

Integraal

Heldena Taperson

www.welovemath.ee



1. **Funktsiooni tuletiseks** kohal x nimetatakse funktsiooni muudu
mendi muudu jagatise piirväärtust, kui argumendi muut läheneb nullile.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ ehk } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2. Funktsiooni tuletise leidmist nimetatakse funktsiooni diferentserimiseks
Kui funktsioonil on olemas tuletis kohal x , siis nimetatakse funktsiooni **diferentseeruvaks sellel kohal**.

3. Täida tabel.

$c' = 0$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\sin x)' = \cos x$
$x' = 1$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(e^x)' = e^x$

4. Liitfunktsiooni tuletis võrdub välimise funktsiooni tuletise ja sisemise funktsiooni tuletise ... korrutisega

$$F'(x) = f'(u) \cdot g'(x), \text{ kus } u = g(x)$$

5. Funktsioonide summa, vahe, korrutise ja jagatise tuletis

a) $(u + v)' = u' + v'$ c) $(c \cdot u)' = cu'$ e) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - uv'}{v^2}$

b) $(u - v)' = u' - v'$ d) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

Tuletise leidmise pöördoperatsiooniks on algfunktsiooni leidmine.

funktsioon		tuletis
$f(x) = 5x^2 - 2x + 3$		$f'(x) = 10x - 2$

funktsioon		tuletis
$f(x) = ?$		$f'(x) = 3x$

1. Funktsiooni $y = F(x)$ nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ algfunktsiooniks
 Piirkonnas X , kui selles piirkonnas $F'(x) = f(x)$.

2. Funktsiooni

- a) $y = x^4$ algfunktsiooniks on näiteks $x^5 - 3$
 b) $y = \sin x$ algfunktsiooniks on näiteks $-\cos x - 10$
 c) $y = \ln x$ algfunktsiooniks on näiteks $\ln x + 4$

3. Funktsiooni algfunktsiooni leidmist nimetatakse integreerimiseks ja see on
 tuletise leidmise pöördtehe

On ilmne, et funktsiooni $y = f(x)$ kõik algfunktsioonid erinevad üksteisest mingi konstandi C_0 võrra. Näiteks kui funktsioonid $R(x)$ ja $T(x)$ on funktsiooni $y = f(x)$ algfunktsioonid, st $R'(x) = f(x)$ ja $T'(x) = f(x)$, siis $R(x) - T(x) = C_0$.

N 5

Leidke funktsiooni $f(x) = 2x + 1$ kõikide algfunktsioonide üldavaldis ja skitseerige viie algfunktsiooni graafikud. Leidke mingi kahe algfunktsiooni erinevus.

Teades, et $(x^2)' = 2x$ ja $x' = 1$, võime kirjutada, et $(x^2 + x)' = (x^2)' + x' = 2x + 1$.

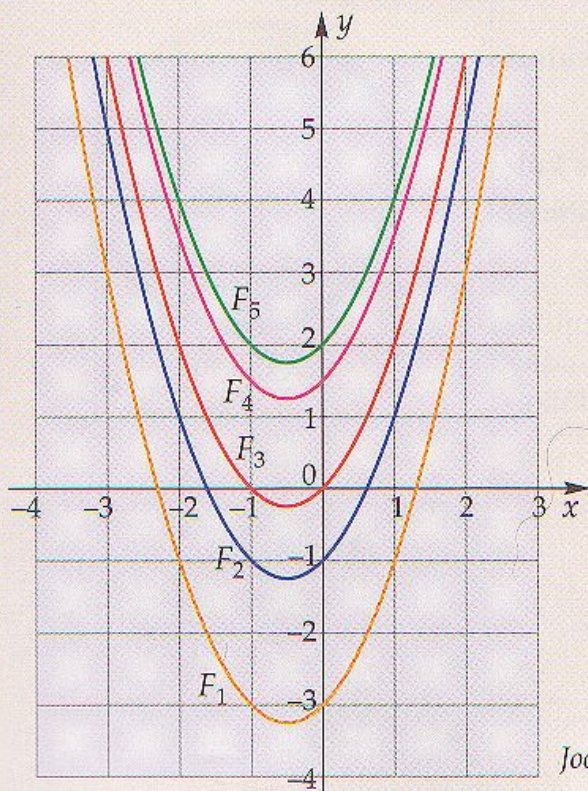
Siit näeme, et funktsiooni $f(x) = 2x + 1$ üheks algfunktsiooniks on $F(x) = x^2 + x$. Kõikide algfunktsioonide üldavaldiseks on seega avaldis $F(x) + C = x^2 + x + C$.

