ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»

СПбГАСУ

1832

Кафедра Теплогазоснабжения и вентиляции

ТЕПЛОМАССООБМЕН

Курс лекций

Кафедра Теплогазоснабжения и вентиляции

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Тепломассообмен – необратимый самопроизвольный процесс распространения в пространстве теплоты или массы одного из компонентов вещества относительно другого.

Существуют три механизма передачи теплоты - **«простой»** теплообмен:

- теплопроводность (Т) или кондукция,

- конвекцию (К),

-тепловое излучение (Л) или радиация.

Теплопроводность характерна для твердых тел, конвекция – для жидких и газообразных, излучение – для поверхностей, разделенных лучепрозрачной средой. Если в теплообмене участвует более чем одна составляющая, то такой теплообмен называется **«сложным»**, например, теплопроводность и конвекция; конвекция и излучение; теплопроводность, конвекция и излучение.

Перенос массы происходит следующими способами:

- **диффузией**,
- **конвекцией**.

В реальных процессах процессы теплообмена и массообмена обычно сопутствуют друг другу. Теплопроводность и конвекция всегда связаны с переносом массы примеси (диффузией), т.е. имеет место сложный тепломассообмен.

Значительный вклад в создание и развитие теоретических и практических основ тепломассообмена внесли такие известные Российские ученые как М. В. Кирпичев, М.А. Михеев, А.А. Гухман, А.В. Лыков, Г.М. Кондратьев, С.С. Кутателадзе, С.Н. Шорин, Л.С. Эйгенсон, В.Н. Богословский и др. Благодаря их трудам сформировалась отечественная школа тепломассообмена.

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕДАЧИ ТЕПЛОТЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

Теплопроводность – молекулярный перенос, обусловленный неоднородностью распределения температуры в пространстве. В механизме любого процесса теплообмена выделяют «переносимое» и «носитель». Тогда **теплопроводность –** *процесс переноса теплоты путем непосредственного соприкосновения между частицами тела, имеющими различную температуру, и протекает на элементарном уровне.* Механизм теплопроводности зависит от природы вещества и его физического состояния :

- *в твердых телах (диэлектриках)* – за счет упругих колебаний кристаллических решеток (упругих волн);
- *в твердых телах (электрических проводниках)* – основным «носителем» тепловой энергии являются свободные электроны, а роль упругих колебаний кристаллических решеток - второстепенна;
- *в жидкостях* – за счет упругих колебаний молекул около равновесного состояния;
- *в газах* – за счет обмена энергией путем диффузии при соударении между элементарными частицами (молекулами, атомами) вещества.

Теплопроводность протекает на уровне элементарных частиц и зависит от неравномерности распределения температур в теле. В «чистом» виде теплопроводность имеет место в твердых телах.

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ

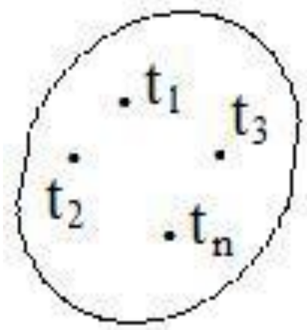
В общем случае процесс передачи теплоты теплопроводностью сопровождается изменением температуры в пространстве и во времени. Для описания пространственно-временного распределения температуры вводится понятие ***температурного поля***. ***Температурным полем*** называется совокупность *мгновенных* значений температур во всех точках рассматриваемого объема. Общий вид температурного поля в декартовой системе координат: $t = f_1(x, y, z, \tau)$

в цилиндрических координатах: $t = f_2(r, \varphi, z, \tau)$

- в сферических координатах:

$$t = f_3(r, \varphi, \psi, \tau)$$

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ



- в векторной форме:

$$t = f_4(\bar{r}, \tau)$$

Температурное поле в таком виде называется *трехмерным нестационарным.* Если температурное поле не изменяется во времени, то оно называется *трехмерным стационарным*:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \ ; \ t = f_1(x, y, z)$$

Если $\dfrac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ и $\dfrac{\partial t}{\partial z} = 0$, то получаем двумерное уравнение: $t = f_1(x, y)$

Наиболее простым случаем является *одномерное (линейное) стационарное температурное поле* $t = f_1(x)$ при условии: $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ и $\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial t}{\partial y} = 0$

Температура является скалярной величиной, таким образом, температурное поле – есть скалярное поле.

Непрерывное поле – такое поле, в котором бесконечно малому приращению координат соответствует бесконечно малое приращение температуры, т.е. производные будут конечны.

Разрывное поле - поле, в котором бесконечно малому приращению координат соответствует конечное приращение температуры.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Градиент поля – вектор, определенный в каждой точке поля, имеющий направление нормали к поверхности уровня в сторону возрастания величины и численно равный частной производной по нормали $\frac{\partial U}{\partial n}$

Градиент поля обозначается – *grad U* или ∇ (набла, оператор Гамильтона).

$$gradU = \vec{n}_0 \frac{\partial U}{\partial n}$$

$\vec{n}_0$ - единичный вектор, перпендикулярный к поверхности уровня

$$gradU = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты декартовой системы координат (ортогональные единичные векторы, ориентированные в пространстве).

Модуль градиента:

$$\left|gradU\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$$

Правила вычисления градиента:

$$gradC = 0$$ (C=const)

$$grad(U_1 + U_2) = gradU_1 + gradU_2$$

$$grad(cU) = c \cdot gradU$$

$$grad(U_1 \cdot U_2) = U_1 \cdot gradU_2 + U_2 \cdot gradU_1$$

Дивергенция вектора V:

$$divV = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

В цилиндрических координатах:

$$divV = \frac{1}{r}\frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Правила вычисления дивергенции (U- скаляр, V-вектор):

$divC = 0$ (C=const)

$$div(V_1 + V_2) = divV_1 + divV_2$$

$$div(cV) = c \cdot divV$$

$$div(U \cdot V) = U \cdot divV + V \cdot divU$$

Оператор Лапласа обозначается – ∇^2 или Δ

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

В цилиндрических координатах:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Теорема Гаусса-Остроградского (переход от двойного интеграла к тройному):

$$\int_s V ds = \int_v divV dv$$

Скалярный поток вектора *V* через замкнутую поверхность *s* равен интегралу от *divV,* распространенному по объему *v*, заключенному внутри поверхности *s*.

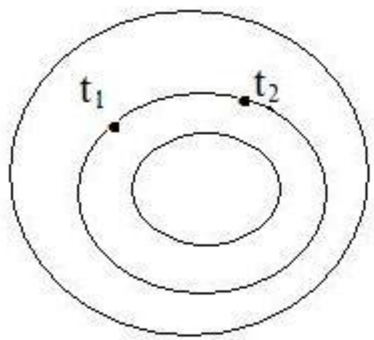
Всегда найдется такая вторая точка, в которой температура будет равна начальной $t_1 = t_2$, далее будет третья точка - $t_1 = t_2 = t_3$ и т.д. В конечном итоге можно получить некоторую замкнутую кривую, в которой $t = const$.

Совокупность точек пространства, имеющих одинаковую температуру, образуют изотермическую поверхность. Изотермические поверхности в пространстве не пересекаются, поскольку одна и та же точка не может иметь в данный момент разные температуры.

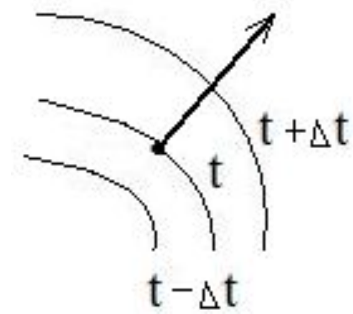
Изменение температуры наблюдается только в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. Максимальное изменение температуры имеет место в направлении нормали к изотермическим поверхностям.

