Алгебра и геометрия

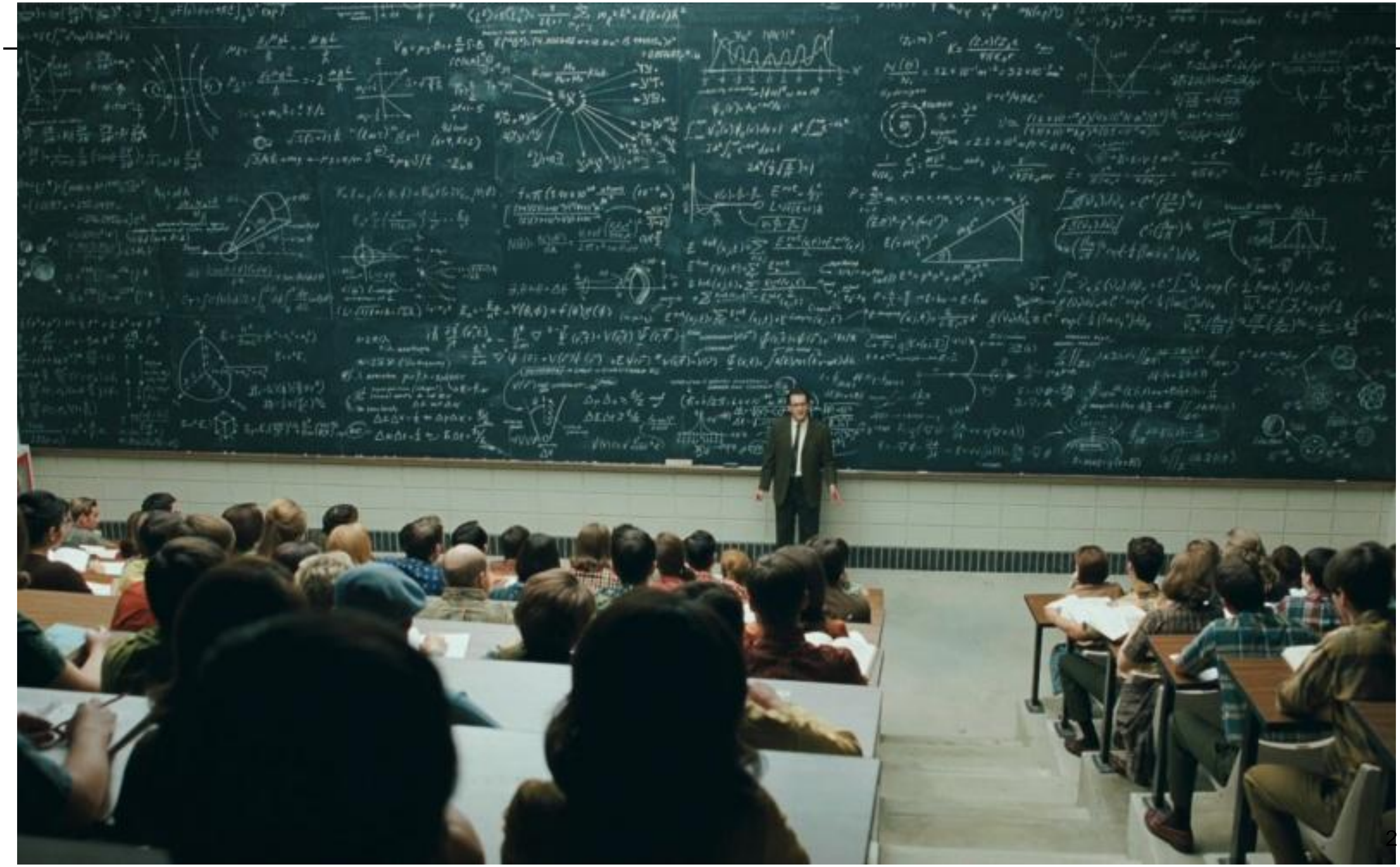
for_ver@list.ru

доцент кафедры ПМИиИТ

Шапкина Вера Валерьевна

16.01.2017 1:29

Математика…



Математика

— **совокупное название многих математических наук.**

Сначала математика возникла как одно из направлений философии в области пространственных отношений (землемеренье) и вычислений. Она была необходима для практических потребностей человека считать, вычислять, измерять, исследовать формы и движение физических тел.

