



Скалярний добуток векторів.

Кут між векторами

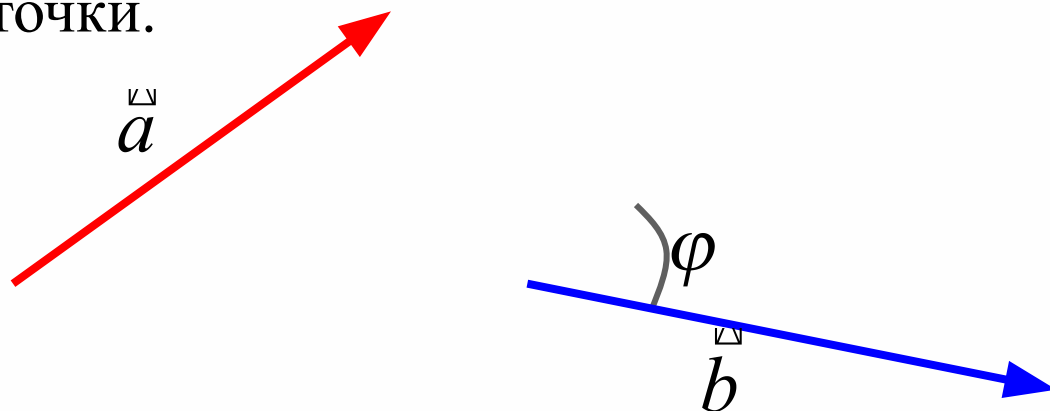


Скалярний добуток двох векторів – число, що дорівнює сумі добутків однойменних координат цих векторів. Зокрема, скалярний квадрат вектора дорівнює сумі квадратів його координат. Якщо $\vec{a}(x_1; y_1; z_1), \vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, то:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2;$$

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

Кут між двома векторами – кут, що утворений векторами, які колінеарні даним і виходять з однієї точки.



Кут між векторами змінюється в межах від 0° до 180° . Якщо хоча б один із векторів нульовий, то кут між цими векторами невизначений. Кут між однаково напрямленими векторами дорівнює 0° , а між протилежно напрямленими – 180° .

Теорема.

Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між ними.

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \\ &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cdot \cos \varphi.\end{aligned}$$

Для обчислення кута φ між векторами $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ використовують формулу:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Наслідок.

Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, то $0 < \varphi < 90^\circ$

Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, то $90^\circ < \varphi < 180^\circ$

Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\varphi = 90^\circ$

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Визначити кут ABC трикутника ABC , якщо $A(3;-1;1)$, $B(1;-1;3)$, $C(3;1;-1)$.

Розв'язання.

Кут B трикутника ABC – кут між векторами $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$
Визначимо координати векторів:

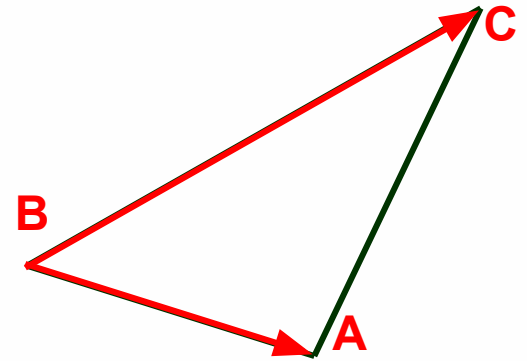
$$\overrightarrow{BA} = (3-1; -1-(-1); 1-3) = (2; 0; -2);$$

$$\overrightarrow{BC} = (3-1; 1-(-1); -1-3) = (2; 2; -4).$$

Обчислимо косинус кута B :

$$\begin{aligned} \cos \angle B &= \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot (-4)}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \\ &= \frac{12}{\sqrt{172}} = \sqrt{\frac{144}{172}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Отже, $\angle ABC = 60^\circ$.



Домашня робота

П. 23,

№23.1, 23.3, 23.10, 23.12,
23.14, 23.15, 23. 24, 24.32