Градиент температуры - вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры: $grad t = \vec{n}\frac{\partial t}{\partial n}$ К/м, (град/м)

Изотермические поверхности



Градиент температуры



Нетрудно видеть, что во всех направлениях, отличных от нормали, *grad t* будет меньше. Например, проекция вектора *grad t* на ось координат *x*:

$$(gradt)_x = \frac{\partial t}{\partial n} \cdot \cos(n \wedge x) = \frac{\partial t}{\partial x}$$

ТЕПЛОВОЙ ПОТОК

В любом теле при отсутствии полного теплового равновесия возникает тепловой поток. Для математического описания вводится вектор *теплового потока* в соответствии с гипотезой Фурье: количество теплоты, проходящее через элемент изотермической поверхности *dF* за промежуток времени *dτ*, пропорционально температурному градиенту:

$$dQ = -\lambda \cdot grad t \cdot dF \cdot d\tau$$, Дж

λ – *коэффициент теплопроводности*, Вт/м·К.

ПЛОТНОСТЬ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА:

$$q = -\lambda \cdot grad t$$ Вт/м^2

Коэффициент теплопроводности

Коэффициент теплопроводности λ - физическая характеристика данного вещества, которая показывает интенсивность переноса теплоты через данное вещество, т.е. *представляет собой плотность теплового потока при grad t=1К/м.*

Коэффициент теплопроводности зависит от следующих факторов:

1. *Физических свойств вещества.* Максимальное значение имеют металлы (электрические проводники) - λ>35Вт/(м·К); минимальное – газы, например, воздух: $\lambda \approx$ 0,03Вт/(м·К)
2. *Плотности данного материала*, которая зависит от его пористости, т.е. наличия воздушных включений (приведенное ниже уравнение справедливо только для одного и того же материала):

$$\lambda_\rho \approx \lambda_{\rho_0} \frac{\rho}{\rho_0} \qquad \text{Вт/(м·К)}$$

Объясняется это тем, что в сухом состоянии поры вещества заполнены воздухом, имеющим минимальный коэффициент теплопроводности.

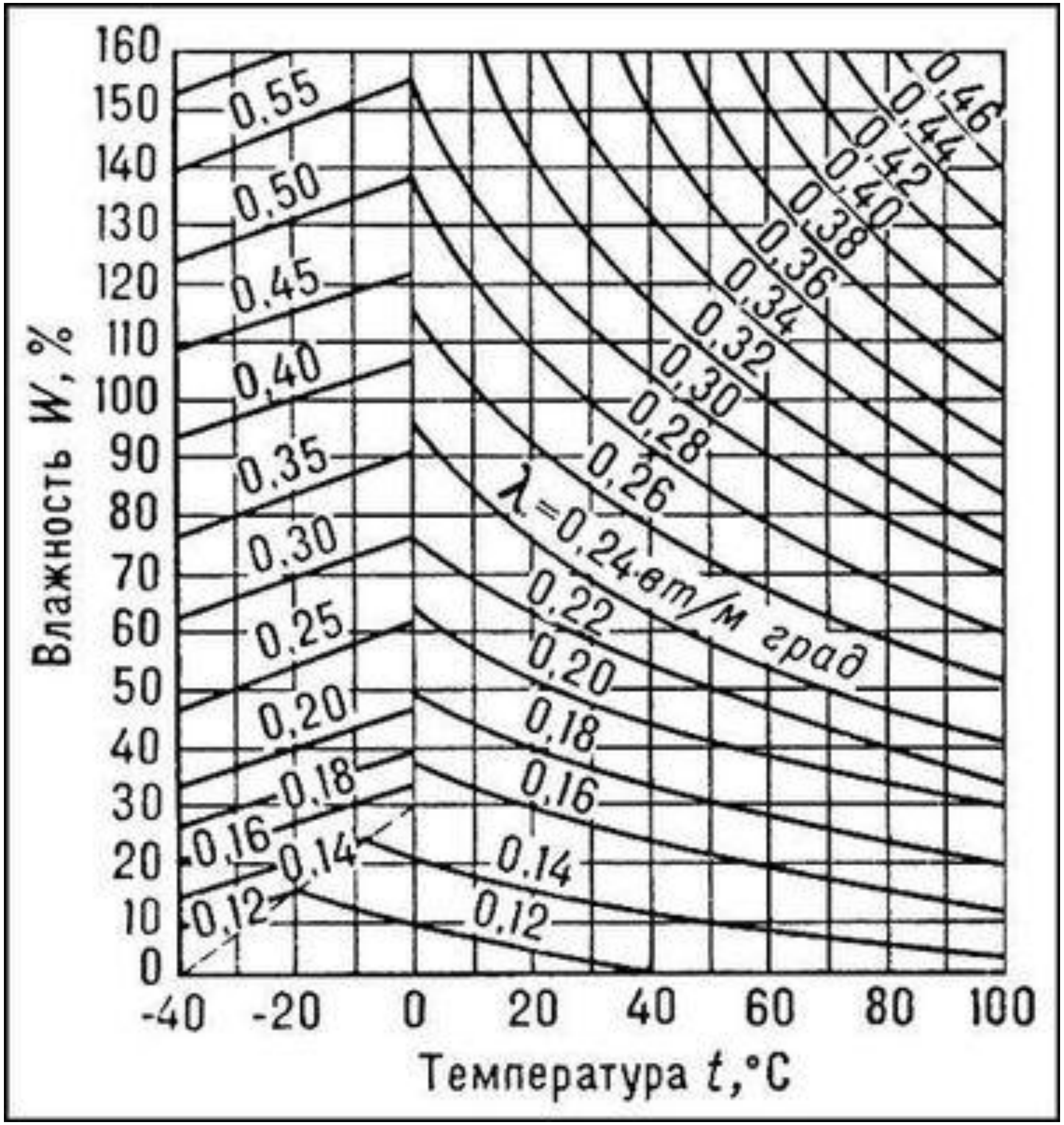
3. *Температуры тела*:

$$\lambda_t = \lambda_0 (1 + \beta \cdot t) \quad \text{Вт/(м}\cdot\text{К)}$$

где λ_0 - коэффициент теплопроводности материала при его температуре 0 °С.
β - коэффициент температурного расширения, $К^{-1}$.

Известно, что температурный коэффициент β имеет отрицательное значение для металлов и положительное для диэлектриков, т.е. с увеличением температуры коэффициент теплопроводности диэлектриков возрастает, а металлов – уменьшается. Для большинства строительных материалов коэффициент теплопроводности λ увеличивается с повышением температуры.

4. *Влажности материала,* с увеличением которой коэффициент теплопроводности растет за счет заполнения пор более теплопроводным, чем воздух, веществом – водой ($\lambda_{вода} \approx 20 \cdot \lambda_{воздух}$) и конвективного переноса теплоты, связанного с капиллярным движением воды внутри пористого материала. Зависимость λ от относительной влажности материала W обычно представляется в графической форме (рис.1.4).



Зависимость коэффициента теплопроводности древесины λ от температуры t и влажности W

5. *Структуры материала.* Это относится к материалам, имеющим неоднородное (анизотропное) строение по разным направлениям. Коэффициент теплопроводности зависит от направления вектора теплового потока относительно структуры материала. Характерным примером этого является древесина, имеющая волокнистую структуру с более плотными (и теплопроводными) волокнами. Для нее коэффициенты теплопроводности могут отличаться примерно в два раза (например, для сосны: поперек волокон $\lambda \leq 0.15$Вт/м·К, а вдоль – $\lambda \geq 0.3$Вт/м·К.

Уравнение теплопроводности

Наиболее последовательная и законченная теория, позволяющая аналитически определить коэффициент теплопроводности, создана для газов на основе молекулярной теории. Для строительных материалов коэффициент теплопроводности определяется экспериментальным путем и приводится в справочных таблицах.

Для вывода уравнения теплопроводности принимаются следующие *допущения*:

1. Теплопроводное тело является гомогенным.
2. Рассматривается изотропное тело.
3. Все теплофизические характеристики тела – величины постоянные и не зависят от температуры.
4. Интенсивность процесса теплообмена достаточно мала.