Позже математика развилась в **сложную и многогранную науку об абстрактных, количественных и качественных соотношениях, формах и структурах**.

Но общепринятого определения математики нет..

Термин «математика» происходит от греческого слова μάθημα, что означает «**наука, знание, изучение**», и греческого μαθηματικός, что означает **«любовь к познанию»,** в целом это приводит к более узкому и техническому (прикладному) значению «математическое исследование», которое использовалось и в античные (классические) времена. Греческое слово μαθηματική τέχνη означает **математическое искусство**.

Деление истории математики на 4 периода:

Евклид. Деталь «Афинской школы» Рафаэля

1) **период зарождения математики как самостоятельной дисциплины – до 6-5 века до н. э.**

Формировались понятия целого и рационального числа, дроби, понятие расстояния, площади, объема, создавались правила действий с числами и простейшие правила для вычисления площадей фигур и объемов тел.

ЕвклидЕвклид. Деталь «Афинской школы» Рафаэля

2) **период элементарной математики – от 6-5 в. до н. э. до середины 17 века.**

Возникла геометрия. Среди деятелей того времени ученые древней Греции (Фалес, Пифагор, Гиппократ Хиосский, Демокрит, Евдокс, Евклид, Архимед и проч.), Китая (Чжан Цан, Ген Шоу-чан, Цзу Чун-чжи и проч.), Средней Азии (Джемшид ибн-Масуд аль-Каши, Мухаммед бен-Муса аль Хорезми и др.), Индии и позже Западной Европы (Л. Феррари, Н. Тарталья, Дж. Кардано, С. Стевин и др.).

Историю **математики** обычно делят на 4 периода

- 3) **период исследования переменных величин** – **середина 17 в. - Начало 20 в.**

Изобретен новый метод изучения движения и изменения - дифференциальное исчисление и интегральное исчисление. Возник ряд новых математических наук - теория функций, теория дифференциальных уравнений, дифференциальная геометрия, вариационное исчисление и др. Н.И. Лобачевский изобрел неевклидову геометрию, М.В. Остроградский сделал выдающиеся открытия в механике, математическом анализе, математической физике, П.Л. Чебышев поспособствовал развитию нового направления в теории функций, сделал значительные открытия в теории чисел, теории вероятностей, механике, приближенном анализе.

В этот период действовали такие выдающиеся ученые, как А. М. Ляпунов, А. А. Марков (старший), Г.Ф. Вороной и многие другие.

Историю математики обычно делят на 4 периода

- 4) **период современной математики – с начала 20 в.**

Характерные особенности: сознательное и систематическое изучение ВСЕХ возможных типов количественных соотношений и пространственных форм.

В геометрии изучается уже не только трехмерное пространство, но и другие подобные ему пространственные формы. Выдающимися направлениями развития математики этого периода является функциональный анализ, теория множеств, современная алгебра, математическая логика, теория вероятностей, топология и т.д.

Владилен Панов | Современная математика и ее творцы

- **2011**
  Издательство: МГТУ им. Н. Э. Баумана
  ISBN: 978-5-7038-3536-4
  Жанр: математика,научно-популярные
- http://www.math.ru/lib/ser/msch

