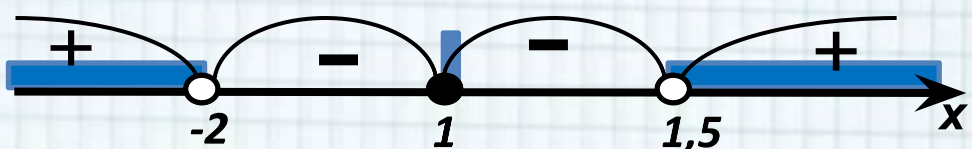
$$\frac{2x-3}{x+2}\left(5x^2-10x+5\right)\ge 0 \;\Big|\cdot\frac{1}{5}$$

$$\frac{2x-3}{x+2}\left(x^2-2x+1\right)\ge 0,$$

$$\frac{2x-3}{x+2}(x-1)^2\ge 0,$$

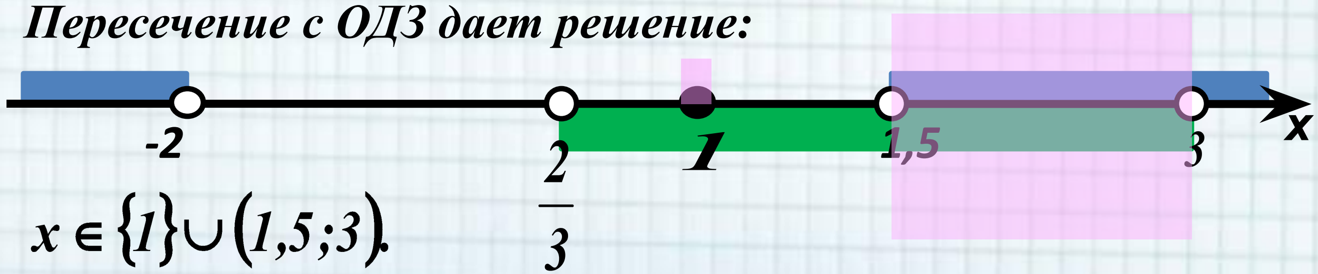
Получаем следующие точки на числовой оси:

$$\begin{cases} x\ne -2,\\ x\ne 1{,}5,\\ x=1 \end{cases}$$



$$x\in(-\infty;-2)\cup\{1\}\cup(1{,}5;+\infty)$$

Пересечение с ОДЗ дает решение:



$$x\in\{1\}\cup(1{,}5;3).$$

Ответ $:\{1\}\cup(1{,}5;3).$

Используемые материалы

1.ЕГЭ 2018. Математика. Профильный уровень. Под ред. И.В. Ященко.− 36вариантов. Издательство «Национальное образование»

2.http://mathege.ru/or/ege/Main.html − Материалы открытого банка заданий по математике

источник шаблона:

Фокина Лидия Петровна
учитель начальных классов
МКОУ «СОШ ст. Евсино»
Искитимского района
Новосибирской области

СПАСИБО АВТОРАМ ФОНОВ И КАРТИНОК