Пусть имеется тело произвольной формы с элементарным объемом dV. Внутри этого тела имеются источники теплоты мощностью W. Количество теплоты, затраченное на изменение внутренней энергии тела и передаваемое окружающей среде, определяется:

$$dQ_1 = W \cdot dV \cdot d\tau \qquad Q_1 = \int_V W \cdot dV \cdot d\tau$$

Количество теплоты, затраченное на изменение температуры:

$$dQ_2 = \rho \cdot c_P \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} dV \cdot d\tau$$

$$Q_2 = \int_V \rho \cdot c_P \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} dV \cdot d\tau$$

Количество теплоты, уходящее через поверхность:

$$Q_3 = \int_S - \lambda \cdot gradt \cdot d\tau \cdot dS$$

По теореме Гаусса-Остроградского:

$$Q_3 = -\int_V - \lambda \cdot div(gradt \cdot d\tau \cdot dV) = -\int_V \lambda \nabla^2 t \cdot d\tau \cdot dV$$

Исходя из уравнения:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

или с учетом

$$\int_V W \cdot dV \cdot d\tau = \int_V \rho \cdot c_P \frac{\partial t}{\partial \tau} dV \cdot d\tau - \int_V \lambda \nabla^2 t \cdot d\tau \cdot dV$$

получим:

$$W \cdot dV \cdot d\tau = \rho \cdot c_P \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} dV \cdot d\tau - \lambda \cdot \nabla^2 \cdot d\tau \cdot dV$$

и после сокращения на $\left(dV \cdot d\tau\right)$

$$W = \rho \cdot c_P \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} - \lambda \cdot \nabla^2 t$$

После преобразований

$$\rho \cdot c_P \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} = W + \lambda \cdot \nabla^2 t$$

Окончательно получим:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_P} \nabla^2 t + \frac{W}{\rho \cdot c_P}$$

Выражение $\dfrac{\lambda}{\rho \cdot c_P}$ называется коэффициентом температуропроводности

$$\frac{\lambda}{\rho \cdot c_P} = a$$

Коэффициент температуропроводности ***a*** [м^2/с] – физическая характеристика данного вещества, которая играет существенную роль при анализе нестационарных тепловых процессов, т.к. является мерой теплогенерирующих свойств тела, поскольку

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} \sim \boldsymbol{a}$$

Анализируя уравнение $\dfrac{\partial t}{\partial \tau} = \dfrac{\lambda}{\rho \cdot c_P} \nabla^2 t + \dfrac{W}{\rho \cdot c_P}$

можно сделать следующие выводы, что это уравнение:

– частных производных;
– II-го порядка;
– линейное, т.е. температура входит в 1-ой степени;
– параболического типа.

Частные случаи уравнения:

1. При W=0 получаем уравнение ***Фурье***:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t$$

2. Стационарный процесс – уравнение ***Пуассона***:

$$\lambda \cdot \nabla^2 t + W = 0$$

3. При $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ и W=0 – уравнение ***Лапласа:***

$$\nabla^2 t = 0$$

Из уравнения Фурье следует, что скорость распространения теплоты в теле бесконечно велика, т.е. что градиент температуры *gradt* и плотность теплового потока q для любого момента времени τ соответствуют друг другу.

Для высокоинтенсивных нестационарных процессов [4] это условие не соблюдается, т.е. скорость распространения теплоты конечна. При резком изменении теплового потока на поверхности тела вследствие тепловой инерции перестройка температурного поля и изменение градиента температуры могут запаздывать во времени по сравнению с условиями, когда распространение теплоты происходит при

$$U_P \to \infty$$

Время запаздывания называется временем релаксации. Связь между скоростью распространения теплоты и временем релаксации можно выразить следующим соотношением:

$$U_P \sim \sqrt{\frac{a}{\tau_P}}$$

где τ_P – время релаксации, т.е. равновесия между плотностью теплового потока (q) и *gradt*.

Из формулы следует, что время релаксации увеличивается с увеличением тепловой инерции тел и уменьшается с увеличением скорости распространения теплоты. В этом случае обобщенное выражение для теплового потока будет иметь вид:

$$q = -\lambda \cdot gradt - \tau_P \frac{\partial q}{\partial \tau}$$

а уравнение Фурье соответственно примет вид уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \tau_P \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} = a \cdot \nabla^2 t$$

Условия однозначности – условия, которые однозначно определяют конкретный тип задачи, включают в себя:

1). Геометрические условия, характеризующие форму и размер тела;

2). Физические условия, характеризующие свойства среды и тела;

3). Временные или начальные условия, характеризующие распределение температуры в начальный момент времени;

4). Граничные условия, которые необходимо задать по всей поверхности тела.

Граничные условия принято подразделять на ряд типов:

1). Граничные условия I-го рода – такие граничные условия, при которых в любой момент времени задается распределение температуры на поверхности тела:

$t_C = f(x, y, z, \tau)$ ***Частный случай –*** $t_C = const$

2). Граничные условия II -го рода – такие граничные условия, при которых в любой момент времени задается распределение теплового потока на поверхности тела:

$$q_C = f(x, y, z, \tau)$$

Частный случай – $q_C = const$

Такие условия теплообмена могут создаваться при нагревании тел высокотемпературными источниками теплоты, когда теплообмен происходит главным образом по закону Стефана-Больцмана, если при этом собственная температура тела существенно меньше температуры излучающей поверхности.

3). Граничные условия III -го рода – такие граничные условия, при которых в любой момент времени задается температура окружающей среды и закон теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. В случае нагрева (охлаждения):

$$q = \pm\alpha(T_{окр} - T_c)$$

где α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м2·К);

Tокр ,Tc – температура окружающей среды и поверхности (стенки) тела.

Коэффициент теплоотдачи характеризует интенсивность теплового воздействия среды заданной *Tокр* на поверхность тела. В нестационарных процессах температура окружающей среды в общем случае изменяется во времени. Уравнение выражает закон Ньютона. Плотность потока, подводимая (отводимая) за счет теплопроводности к (от) поверхности тела, определяется по закону Фурье. Таким образом, на основании закона сохранения энергии с учетом получаем:

$$-\lambda\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_C = \alpha(T_{окр} - T_c)$$

Уравнение является аналитическим выражением граничного условия III -го рода, которое широко применяется при аналитических исследованиях теплопроводности в твердых телах, обтекаемых потоками жидкости или газа на границе между телом и жидкостью.

В отличие от λ коэффициент теплоотдачи (теплообмена) не является физической постоянной, характерной для того или иного вещества. В общем случае он отражает совместное действие конвекции, теплопроводности и зависит от многих факторов, например геометрической формы и размеров тела, физических свойств обтекающего потока, направления и скорости потока, температурных условий.

Из граничных условий III -го рода можно получить граничные условия I и II -го рода.

$\frac{\alpha}{\lambda} \to \infty$ – граничные условия I -го рода,

$\alpha \to 0$ - граничные условия II -го рода.

4). Граничные условия сопряжения (IY -го рода) соответствуют теплообмену тела с окружающей средой (конвективный теплообмен тела с жидкостью) или теплообмену соприкасающихся твердых тел. Задаются они как условие равенства температуры и плотности теплового потока на поверхности двух соприкасающихся тел:

$T_{1C} = T_{2C}$ выражает условие непрерывности температурного поля

$\lambda_1 \left(\dfrac{\partial t_1}{\partial n} \right)_C = \lambda_2 \left(\dfrac{\partial t_2}{\partial n} \right)_C$ закон сохранения энергии на поверхности двух соприкасающихся тел (условия идеального теплового контакта).

Задачи с граничными условиями IY рода ставятся, например, при расчетах многослойных теплоизоляционных покрытий.