Andes konstandile C mingid suvalised viis väärtust, näiteks -3 ; -1 ; 0 ; $1,5$ ja 2 , saame algfunktsioonid $F_1(x) = x^2 + x + (-3) = x^2 + x - 3$, $F_2(x) = x^2 + x - 1$, $F_3(x) = x^2 + x$, $F_4(x) = x^2 + x + 1,5$ ning $F_5(x) = x^2 + x + 2$.

Algfunktsioonide $F_2(x)$ ja $F_3(x)$ erinevus ehk konstant

$$C_0 = F_2(x) - F_3(x) = x^2 + x - 1 - (x^2 + x) = x^2 + x - 1 - x^2 - x = -1.$$

Nende algfunktsioonide graafikud on piki y -telge mingite konstantide C_0 võrra nihutatud paraboolid (vt jn 67).



Joonis 67

4. Kui funktsioonil $y = f(x)$ on olemas algfunktsioon $y = F(x)$, siis on sellel lõpmata palju algfunktsioone $y = G(x)$, mis kõik avalduvad kujul $G(x) = F(x) + C$, kus C on *konstant*, ja mida nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ määramata integraaliks ning tähistatakse sümboliga $\int f(x)dx = F(x) + C$

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ kus } F'(x) = f(x)$$

Integraali märk $\int$

Integraalialune avaldis $f(x)dx$

Integreeritav funktsioon $f(x)$

Integreerimismuutuja x

Suvaline konstant C

Integreerimine on algfunktsioonide üldavaldisse ehk määramata integraali leidmine.

INTEGREERIMISE PÕHIVALEMID

1. Täida tabel.

$\int 0 dx = C$	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int dx = x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

INTEGRAALIDE OMADUSED

Täida lüngad.

Omadus 1.

Summa (vahe) integraal võrdub liidetavate integraalide summaga

$$\int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int (\sin x + \cos x) dx &= \int \sin x dx + \int \cos x dx = -\cos x + C_1 + \sin x + C_2 = \\ &= \sin x - \cos x + C \end{aligned}$$

Omadus 2.

Konstantse teguri võib tuua integraali märgi alt integraali märgi ette

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$\int 3x^4 dx = 3 \int x^4 dx = 3 \cdot \frac{x^5}{5} + C = \frac{3}{5} x^5 + C$$

MÕNED INTEGREERIMISVÕTTED

1. Kui $\int f(x)dx = F(x) + C$, **siis** $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$.

$$\text{a) } \int \sqrt{5+3x}dx = \int (5+3x)^{0,5} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(5+3x)^{0,5+1}}{0,5+1} + C = \frac{1}{3} \cdot \frac{(5+3x)^{1,5}}{1,5} + C = \frac{2}{9} \sqrt{(5+3x)^3} + C$$

$$\text{b) } \int \sin(5+2x)dx = \frac{1}{2}(-\cos(5+2x)) + C = -\frac{1}{2}\cos(2x+5) + C$$

$$\text{c) } \int e^{2+6x} = \frac{1}{6} e^{2+6x} + C$$

2. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$, **kui** $f(x) \neq 0$

$$\text{a) } \int \frac{2x dx}{4+x^2} = \int \frac{(4+x^2)'}{4+x^2} dx = \ln|4+x^2| + C$$

$$\text{b) } \int \frac{x^2 dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int \frac{(1+x^3)'}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \ln|1+x^3| + C$$

$$\text{c) } \int \frac{x dx}{x-3} = \int \frac{(x-3)+3}{x-3} dx = \int \frac{x-3}{x-3} dx + \int \frac{3}{x-3} dx = x + 3 \ln|x-3| + C$$

3. $\int [f(x)]^n \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \text{ kui } n \neq -1$

a) $\int (\sin x \cdot \cos x) dx = \int \sin x \cdot (\sin x)' dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$

b) $\int (\cos^4 x \cdot \sin x) dx = \int \cos^4 x \cdot (-\cos x)' dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + C$

c) $\int \frac{\ln^5 x}{3x} dx = \frac{1}{3} \int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \frac{1}{3} \int \ln^5 x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} \int \ln^5 x \cdot (\ln x)' dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ln^6 x}{6} + C =$

$$= \frac{\ln^6 x}{18} + C$$

4. Integreerimine muutujavahetusega $\int f(x)dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t)dt$, **kui** $x = g(t)$.