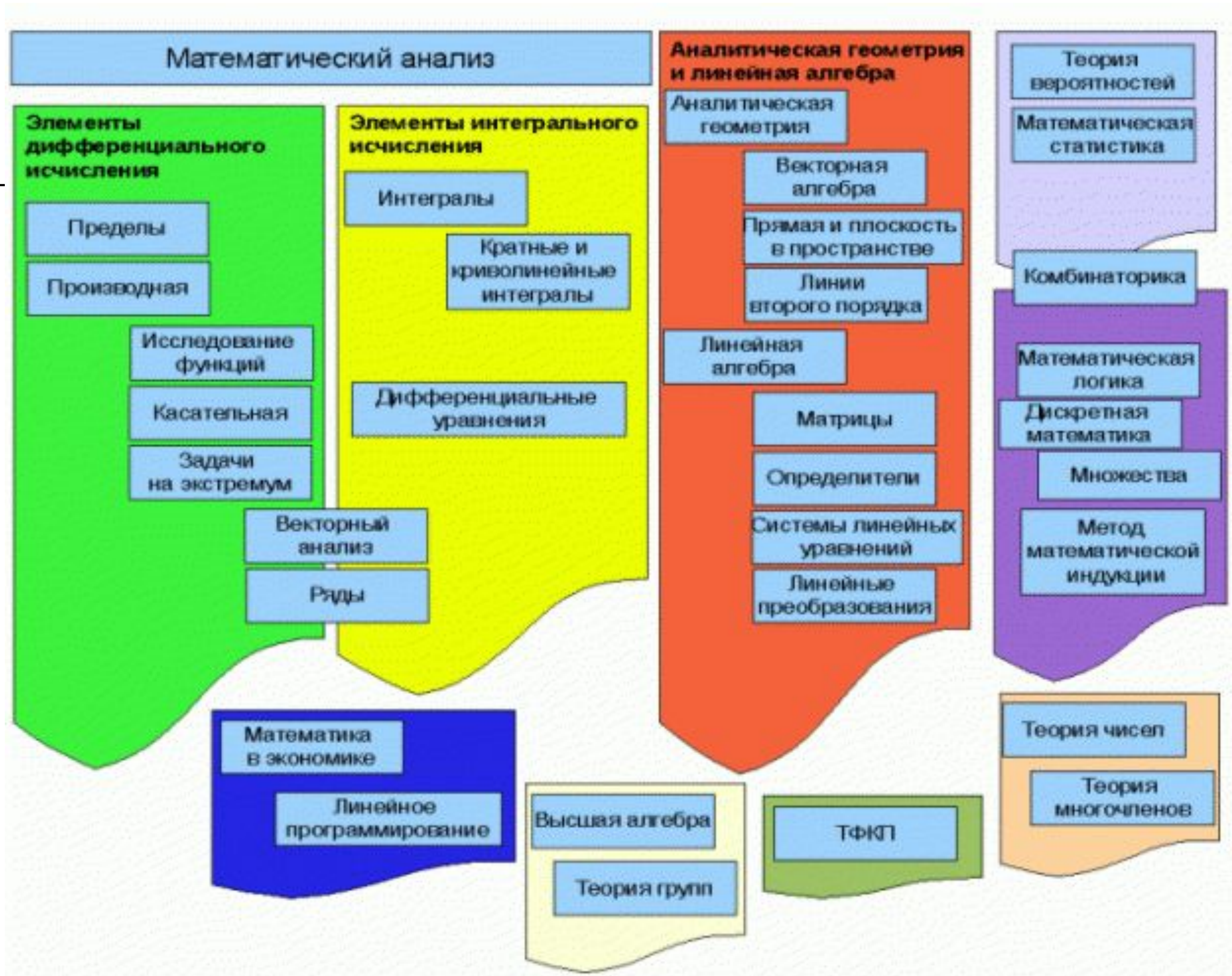
- Математика изучает воображаемые, идеальные объекты и соотношения между ними, используя формальный язык. В общем случае математические понятия и теоремы не обязательно имеют соответствие чему-либо в физическом мире. Главная задача прикладного раздела математики — создать математическую модель, достаточно адекватную исследуемому реальному объекту.

- Содержание математики можно определить как систему математических моделей и инструментов для их создания. Модель объекта учитывает не все его черты, а только самые необходимые для целей изучения (идеализированные).