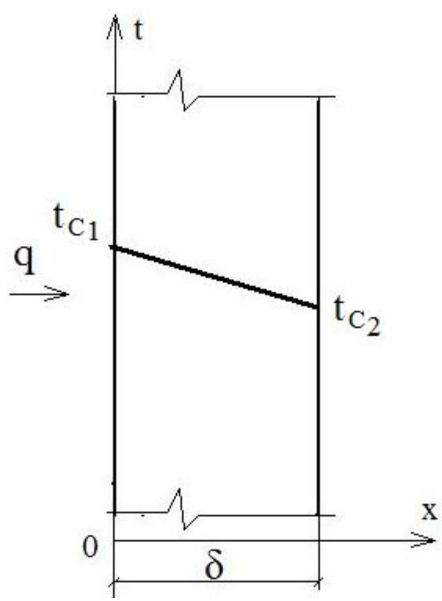
Теплопроводность при стационарном режиме

Теплопроводность однослойной и многослойной плоских стенок

Рассмотрим однородную и изотропную бесконечную стенку толщиной δ с постоянным коэффициентом теплопроводности λ.

Считаем, что на наружных поверхностях стенки поддерживаются постоянные температуры t_{c1} и t_{c2}

Все изотермические поверхности в толще ограждения – плоскости, параллельные друг другу и граничным поверхностям. Следовательно, температурное поле может рассматриваться как одномерное. Такие условия относятся к граничным условиям I-го рода. При этих условиях температура внутри стенки будет изменяться только в направлении, перпендикулярном поверхности стенки, т.е. в направлении оси Ох. Начало отсчета координат расположим на поверхности 1 (внутренней) как показано на рис.



Однородная плоская стенка

В направлении Oy и Oz температура будет неизменной:

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

Таким образом, температура внутри стенки будет функцией только одной координаты *x*, и дифференциальное уравнение теплопроводности будет иметь вид:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$$

Из уравнения следует, что:

$$\frac{dt}{dx} = const = C_1$$

Интегрируя уравнение, получаем:

$$\int dt = \int C_1 dx + C_2 \quad \text{или} \quad t = C_1 x + C_2$$

Откуда следует, что если коэффициент теплопроводности стенки – величина постоянная, то температура по толщине стенки должна изменяться по линейному закону. Для того, чтобы определить постоянные, воспользуемся граничными условиями:

$t = t_{C_1}$ при x=0

$t = t_{C_2}$ при x=δ

Тогда при первом граничном условии: $C_2 = t_{C_1}$

Из второго следует соответственно $t_{C_2} = C_1\delta + C_2$

и с учетом выражения для C_2

$$t_{C_2} = C_1\delta + t_{C_1}$$

Отсюда находим: $C_1 = \dfrac{t_{C_2} - t_{C_1}}{\delta}$ или $C_1 = -\dfrac{t_{C_1} - t_{C_2}}{\delta}$

Подставляя полученные выражения, находим закон распределения температуры в плоской стенке:

$$t = C_1 \cdot x + C_2 = t_{C_1} - (t_{C_1} - t_{C_2})\frac{x}{\delta}$$

Для определения плотности теплового потока применим закон Фурье:

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}$$

Т.к. $\frac{\partial t}{\partial x} = C_1$ получаем: $q = \lambda \frac{t_{C_1} - t_{C_2}}{\delta}$

Откуда можно сделать **вывод**: *количество теплоты, проходящее через единицу поверхности стенки в единицу времени, прямо пропорционально коэффициенту теплопроводности λ, разности температур на поверхностях* $\left(t_{C_1} - t_{C_2}\right)$ *стенки и обратно пропорционально толщине стенки δ.*

$\left(t_{C_1} - t_{C_2}\right) = \Delta t$ называется *температурным напором*.

$\frac{\lambda}{\delta}$ называется *тепловой проводимостью* стенки, Вт/(м2 К)

$\frac{\delta}{\lambda}$ называется *термическим сопротивлением* стенки, (м2 К)/Вт.

На практике часто применяют безразмерные величины

$\Delta t = t - t_{C_2}$ текущую избыточную температуру

максимальную избыточную температуру

$$\Delta t_0 = t_{C_1} - t_{C_2}$$

то можно перейти к *безразмерной избыточной температуре*:

$$\Theta = \frac{\Delta t}{\Delta t_0}$$

Используя безразмерную координату $\frac{x}{\delta} = \xi$

уравнение $\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$ можно представить следующим образом:

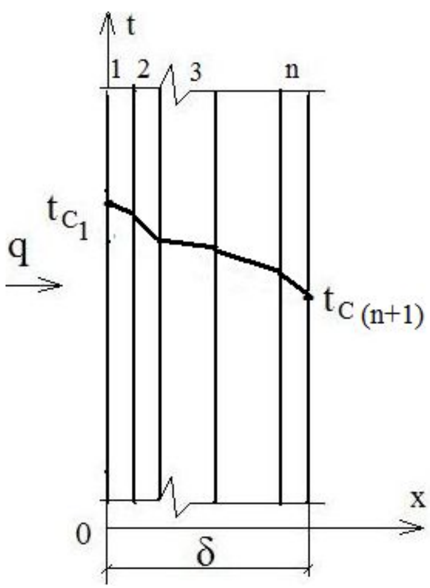
$$\frac{d^2 \Theta}{d\xi^2} = 0$$

а граничные условия соответственно в виде:

$$x=0 \quad \xi = 0 \quad \Theta = 1$$

$$x=\delta \quad \xi = 1 \quad \Theta = 0$$

Далее рассмотрим теплопроводность многослойной стенки, состоящей из n слоев (δ1, λ1; . δ2, λ2; δ3, λ3… δn, λn). При условии идеального контакта между слоями температура на соприкасающихся поверхностях одна и та же.



Многослойная плоская стенка

Тепловой поток через каждый слой

$$q_1 = \frac{\lambda_1}{\delta_1}\left(t_{C_1} - t_{C_2}\right)$$

$$q_2 = \frac{\lambda_2}{\delta_2}\left(t_{C_2} - t_{C_3}\right)$$

………………………

$$q_n = \frac{\lambda_n}{\delta_n}\left(t_{C_n} - t_{C_{(n+1)}}\right)$$

Исходя из закона сохранения энергии при стационарном режиме, через любую изотермическую поверхность многослойной стенки проходит одинаковый тепловой поток:

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n$$

после преобразований получаем:

$$\left(t_{C_1} - t_{C_2}\right) = q\frac{\delta_1}{\lambda_1}$$

$$\left(t_{C_2} - t_{C_3}\right) = q\frac{\delta_2}{\lambda_2}$$

……………………

$$\left(t_{Cn} - t_{C(n+1)}\right) = q\frac{\delta_n}{\lambda_n}$$

Сложив почленно левые и правые части уравнений, имеем:

$$\left(t_{C_1} - t_{C(n+1)}\right) = q\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}\right)$$

Отсюда можно найти плотность теплового потока в виде:

$$q = \frac{t_{C_1} - t_{C_{(n+1)}}}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\delta_n}{\lambda_n}} = \frac{t_{C_1} - t_{C(n+1)}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}$$

называется *суммарным внутренним термическим сопротивлением* многослойной стенки.