a) $\int \sin(9x + 5) dx$

$$t = 9x + 5$$

$$dt = (9x + 5)' dx = 9 dx$$

$$dx = \frac{dt}{9}$$

$$\int \sin(9x + 5) dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{9} dt = \frac{1}{9} \int \sin t dt = -\frac{1}{9} \cos t + C = -\frac{1}{9} \cos(9x + 5) + C \dots \dots \dots$$

b) $\int (11x - 2)^3 dx$

$$t = 11x - 2$$

$$dt = (11x - 2)' dx = 11 dx$$

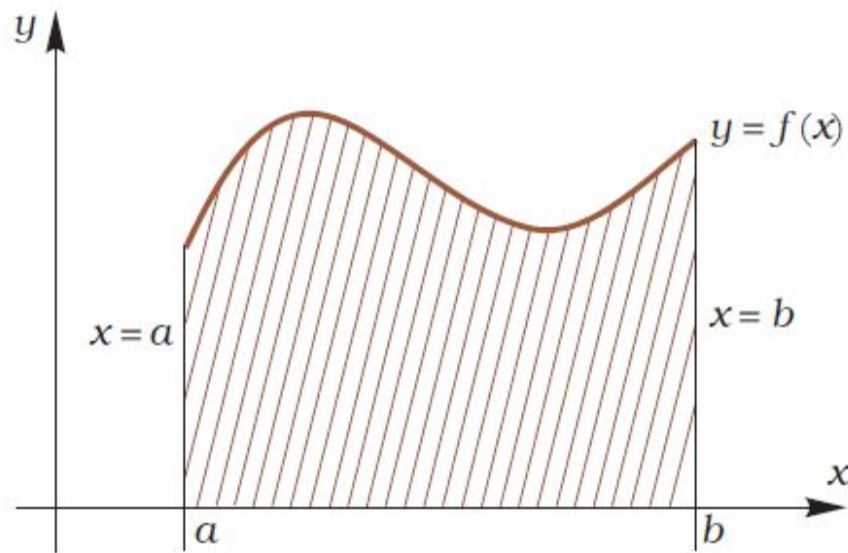
$$dx = \frac{dt}{11}$$

$$\int (11x - 2)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{1}{11} dt = \frac{1}{11} \int t^3 dt = \frac{1}{11} \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{t^4}{44} + C = \frac{(11x - 2)^4}{44} + C \dots \dots \dots$$

KÕVERTRAPETSI PINDALA

Täida lüngad.

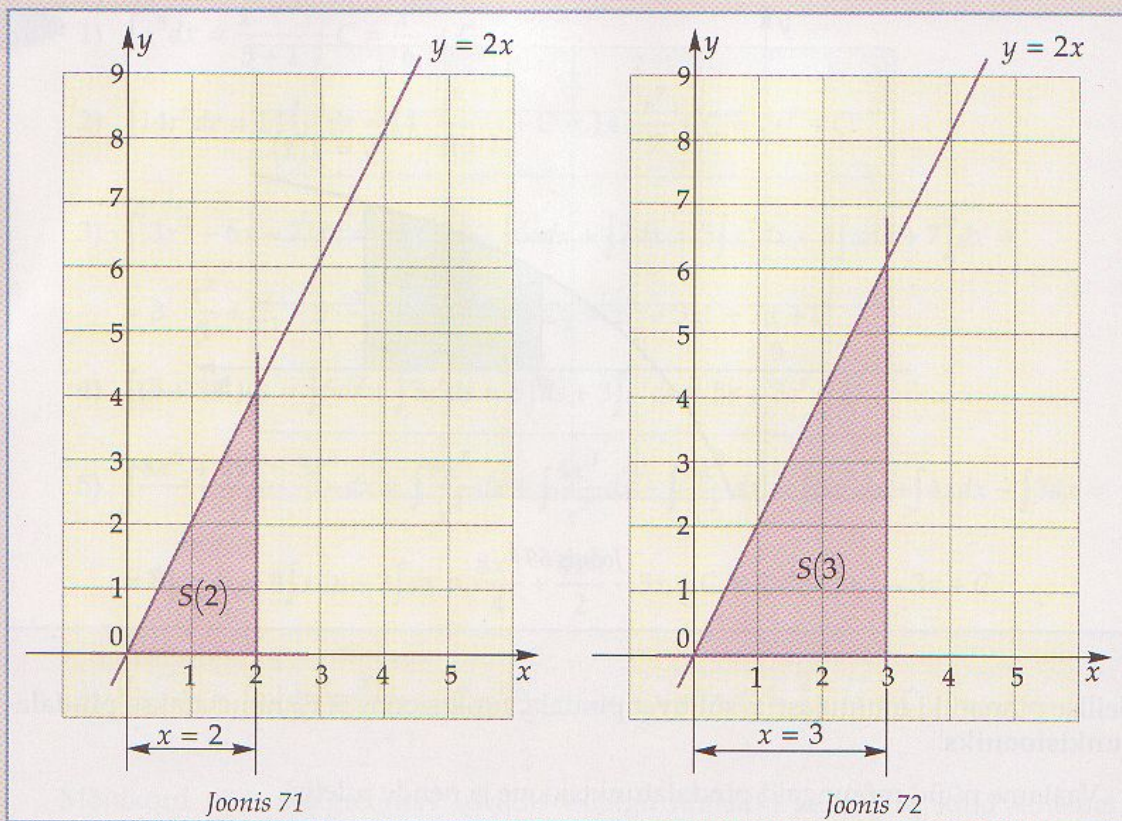
1. Täisnurkse trapetsi pikema haara asendamisel mingi kõverjoonega tekib kujund, mida nimetatakse **kõvertrapetsiks**. Seega on kõvertrapets kujund, mis on piiratud . . X .-teljega, vertikaalsete sirgetega $x=a$. . ja $x=b$ ning funktsiooni $y = f(x)$ graafikuga.