Абстракция и установление связей между объектами в самом общем виде — одно из главных направлений математического творчества.

Другое направление, наряду с абстрагированием — обобщение. Например, обобщая понятие «пространство» до пространства n-измерений.

Изучение внутриматематических объектов, как правило, происходит при помощи аксиоматического метода: сначала для исследуемых объектов формулируются список основных понятий и аксиом, а затем из аксиом с помощью правил вывода получают содержательные теоремы, в совокупности образующие математическую модель.


Математический анализ
Элементы дифференциального исчисления
Пределы
Производная
Исследование функций
Касательная
Задачи на экстремум
Элементы интегрального исчисления
Интегралы
Кратные и криволинейные интегралы
Дифференциальные уравнения
Векторный анализ
Ряды
Аналитическая геометрия и линейная алгебра
Аналитическая геометрия
Векторная алгебра
Прямая и плоскость в пространстве
Линии второго порядка
Линейная алгебра
Матрицы
Определители
Системы линейных уравнений
Линейные преобразования
Теория вероятностей
Математическая статистика
Комбинаторика
Математическая логика
Дискретная математика
Множества
Метод математической индукции
Математика в экономике
Линейное программирование
Высшая алгебра
Теория групп
ТФКП
Теория чисел
Теория многочленов

Алгебра

- Предметом алгебры является изучение уравнений и ряда вопросов, которые развились из теории уравнений.
- В настоящее время, когда математика разделилась ряд специальных областей, к области алгебры относят лишь уравнения определенного типа, так называемые алгебраические уравнения.

уравнения

Геометрия

- Изучает пространственные свойства предметов, оставляя в стороне все остальные их признаки.
- Например, резиновый мяч диаметром 25 см и чугунное ядро того же диаметра отличаются друг от друга массой, цветом, упругостью и т.д. Однако **форма и размеры** одинаковы. С точки зрения геометрии – каждый из этих предметов - <u>шар</u> диаметром 25 см.

Алгебра

Числовые множества

Натуральные числа N

- **N**={1,2,3,4,…} – множество натуральных чисел
- Для выполнения каких алгебраических операций достаточно этих чисел (натуральных)?
- На этом множестве можно выполнять сложение и умножение.

Пример 1

- На дорогу от дома до университета и обратно у студента уходит 30 минут на метро и 20 мин на автобусе. Сколько минут тратит он на дорогу каждую неделю, состоящую из 6 рабочих дней?

Пример 2

- Комната в студенческом общежитии имеет форму квадрата со стороной a=3 м. Какова ее площадь?

Целые числа Z

- **Z**={…,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,…} – множество целых чисел (содержит все натуральные числа, и числа, им противоположные и нуль), $N \subset Z$;
- Для выполнения каких алгебраических операций достаточно этих чисел (целых)?
- На этом множестве можно выполнять сложение, умножение и вычитание.
- Не будь уравнений, не было бы необходимости в отрицательных числах.

Пример 3

- Из стипендии в 500 руб. студент в первый же день потратил на товарищеский ужин 200 рублей. Сколько денег у него осталось до следующей стипендии?

Пример 4

- Получив стипендию 500 руб. студент в первый же день потратил 600 руб. на цветы для своей подруги, второй же в аналогичной ситуации ограничился духами, стоившими как раз 500 рублей. Сколько денег осталось у каждого из студентов?

Рациональные числа Q

- **Q**=$\{x \mid x = p/q$, где $p \in Z$, $q \in N\}$ – множество рациональных чисел (состоит из чисел, допускающих представление в виде простой дроби), $N \subset Z \subset Q$;
- Для выполнения каких алгебраических операций достаточно этих чисел (рациональных)?
- На этом множестве можно выполнять сложение, умножение, вычитание и деление.