Температура на границе слоев определяется следующим образом:

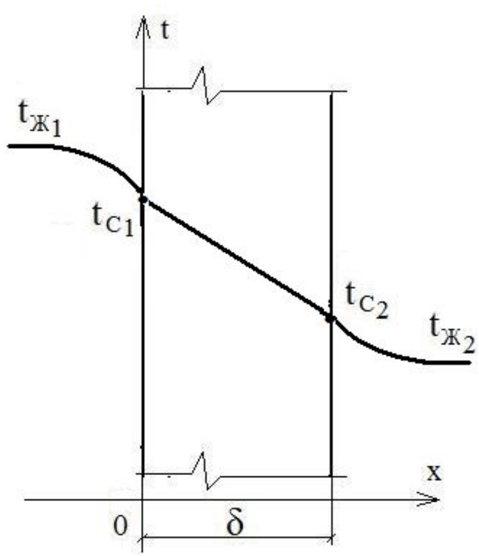
$$t_{C_2} = t_{C_1} - q\frac{\delta_1}{\lambda_1}$$

$$t_{C_3} = t_{C_1} - q\left(\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}\right)$$

……………………

$$t_{C_{(n+1)}} = t_{C_1} - q\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\lambda_i}$$

Для многослойной стенки температурная кривая представляет собой ломаную линию



Теплопередача через плоскую стенку

Переход теплоты из одной среды к другой через разделяющую их стенку называется *теплопередачей*. Теплопередача состоит из теплоотдачи от более горячей среды (жидкости) к стенке, теплопроводности в стенке и теплоотдачи от стенки к более холодной среде (жидкости).

Допустим, что имеется плоская стенка с толщиной δ. Считаем, что известны температуры окружающей среды

$$t_{Ж_1} \quad t_{Ж_2}$$

Коэффициент теплопроводности стенки λ. Предполагаем стационарный режим. Считаем также заданными коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2.

Такие условия называется граничными условиями третьего рода. Это позволяет рассматривать одномерную задачу: изменение температуры стенки и среды будет происходить только по нормали к стенке. Искомыми величинами будут: температуры на поверхности стенки и тепловой поток от горячей к холодной жидкости.

Исходя из закона Ньютона, плотность теплового потока от жидкости к стенке определяется уравнением:

$$q = \alpha_1 \left(t_{Ж_1} - t_{C_1}\right)$$

Плотность теплового потока через стенку:

$$q = \frac{\lambda}{\delta}\left(t_{C_1} - t_{C_2}\right)$$

Тот же поток передается от второй стенки к холодной жидкости посредством теплоотдачи:

$$q = \alpha_2 \left(t_{C_2} - t_{Ж_2} \right)$$

После преобразований:

$$t_{Ж_1} - t_{C_1} = \frac{q}{\alpha_1}$$

$$t_{C_1} - t_{C_2} = q \frac{\delta}{\lambda}$$

$$t_{C_2} - t_{Ж_2} = \frac{q}{\alpha_2}$$

Сложив почленно левые и правые части этих уравнений, получим следующее уравнение:

$$t_{Ж_1} - t_{Ж_2} = q\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right)$$

или

$$q = \frac{t_{Ж_1} - t_{Ж_2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

Обозначая знаменатель уравнения через k

$$k = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{\delta}{\lambda} + \dfrac{1}{\alpha_2}}$$

$$q = k(t_{ж_1} - t_{ж_2})$$

Величина k называется *коэффициентом теплопередачи, Вт/(м^{2}К)*. Этот коэффициент определяет интенсивность передачи теплоты от одной среды к другой с учетом разделяющей стенки.

Часто в расчетах используется понятие суммарного термического сопротивления теплопередачи. Это величина, обратная коэффициенту теплопередачи

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}$$

Для многослойной стенки с разными величинами толщины δ_i и коэффициента теплопроводности λ_i термическое сопротивление определяется:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}$$

Отсюда плотность теплового потока определяется по формуле

$$q = \frac{t_{ж_1} - t_{ж_2}}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\delta_i}{\lambda_i} + \dfrac{1}{\alpha_2}}$$

И, соответственно, тепловой поток можно найти следующим образом:

$$Q = q \cdot F = k \cdot \Delta t \cdot F$$

где F – площадь поверхности стенки, м^2.

Для исследования интенсификации процесса теплопередачи в теплообменниках проанализируем уравнение. Допустим заданы значения

$F \quad \Delta t$

Учитывая, что для металлических конструкций отношение $\dfrac{\delta}{\lambda}$ мало, коэффициент теплопередачи можно записать в виде:

$$k = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2}{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} + 1}$$

$\alpha_2 \to \infty \qquad k \to \alpha_1$

$\alpha_1 \to \infty \qquad k \to \alpha_2$

k не может быть меньше самого малого значения α

то увеличение α_2

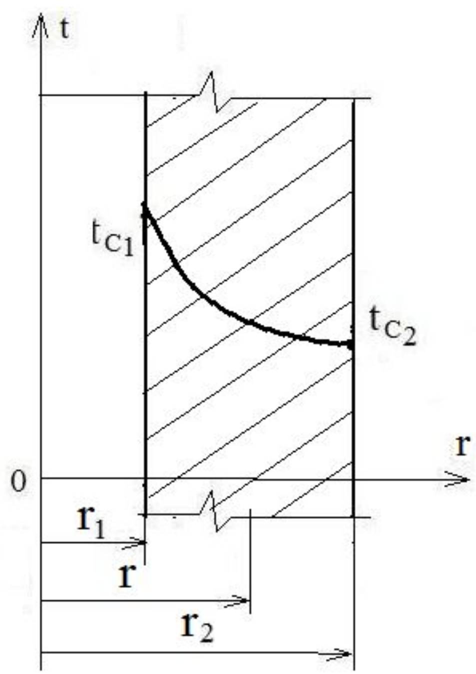
практически не сказывается на величине коэффициента теплопередачи. Отсюда следует вывод, что для повышения интенсивности теплопередачи в теплообменниках необходимо увеличивать площадь поверхности, например за счет оребрения.

Теплопроводность цилиндрических стенок

Рассмотрим стационарный процесс теплопроводности в цилиндрической стенке размерами: r_1– внутренний диаметр, r_2 – наружный диаметр. Считаем заданными температуры на поверхностях стенки

$$t_{C_1} \qquad t_{C_2}$$

т.е. заданы граничные условия первого рода. Примем постоянной величину коэффициента теплопроводности материала стенки λ. Необходимо определить распределение температур в этой стенке и тепловой поток.



Теплопроводность цилиндрической стенки

Уравнение теплопроводности для данной задачи записывается в цилиндрических координатах

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

Температура изменяется только в радиальном направлении, следовательно, температурное поле – одномерное:

$$\frac{\partial t}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$$

Т.к. труба симметрична, то и поле температур будет коаксиально-симметричным:

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = 0$$

Тогда уравнение запишем в виде:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dt}{dr} = 0$$

Граничные условия имеют вид:

$$r = r_1 \qquad t = t_{C_1}$$

$$r = r_2 \qquad t = t_{C_2}$$

Введем переменную $u = \dfrac{dt}{dr}$

$$\frac{d^2t}{dr^2} = \frac{du}{dr}; \frac{1}{r}\frac{dt}{dr} = \frac{u}{r}$$

Уравнение $\dfrac{d^2t}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dt}{dr} = 0$ примет вид: $\dfrac{du}{dr} + \dfrac{1}{r}u = 0$

Решая данное обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим:

$$\frac{du}{u} = -\frac{dr}{r} \qquad \int\frac{du}{u} = -\int\frac{1}{r} + C_1$$

$$\ln u = -\ln r + \ln C_1 \qquad \ln u \cdot r = \ln C_1 \qquad \ln u \cdot r = \ln C_1 \qquad u \cdot r = C_1$$

Учитывая $u = \frac{dt}{dr}$ получаем: $\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r} C_1$ или $dt = \frac{C_1 dr}{r}$

После интегрирования имеем уравнение логарифмической кривой:

$$t = \int C_1 \frac{dr}{r} + C_2 = C_1 \ln r + C_2$$

C_1 C_2 определяем из граничных условий. $r = r_1$ $t = t_{C_1}$

$$t_{C_1} = C_1 \ln r_1 + C_2$$

$r = r_2$ $t = t_{C_2}$ $t_{C_2} = C_1 \ln r_2 + C_2$

Решение этих уравнений дает выражения:

$$C_1 = \frac{t_{C_1} - t_{C_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \qquad C_2 = t_{C_1} - \left(t_{C_1} - t_{C_2}\right)\frac{\ln r_1}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