Kui $x = 2$ (vt jn 71), siis selle kolmnurga pindala $S(2) = \frac{ah}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$.

Kui $x = 3$ (vt jn 72), siis $S(3) = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$.

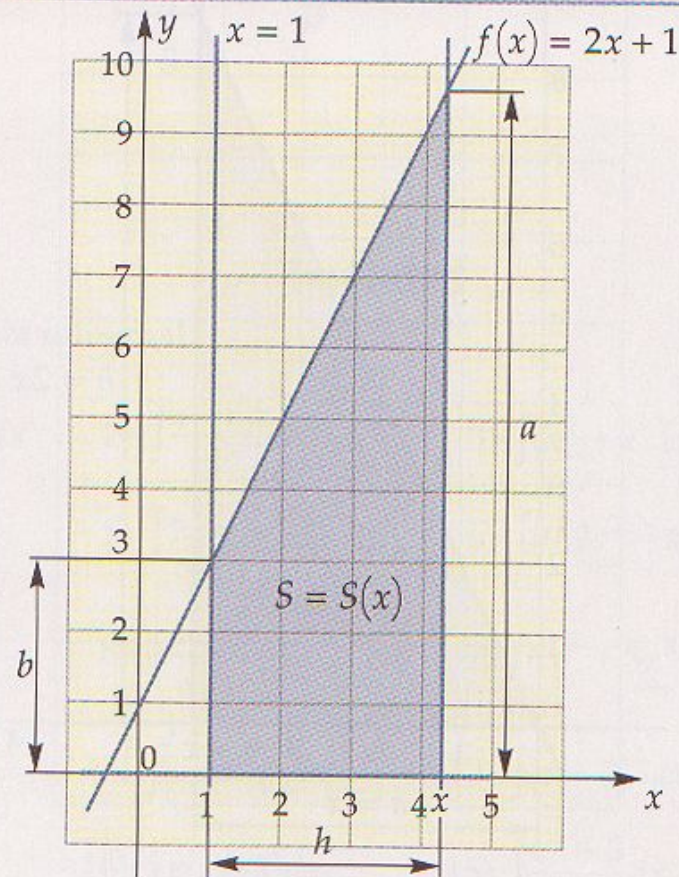
Suvalise niisuguse kolmnurga korral (vt jn 70) on aluse pikkus $a = x$ ja kõrgus $h = 2x$ ning pindala $S = S(x) = \frac{x \cdot 2x}{2} = x^2$.



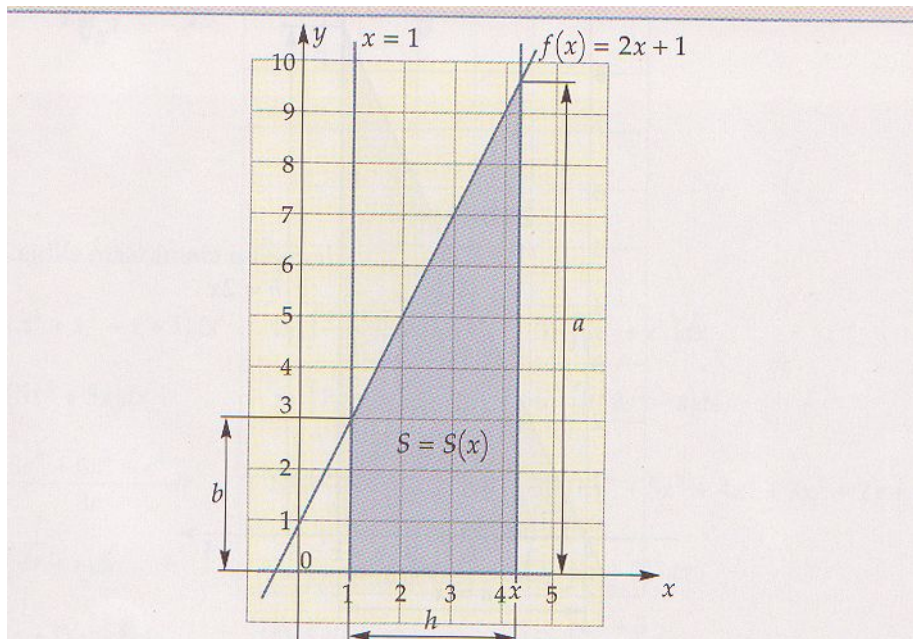
Võtame sellest pindalafunktsioonist tuletise $S' = (x^2)' = 2x$. Mida paneme tähele?