Поскольку любое целое число можно записать в виде обыкновенной дроби, причем не единственным образом, все целые числа являются рациональными.

$$3=\frac{3}{1},\quad 3=\frac{6}{2},\quad 3=\frac{-21}{-7}=\ldots$$

Каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической дроби, пример 7/11 = 0,(63)

Пример 5

- Пусть студент получает стипендию в размере 500 руб., магистрант – 750 руб., а аспирант – 1000 руб. Во сколько раз студент получает меньше аспиранта и магистранта?

Перефразируем пример 1

- На дорогу от дома до университета и обратно у студента уходит 30 минут на метро и 20 мин на автобусе. Сколько часов тратит он на дорогу каждую неделю, состоящую из 6 рабочих дней?

Запишем эти задачи в виде уравнений

Примеры	Конкретный вид	Общий вид
30 + 20 = x	30 + 20 = x	a + b = x
50 * 6 = x	50 * 6 = x	a * b = x
500 - 200 = x	200 + x = 500	a + x = b
500 - 600 = x	600 + x = 500	
500 - 500 = x	500 + x = 500	
1000 / 500 = x	500 * x = 1 000	a * x = b
750 / 500 = x	500 * x = 750	

Действительные числа R

- **R**=(**-**∞;+∞) – множество действительных чисел, Q$\subset$R (кроме всех рациональных чисел, содержит иррациональные числа). Действительные числа изображаются точками координатной прямой (числовой оси).

  Например, эти числа являются иррациональными.

$\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots \quad \lg 5 = 0.6989700\ldots, \quad \pi = 3{,}1415926535\ldots, \quad e = 2{,}78281828459\ldots$

- Вспомним, что возведение в степень имеет две обратных операции: **извлечение корня и логарифмирование.**

Степени числа а

- Степенью с **натуральным** показателем **n (n>1)** называется произведение n множителей, каждый из которых равен **а**,

то есть $a^n = a*a*\ldots*a$

- Степень с **целым** показателем

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = 1/a^n, \text{ где } a \neq 0,\ \mathbf{n \in N},\ a^0 = 1$$

- Степень с **рациональным** показателем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ где } \mathbf{m \in Z, n \in N, n \geq 0}$$

Логарифм

- Степенью с **натуральным** показателем **n (n>1)** называется произведение n множителей, каждый из которых равен **a**,

то есть $a^n = a*a*\ldots*a$

- Степень с **целым** показателем

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = 1/a^n, \text{ где } a \neq 0,\ n \in N,\ a^0 = 1$$

- Степень с **рациональным** показателем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ где } m \in Z,\ n \in N,\ n>0$$

Пример 6

Соотношение $3^2 = 9$ позволяет написать три уравнения: $3^2 = x$; $x^2 = 9$; $3^x = 9$

1. Неизвестна степень – решается уравнение умножением $x = 3^2 = 3*3 = 9$
2. Неизвестно основание степени – извлечением квадратного корня $x = \sqrt{9} = 3$
3. Показатель степени – логарифмированием числа 9 по основанию 3: $x = \log_3 9 = 2$

Пример 6

Но аналогичные уравнения: $x^2 = 2$; $2^x = 3$

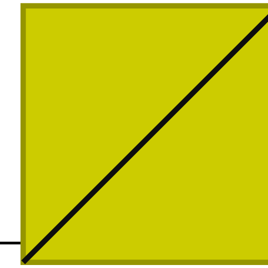
Формальная запись результатов

1. Неизвестно основание степени – извлечением квадратного корня $x = \sqrt{2}$
2. Неизвестен показатель степени – логарифмированием числа 3 по основанию 2: $x = \log_2 3$

Смысла не имеет на множестве рациональных чисел Q.

Посмотрим на геометрические задачи

Пример 7



- Диагональ квадрата со стороной a удовлетворяет по теореме Пифагора, уравнению $x^2 = 2 * a^2$ (Почему?)
- Поэтому при a=1 приходим к уравнению $x^2 = 2$

Пример 8

Площадь S квадрата со стороной a находится по формуле $S = a^2$. Какова сторона x квадрата, площадь S которого равна 2?