Подставляя в уравнение для t, получаем:

$$t = t_{C_1} - \left(t_{C_1} - t_{C_2}\right)\frac{\ln\dfrac{r}{r_1}}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}} = t_{C_1} - (t_{C_1} - t_{C_2})\frac{\ln\dfrac{d}{d_1}}{\ln\dfrac{d_2}{d_1}}$$

Подставим в закон Фурье значение градиента температуры:

$$Q = -\lambda\frac{dt}{dr}F = \frac{2\pi\lambda l(t_{C_1} - t_{C_2})}{\ln\dfrac{d_2}{d_1}}$$

Плотность теплового потока на внутренней поверхности имеет вид:

$$q_1 = \frac{Q}{F_1} = \frac{Q}{\pi d_1 l} = \frac{2\lambda(t_{C_1} - t_{C_2})}{d_1\ln\dfrac{d_2}{d_1}}$$

Соответственно для наружной поверхности

$$q_2 = \frac{Q}{F_2} = \frac{Q}{\pi d_2 l} = \frac{2\lambda(t_{C_1} - t_{C_2})}{d_2\ln\dfrac{d_2}{d_1}}$$

Иногда тепловой поток относят к единице длины:

$$q_l = \frac{Q}{l} = \frac{\pi(t_{C_1} - t_{C_2})}{\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1}}$$

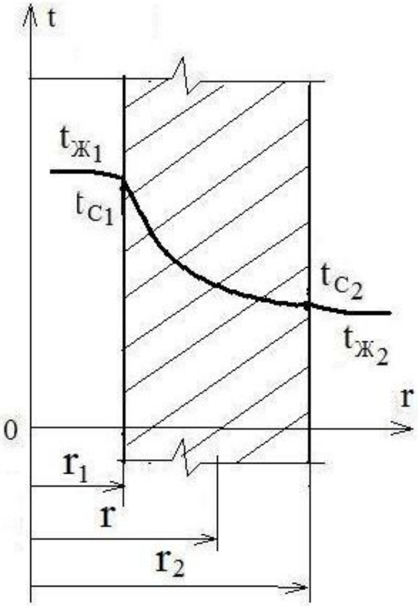
Величина q_l называется *линейной плотностью теплового потока*

Для случая многослойной цилиндрической стенки тепловой поток определяется по формуле:

$$Q = 2\pi \cdot l\,\frac{t_{C_1} - t_{C_2}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i}}$$

Рассмотрим граничные условия третьего рода. Пусть заданы температуры $t_{Ж_1}$ $t_{Ж_2}$ окружающей среды

Коэффициент теплопроводности стенки λ. Предполагаем стационарный режим. Считаем также заданными коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2. Считаем, что длина трубы значительно превышает толщину стенки. Тогда потерями теплоты на концах трубы можно пренебречь.



Теплопередача через цилиндрическую стенку

Искомыми величинами будут: температуры на поверхности стенки и тепловой поток от горячей к холодной жидкости. Т.к. количество теплоты, проходящее через стенку и отдаваемое холодной жидкости, одно и то же, то исходя из закона Ньютона, плотность теплового потока от жидкости к стенке определяется уравнением:

$$q_1 = \alpha_1 \cdot \pi d_1 \left(t_{Ж_1} - t_{C_1} \right)$$

Плотность теплового потока через стенку:

$$q_l = \frac{\pi}{\frac{1}{2\lambda}} \frac{t_{C_1} - t_{C_2}}{\ln \frac{d_2}{d_1}}$$

Тот же поток передается от второй стенки к холодной жидкости посредством теплоотдачи:

$$q_l = \alpha_2 \cdot \pi d_2 \left(t_{C_2} - t_{Ж_2}\right)$$

Или:

$$t_{Ж_1} - t_{C_1} = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_1 d_1}$$

$$t_{C_1} - t_{C_2} = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}$$

$$t_{C_2} - t_{Ж_2} = \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_2 d_2}$$

Суммируя уравнения, получим температурный напор:

$$t_{Ж_1} - t_{Ж_2} = \frac{q_l}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}\right)$$

Тогда:

$$q_l = \frac{\pi(t_{ж_1} - t_{ж_2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}$$

Введем величину *линейного коэффициента теплопередачи*:

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}$$

$$q_l = k_l \pi(t_{ж_1} - t_{ж_2})$$

Линейное термическое сопротивление теплопередачи определяется по формуле:

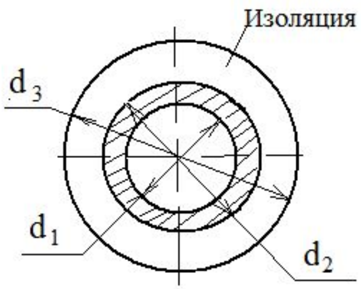
$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda}\ln\frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}$$

Для многослойной стенки с разными величинами толщины δ_i и коэффициента теплопроводности λ_i плотность теплового потока и линейное термическое сопротивление определяется:

$$q_l = \frac{\pi(t_{ж_1} - t_{ж_2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i}\ln\frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}$$

$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}$$

Для выбора рациональной толщины изоляции трубы рассмотрим влияние толщины изоляции на величину теплового потока.



Многослойная цилиндрическая стенка
(труба с тепловой изоляцией)

Запишем уравнение для трубы с изоляцией:

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3}$$

два первых члена постоянны $\frac{1}{\alpha_1 d_1}$ $\frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}$

Величина третьего члена $\frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2}$ увеличивается при увеличении d_3

а четвертый $\frac{1}{\alpha_2 d_3}$ Уменьшается при увеличении d_3

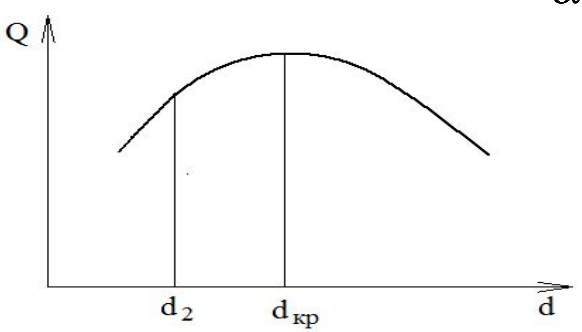
Исследуем R_l как функцию d_3, для чего возьмем производную R_l по d_3

и приравняем ее к нулю:

$$\frac{d(R_l)}{d(d_3)} = \frac{1}{d_3}\left(\frac{1}{2\lambda_2} - \frac{1}{\alpha_2 d_3}\right) = 0$$

$2\lambda_2 = \alpha_2 d_3$ и критический внешний диаметр трубы с изоляцией

соответствующий минимальному сопротивлению теплопередачи, определяется из выражения: $d_3^{кр} = \dfrac{2\lambda_2}{\alpha_2}$



Критическая толщина тепловой изоляции трубы

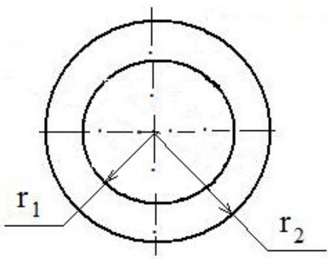
$d_3 = d_3^{кр}$ значение второй производной функции R_l по d_3

будет минимальным. Таким образом, для эффективной работы изоляции должно быть выполнено условие:

$$\frac{1}{\alpha_2 d_2} \le \frac{1}{2\lambda_2}\ln\frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3}$$

Теплопроводность тел сложной формы

Пусть имеется полый шар с радиусами r_1 r_2



постоянным коэффициентом теплопроводности λ

Теплопроводность полого шара

и с заданными температурами поверхностей t_{C_1} t_{C2} (граничные условия первого рода).