Gümnaasiumi kitsas matemaatika, Avita

Vaatame nüüd veidi keerukamat kujundit, mida piiravad sirge $y = f(x) = 2x + 1$, x -telg, sirge $x = 1$ ja mingi y -teljega paralleelne sirge, mis lõikab x -telge kohal x (vt jn 73). Näeme, et tekkinud kujund on täisnurkne trapets vertikaalsete alustega a ja b ning kõrgusega h .



Joonis 73



Leiame selle trapetsi pindala $S = S(x) = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Kuna $a = f(x) = 2x + 1$, $b = f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ ja $h = x - 1$, siis

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{2x + 1 + 3}{2} \cdot (x - 1) = \frac{2x + 4}{2} \cdot (x - 1) = \frac{2(x + 2)}{2} \cdot (x - 1) = (x + 2)(x - 1) = \\ &= x^2 + 2x - x - 2 = x^2 + x - 2. \end{aligned}$$

Võtame saadud pindalafunktsioonist $S = S(x)$ tuletise: $S' = (x^2 + x - 2)' = 2x + 1$.

Kui kõvertrapetsi kõverhaar on määratud võrrandiga $y=f(x)$ ja selle kõvertrapetsi pindala on $S(x)$, siis

$$S'(x) = f(x)$$

2. Kui kõvertrapetsi kõver haar on määratud võrrandiga $y = f(x)$ ja selle kõvertrapetsi pindala on $S(x)$, siis $S'(x) = f(x)$.

Kõvertrapetsi pindala avaldub $S(x) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, kus $F(x)$ on funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon. Avaldist $\int_a^b f(x) dx$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$
 määratud integraaliks rajades a -st b -ni

Arvu a nimetatakse ülemiseks rajaks ja arvu b alumiseks rajaks

Valemit

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ kus } F'(x) = f(x)$$

nimetatakse **Newton-Leibnizi valemiks**. Antud valem kehtib mis tahes lõigul $[a; b]$ pideva funktsiooni korral.

Arvutamisel kirjutatakse valem sageli kujul $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$.

3. Määratud integraali $\int_a^b f(x)dx$ arvutamiseks

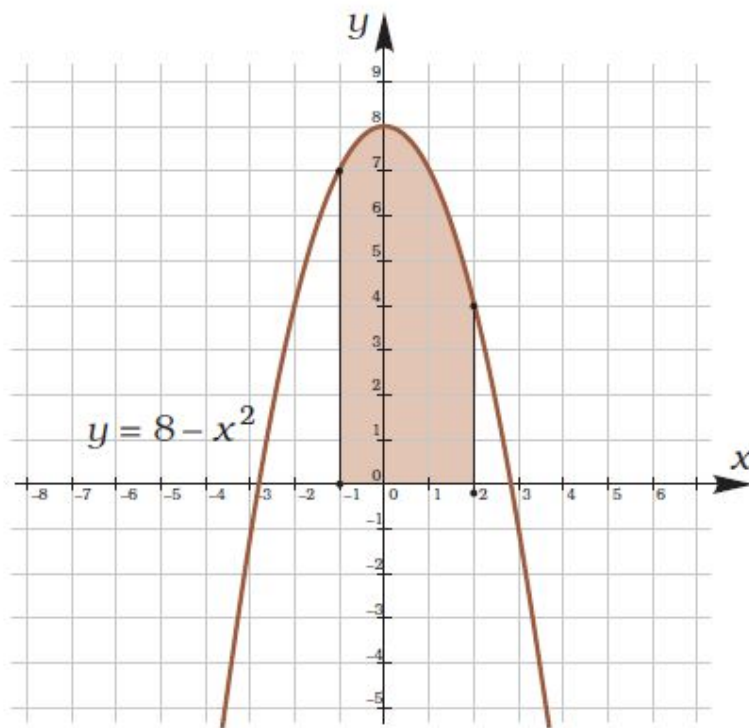
- a) leitakse integreeritava funktsioonialgfunktsioon.....;
- b) leitakse algfunktsiooni väärtusedülemise.....jaalumise.....raja kohal;
- c) lahutatakse algfunktsiooni väärtusestülemise.....raja kohal algfunktsiooni
väärtusalumise.....raja kohal.

4. Leia $\int_{-1}^2 (8 - x^2) dx$.

a) Integreeritava funktsiooni algfunktsioon on $8x - \frac{x^3}{3}$.

b) Rakendades Newton-Leibnizi valemit, saame

$$\int_{-1}^2 (8 - x^2) dx = \left(8x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \left(8 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(8 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = 13\frac{1}{3} - \left(-7\frac{2}{3} \right) = 21 \dots$$



Geomeetriliselt annab saadud tulemus vastava kõvertrapetsi pindalaks 21 üh².