Имеем $x^2 = 2$

- Из геометрических соображений заключаем, что «в природе» должно быть число, удовлетворяющее уравнению $x^2 = 2$

Это число называется иррациональным.

- Также иррациональны корни уравнений

$x^2 = 3$; $x^3 = 5$ и т.п. Эти иррациональные числа называются алгебраическими.

- Корень уравнения $2^x = 3$, обозначаемый $x = \log_2 3$, также является иррациональным числом. Это число и аналогичные ему иррациональные корни уравнений $2^x = 5$; $3^x = 4$ и т.д. называются трансцендентными числами. Число π тоже является трансцендентным. $\pi = l / 2*R$

- Существует бесконечное множество трансцендентных чисел, их появление связано с операцией предельного перехода, которая в курсе Элементарной математики фактически не изучается.

Эти термины происходят от греческих корней: «рациональное» - разумно обоснованное, «иррациональное» - то есть нерациональное, недоступно пониманию,

«трансцендентное» - выходящее за пределы сознания.

Основные числовые множества:

- **N**={1,2,3,4,…} – множество натуральных чисел;
- **Z**={…,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,…} – множество целых чисел (содержит все натуральные числа и числа, им противоположные), N⊂Z;
- **Q**={x | $x = p/q$, где $p \in Z$, $q \in N$} – множество рациональных чисел (состоит из чисел, допускающих представление в виде дроби), N⊂Z⊂Q;
- **R**=(-∞;+∞) – множество действительных чисел, Q⊂R (кроме всех рациональных чисел, содержит иррациональные числа). Действительные числа изображаются точками координатной прямой (числовой оси).

–Поскольку любое целое число можно записать в виде обыкновенной дроби, причем не единственным образом, все целые числа являются рациональными.

$$3=\frac{3}{1},\qquad 3=\frac{6}{2},\qquad 3=\frac{-21}{-7}=\ldots$$

-А, например, эти числа являются иррациональными.

$$\sqrt{2}=1{,}4142136\ldots\qquad \lg 5=0.6989700\ldots,\qquad \pi=3{,}1415926535\ldots,\qquad e=2{,}78281828459\ldots$$

Логарифм 5 по основанию 10 это $10^{0,\,6989700\,\ldots}=5$

Уравнения

- Уравнением называется равенство, содержащее, по крайней мере, одно неизвестное (обычно обозначаемое x).
- Известные в задаче величины обычно обозначают начальными буквами латинского алфавита a, b, c…
- Уравнение называется линейным, если оно содержит неизвестное только в первой степени.

$ax=b$ или $ax-b=0$, где $a, b \in R$

- Решить уравнение – найти все его решения (корни) или показать, что данное уравнение корней не имеет.

Линейные уравнения с одним неизвестным $ax=b$, где a, b $\in$ R

1. Если **$a\neq0$**, то **$x=b/a$** будет <u>единственным</u> решением уравнения.

2. Если **$a=0$**, то имеем уравнение **$0*x=b$**.

Сделаем предположения относительно **b.**

А) Если **$b=0$**, то решением уравнения **$0*x=b$** будет любое действительное число. Это уравнение имеет **бесконечное множество решений**.

Б) Если **$b\neq0$**, то **$0*x=b$ не имеет решений,** так как ему не удовлетворяет ни одно действительное число.

Например, уравнение **$0*x=5$ решений не имеет.**

$$0\neq5$$

Алгебраическое линейное уравнение (АЛУ) с одним неизвестным $ax=b$ может **усложняться** по двум направлениям.

1) Сохраняя одно неизвестное x, переходят к **нелинейным** уравнениям второй, третьей или более высокой (натуральной) степени относительно x.

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, где $a, b, c \in R$, $a \neq 0$

2) Увеличивают число неизвестных и число уравнений, сохраняя при этом линейность относительно каждого неизвестного, т.е. переходят к **системам линейных уравнений (СЛУ)** с двумя и более неизвестными.