Поскольку в данном случае температура изменяется только в направлении радиуса шара, то уравнение теплопроводности запишем в сферических координатах с учетом осевой симметрии

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = \frac{\partial t}{\partial \psi} \quad : \quad \nabla^2 t = \frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dt}{dr} = 0$$

Граничные условия:

$$r = r_1 \quad t = t_{C_1} \qquad\qquad r = r_2 \quad t = t_{C2}$$

Обозначим $\dfrac{dt}{dr} = u$ тогда уравнение $\nabla^2 t = \dfrac{d^2 t}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dt}{dr} = 0$примет вид:

$$\frac{du}{dr} + \frac{2}{r}u = 0 \quad \text{или} \quad \frac{du}{dr} = -\frac{2}{r}u$$

Интегрируя, получаем:

$$\int \frac{du}{u} = -2\int \frac{dr}{r} + C_0 \quad \text{или} \quad \ln u = -2\ln r + C_0 \quad \text{или}$$

$$\ln u + \ln r^2 = C_0$$

Обозначим $C_0 = \ln C_1$ тогда $\ln(u \cdot r^2) = \ln C_1$ или $u \cdot r^2 = C_1$

Отсюда $u = \dfrac{C_1}{r^2}$ **или** $\dfrac{dt}{dr} = \dfrac{C_1}{r^2}$ Интегрируя второй раз, имеем:

$$\int dt = \int \frac{C_1 dr}{r^2} \pm C_2 \quad \textbf{\textit{или}} \quad t = C_1 \int \frac{dr}{r^2} + C_2 = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad \textbf{\textit{или}} \quad t = C_2 - \frac{C_1}{r}$$

Из граничных условий находим:

$$r = r_1 \qquad t = t_{C_1} \qquad t_{C_1} = C_2 - \frac{C_1}{r_1}$$

$$r = r_2 \qquad t = t_{C2} \qquad t_{C_2} = C_2 - \frac{C_1}{r_2}$$

Тогда постоянные интегрирования:

$$C_1 = -\frac{t_{C_1} - t_{C_2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \qquad C_2 = t_{C_1} - \frac{t_{C_1} - t_{C_2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \frac{1}{r_1}$$

Имея выражения для постоянных интегрирования, получаем гиперболическое уравнение для температурного напора в шаровой стенке:

$$t = t_{C_1} - \frac{t_{C_1} - t_{C_2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)$$

Используя закон Фурье, определим количество теплоты, проходящее через шаровую поверхность F в единицу времени:

$$Q = -\lambda \frac{dt}{dr} F = -\lambda \cdot 4\pi r^2 \frac{dt}{dr}$$

Подставляя в это уравнение значение градиента температуры, получаем:

$$Q = 4\pi\lambda (t_{C_1} - t_{C_2}) \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Для многослойной стенки:

$$Q = \frac{t_{C_1} - t_{C(n+1)}}{\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} \frac{r_{i+1} - r_i}{\lambda_i r_i r_{i+1}}}$$

При граничных условиях третьего рода кроме r_1 и r_2

известны температуры окружающей среды $t_{ж_1}$ $t_{ж_2}$

коэффициенты α_1 α_2

Причем все вышеуказанные величины являются постоянными. Поскольку процесс стационарный, то тепловой поток определим следующим образом, переходя от радиусов к соответствующим диаметрам:

$$Q = \alpha_1 \cdot \pi d_1^2 \left(t_{Ж_1} - t_{C_1}\right)$$

$$Q = \frac{2\pi\lambda}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} (t_{C_1} - t_{C_2})$$

$$Q = \alpha_2 \cdot \pi d_2^2 \left(t_{C_2} - t_{Ж_2}\right)$$

Отсюда следует, что тепловой поток:

$$Q = \frac{\pi(t_{Ж_1} - t_{Ж_2})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda}(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}} = k_ш \pi \Delta t$$

$k_ш$ *коэффициент теплопередачи шаровой стенки.*

$\frac{1}{k_ш} = R_ш$ *термическое сопротивление шаровой стенки:*

$$R_{ш} = \frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}$$

Анализируя выражение , можно сделать вывод, что, если значение

α мало, то термическое сопротивление можно уменьшить путем увеличения соответствующей поверхности

При использовании метода оребрения необходимо иметь в виду следующее правило:

$\alpha_1 << \alpha_2$ оребрять поверхность со стороны α_1 до достижения равенства

$\alpha_1 \cdot F_1 = \alpha_2 \cdot F_2$ Дальнейшее увеличение малоэффективно.

Ребра в поперечном сечении могут иметь разный профиль. Это может быть прямоугольник, треугольник, круг и т.д.

Рассмотрим задачу о теплопроводности в ребре постоянного поперечного сечения

Пусть f – площадь поперечного сечения ребра,

u - его периметр. Ребро (стержень) находится в среде с $t = const = t_{ж}$

коэффициент теплоотдачи от поверхности к среде $\alpha = const$

Принимаем, что размеры поперечного сечения стержня существенно меньше его длины, поэтому изменением температуры в поперечном сечении пренебрегаем и решаем одномерную задачу изменения температуры только вдоль оси стержня.

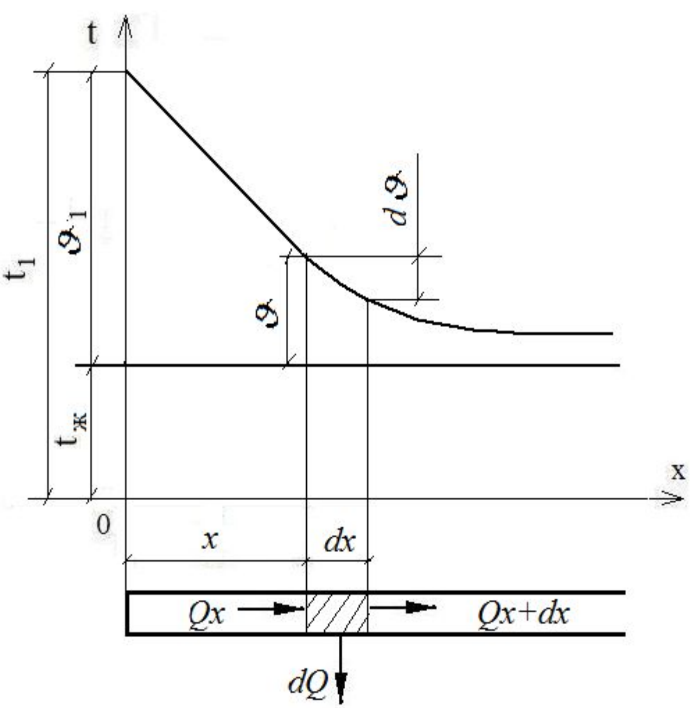
Введем избыточную температуру $\vartheta = t - t_{ж}$

t – текущая температура стержня. Если известна температура основания стержня t_1 то $\vartheta_1 = t_1 - t_{ж}$

На расстоянии x от основания выделим элемент стержня dx

Уравнение теплового баланса для выделенного элемент:

$$Q_x - Q_{x+dx} = dQ$$



Перенос теплоты через стержень

Из закона Фурье:

$$Q_x = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} f$$

$$Q_{x+dx} = -\lambda \frac{d}{dx}(\vartheta + d\vartheta) f = -\lambda \frac{d}{dx}(\vartheta + \frac{d\vartheta}{dx} dx) f = -\lambda f \frac{d\vartheta}{dx} - \lambda f \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx$$

Отсюда тепловой поток, отдаваемый элементом в окружающую среду:

$$Q_x - Q_{x+dx} = \lambda f \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx$$

Согласно закону Ньютона $dQ = \alpha_p (t - t_{ж}) dF_n$ $\quad dF_n = dx \cdot u$ $\quad$ тогда

$$dQ = \alpha_p \vartheta u \cdot dx$$

Приравнивая, получаем $\lambda f \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \alpha_p \vartheta u \cdot dx$ или $\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha_p u}{\lambda f} \vartheta = m^2 \vartheta$

$m = \sqrt{\frac{\alpha_p u}{\lambda f}}$ $\quad \alpha_p, u, \lambda, f$ постоянные, тогда и $m = const$

Найдем решение уравнения в виде: $\vartheta = e^{kx}$

k искомая постоянная.