5. Leia määratud integraalid.

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-2}^1 (-3x^2 - 2x + 5) dx &= \left(-3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 5 \cdot x \right) \Big|_{-2}^1 = (-x^3 - x^2 + 5x) \Big|_{-2}^1 = \\ &= (-1^3 - 1^2 + 5 \cdot 1) - (-(-2)^3 - (-2)^2 + 5 \cdot (-2)) = 3 - (-6) = 9 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int_1^4 \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^3}} dx$$

Kõigepealt lihtsustame integreeritava avaldise.

$$\frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^3}} = \frac{x\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{x^{1,5}}$$

$x^{-1,5}$

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^3}} dx &= \int_1^4 (1 - x^{-1,5}) dx = \left(x + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) \Big|_1^4 = \left(4 + \frac{2}{2} \right) - \left(1 + \frac{2}{1} \right) = \\ &= (4 + 1) - (1 + 2) = 5 - 3 = 2 \end{aligned}$$

$$c) \int_{-1}^2 \frac{2^{2x} - 4}{2^x + 2} dx$$

Lihtsustame integreeritava avaldise.

$$\frac{2^{2x} - 4}{2^x + 2} = \frac{(2^x - 2)(2^x + 2)}{2^x + 2} = 2^x - 2$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \frac{2^{2x} - 4}{2^x + 2} dx &= \int_{-1}^2 (2^x - 2) dx = \left(\frac{2^x}{\ln 2} - 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \left(\frac{2^2}{\ln 2} - 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{2^{-1}}{\ln 2} - 2 \cdot (-1) \right) = \frac{4}{\ln 2} - 4 - \frac{1}{2 \ln 2} + 2 = \frac{7}{2 \ln 2} - 2 = \frac{7 - 4 \ln 2}{2 \ln 2} \end{aligned}$$

$$d) \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} dx$$

Lihtsustame integreeritava avaldise.

$$\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)} = 1 + \sin x$$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \sin x) dx = \left(x - \cos x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} - \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi - 1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{e) } \int_0^1 (2x-1)^4 dx$$

Kasutame integreerimiseks muutuja vahetust $t = 2x - 1$, siis $dt = (2x-1)' dx = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$

$$\int_0^1 (2x-1)^4 dx = \int_0^1 t^4 \cdot \frac{dt}{2} = \frac{(2x-1)^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{2 \cdot 1 - 1}{5} - \frac{0 - 1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\int (2x-1)^4 dx = \frac{1}{2} \int t^4 dt = \frac{t^5}{10} + C$$

MÄÄRATUD INTEGRAALI OMADUSED

Täida lüngad.

Omadus 1.

Summa (vahe) integraal võrdub liidetavate integraalide summaga

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_{-3}^4 (3x^2 - 4) dx = \int_{-3}^4 3x^2 dx - \int_{-3}^4 4 dx = \dots\dots\dots$$

Omadus 2.

Konstantse teguri võib tuua integraali märgi alt integraali märgi ette

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_1^2 4e^x dx = 4 \int_1^2 \dots\dots\dots$$

Omadus 3.

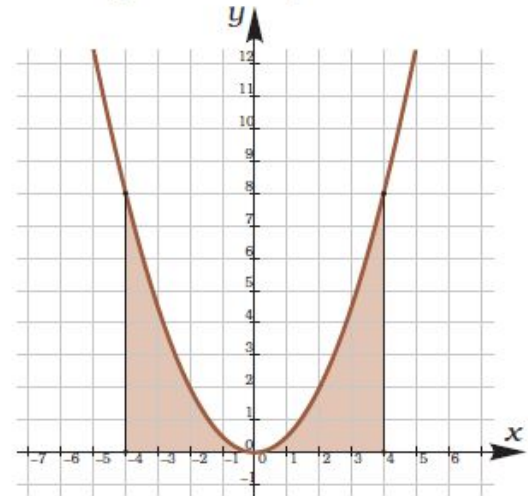
Kui vahetada integraali rajad, siis muutub integraali märk vastupidiseks

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Omadus 4. Kui funktsioon $f(x)$ on pidev lõigul $[a; b]$, siis $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

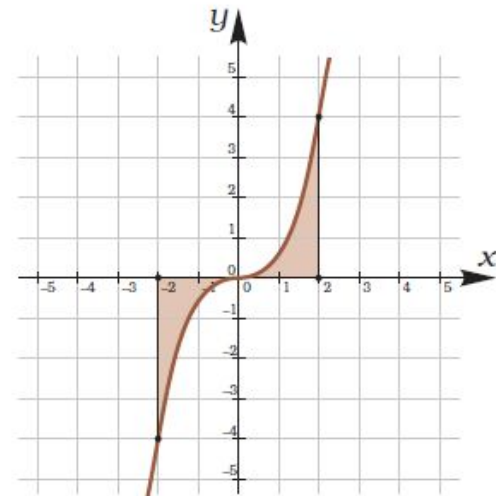
Omadus 5. Kui funktsioon $f(x)$ on paarisfunktsioon, siis

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

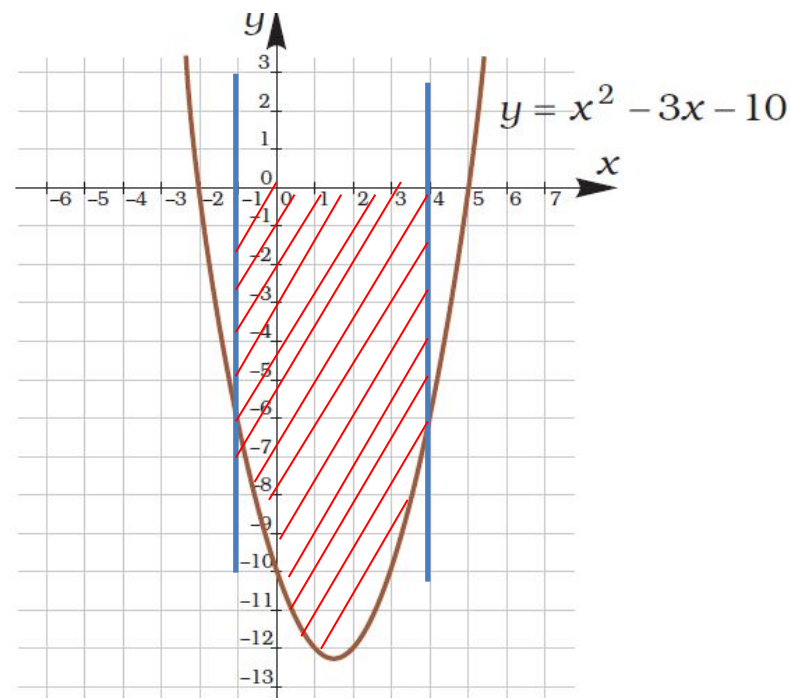


Omadus 6. Kui funktsioon $f(x)$ on paaritu funktsioon, siis

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$



- 2.** Kõvertrapets on piiratud parabooliga $y = x^2 - 3x - 10$, sirgetega $x = -1$ ja $x = 4$ ning x -teljega. Viiruta joonisel tekkinud kõvertrapets ja leia selle pindala.



$$\int_{-1}^4 (x^2 - 3x - 10) dx = \left. \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 10x \right) \right|_{-1}^4 =$$

$$\left(\frac{4^3}{3} - \frac{3 \cdot 4^2}{2} - 10 \cdot 4 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - 10 \cdot (-1) \right) = 21\frac{1}{3} - 24 - 40 + \frac{1}{3} + 1,5 - 10 = -50\frac{5}{6}$$

Kuna trapets asub allpool x -telge, siis saime kõvertrapetsi pindala vastand arv.

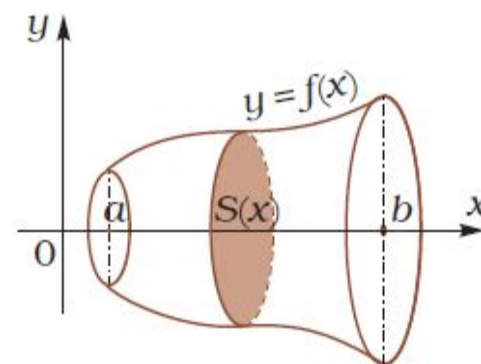
Vastus. Kõvertrapetsi pindala on $50\frac{5}{6}$ üh².

PÖÖRDKEHA RUUMALA ARVUTAMINE

Täida lüngad.

1. Kui pöördkeha piiravad tasandid $x=a$ ja $x=b$ ($a < b$) ning pind, mis tekib lõigus $[a;b]$ integreeruva funktsiooni $f(x)$ graafiku pöörlemisel ümber x -telje, siis avaldub ruumala valemiga

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



2. Kuna pöördkeha x -teljega risti oleva lõike pindala on $S(x) = \pi r^2 = \pi f^2(x)$, siis saab pöördkeha ruumala esitada valemiga $V = \int_a^b S(x) \cdot dx$, kus $S(x)$ on keha *ristlõike* pindala. Seda valemit saab kasutada ka püramiidide ja prismade *ruumalade* leidmiseks.