Дифференцируя , получаем:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = ke^{kx} \quad \text{и} \quad \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = k^2 e^{kx}$$

Подставляя в имеем:

или и

Общее решение будет иметь вид:

или

Для определения значений и рассмотрим ребро бесконечной длины.
В начальном сечении ребра при

При

Подставляя граничные условия в уравнение , имеем:

Это возможно только при отсюда и окончательно получаем:

Анализ формул показывает, что при оребрении необходимо выбирать материал с большим значением

Ребра , имеющие профиль с меньшими

более эффективны.

Определим количество теплоты, отданное стержнем в окружающую среду, которое равно количеству теплоты, проходящему через основание ребра:

Поскольку

получаем:

Для ребра конечной длины дифференциальное уравнение и его решение имеют вид

, но иными будут граничные условия:

при

при

или

- температура и коэффициент теплоотдачи с торца ребра.

Учитывая равенство количества теплоты, подведенного к торцу за счет теплопроводности и отведенного от торца за счет теплоотдачи, используем граничные условия:

при

при

совместно эти уравнения относительно и , получаем:

Подставляя эти выражения в , получаем:

После преобразований имеем:

Учитывая, что

– гиперболический косинус, а

- гиперболический синус, уравнение приведем к виду:

Если

на конце ребра малая величина, а коэффициент

достаточно большой, то можно пренебречь теплоотдачей с конца ребра, чем практически всегда пользуются в инженерной практике. Тогда уравнение примет вид:

Определим градиент температуры:

где th(ml) – гиперболический тангенс.
Учитывая, что тепловой поток, отдаваемый поверхностью ребра в среду, равен

потоку, подводимому к основанию ребра :

То

Подставляя значение , получаем:

Если длина ребра велика, то , а , тогда:

и

Рассмотрим тепловой поток через плоскую ребристую стенку безграничных размеров, причем стенка имеет оребрение со стороны меньшего коэффициента теплоотдачи (рис.). В данном случае тепловой поток будет не только через ребра, но и через стенку. Принимаем заданными значениями коэффициенты теплоотдачи на неоребренной поверхности , гладкой части оребренной поверхности и на поверхности ребер , геометрические размеры ребер и температуры теплоносителей и

Учитывая, что для ребра , тогда периметр поперечного сечения ребра

, а площадь

Подставив выражение для

В , умножив и разделив на

получим:

Теплопередача через ребристую стенку

- безразмерный комплекс, число Био.

Число Био представляет собой отношение внутреннего термического сопротивления к внешнему сопротивлению теплоотдачи:

Окончательно уравнение для теплового потока с поверхности ребра можно представить в виде:

Введем обозначение:

коэффициент эффективности ребра и изменяется от 0 до 1. Тогда

Тепловой поток с гладкой части оребренной поверхности

Общий тепловой поток: или

– *приведенный коэффициент теплоотдачи*:

Система уравнений теплопередачи через ребристую стенку может быть записана в виде:
(и - температуры стенки соответственно со стороны горячей и холодной жидкости)

– толщина гладкой части оребренной стенки.
Решая их, получаем:

или

- коэффициент теплоотдачи для ребристой поверхности (Вт/К):

Для круглой трубы с наружным оребрением:

Для расчета теплового потока тел различной формы использованы термические сопротивления тела и полные термические сопротивления с учетом теплоотдачи на контурах.

Теплопроводность при наличии внутренних источников теплоты

Рассмотрим процессы теплопроводности, когда кроме внешних источников теплоты имеются и внутренние, распределенные по объему. Для строительства одним из подобных процессов является процесс затвердения бетона, что приводит к увеличению внутренних напряжений и в дальнейшем к образованию продольных трещин.

При стационарном процессе в однородной стенке с постоянными значениями коэффициентов , температуры окружающей среды

и равномерным распределением температуры в стенке (рис.) дифференциальное уравнение теплопроводности можно записать в виде:

- мощность внутренних источников теплоты.

В этом случае температурное поле внутри стенки будет изменяться только вдоль оси , направленной

нормально поверхности тела, т.е. задача одномерная.

Поскольку граничные условия на обеих поверхностях одинаковые, то температурное поле симметрично относительно плоскости

В этом случае рассматриваем только одну половину стенки и запишем для нее граничные условия:

Теплопроводность плоской стенки при наличии внутренних источников теплоты

при

Интегрируя уравнение , получаем:

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий:

Таким образом, уравнение для температурного поля примет вид:

Зависимость от квадратичная, т.е. распределение температуры соответствует параболическому закону. Если , то

и полученное уравнение представляет температурное поле для граничных условий первого рода. Отсюда следует:

Температура в центре стенки

Плотность теплового потока изменяется только вдоль оси , т.е.

При

а при плотность теплового потока будет максимальная

Рассмотрим процесс теплопроводности в круглом сплошном стержне - цилиндре (рис.). Радиус существенно меньше его длины.

Примем равномерное распределение внутренних источников теплоты, и . При этом температура

будет везде одинаковой, т.е. задача также будет одномерной.

Запишем уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах:

(1)

Граничные условия:

Теплопроводность цилиндра при наличии внутренних источников теплоты

при

Произведем замену переменной и проинтегрируем уравнение (1)

Учитывая, что величины в знаменателе не равны 0, то получим однородное дифференциальное уравнение первого порядка:

или

или

Тогда:

Из граничных условий:

Окончательно уравнение температурного поля любой точки сплошного цилиндрического тела примет вид:

При и соответственно получаем решение, отвечающее граничным

условиям первого рода. При этом на внешней поверхности цилиндра имеет место максимальная плотность теплового потока

Рассмотрим стационарный процесс

теплопроводности полого цилиндра (трубы) с внутренним радиусом наружным

и

Внутри стенки цилиндра имеются равномерно распределенные источники теплоты мощностью (рис.)

а) б) в)

К расчету теплопроводности цилиндрической стенки при наличии внутренних источников теплоты

Возможны три случая:

1. Теплота отводится только через наружную поверхность трубы (рис.а);
2. Теплота отводится только через внутреннюю поверхность трубы (рис.б);
3. Теплота отводится только через наружную и внутреннюю поверхность трубы (рис. в).

Температура в этом случае изменяется только в направлении радиуса (одномерная задача) и определяется уравнением:

Решение этого уравнения было записано ранее

Постоянные интегрирования:

Для первого случая считаем, что заданы граничные условия третьего рода, т.е.

и со стороны наружной поверхности трубы.

При

Тогда из уравнения

При

или

При

Т.к. , то

и окончательно:

Приравнивая , получаем уравнение относительно

получим выражение для температурного поля:

Температура на наружной поверхности трубы

Плотность теплового потока на этой поверхности:

Температуру на внутренней поверхности трубы находим при

Температурный перепад в стенке определяется по формуле:

Для второго случая граничные условия при и

имеют вид:

при

После проведения аналогичных первому случаю преобразований получаем:

Общий температурный перепад в стенке получаем в виде:

Для третьего случая очевидно, что внутри стенки должен существовать максимум температуры. Изотермическая поверхность, соответствующая максимальной температуре делит стенку на два слоя. Во внутреннем слое теплота передается вовнутрь трубы, во внешнем – наружу. Таким образом, значение максимальной температуры соответствует условию

и

Для решения этой задачи можно использовать результаты двух предыдущих случаев. перепады температур в наружном и внутреннем слоях:

получаем перепад температур между стенками:

Для определения координаты изотермической поверхности с

уравнение решаем относительно :

Значение находится путем подстановки . В случае, если

Если и неизвестны, а известны , , и , то для определения

требуется совместное решение уравнений:

где