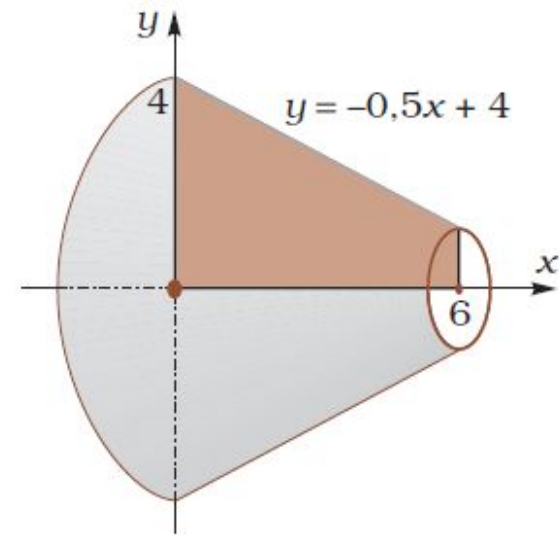
3. Leia pöördkeha (tüvikoonuse) ruumala, mis tekib, kui x -telje ümber pöörleb kujund, mida piiravad jooned võrranditega

$$y = -0,5x + 4, x = \dots 0 \dots \dots, x = \dots 6 \dots \dots, y = 0$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^6 (-0,5x + 4)^2 dx = \pi \int_0^6 \left(\frac{x^2}{4} - 4x + 16 \right) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{12} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 16x \right) \Big|_0^6 =$$

$$= \pi \left(\frac{6^3}{12} - 2 \cdot 6^2 + 16 \cdot 6 - \frac{0^3}{12} + 2 \cdot 0^2 - 16 \cdot 0 \right) = 42\pi \text{ üh}^3$$

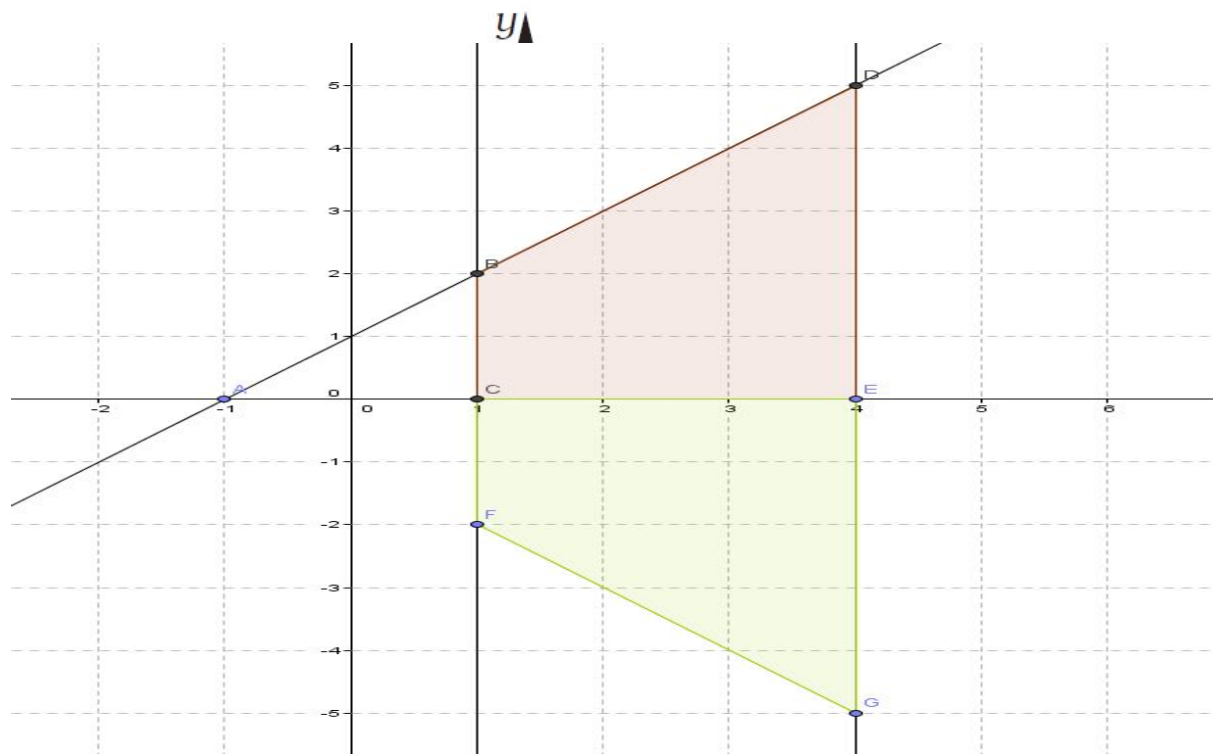


4. Leia pöördkeha ruumala, mis tekib, kui x -telje ümber pöörleb kujund, mida piiravad antud võrranditega jooned. Illustreeri lahendust joonisega.

a) $y = x + 1$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

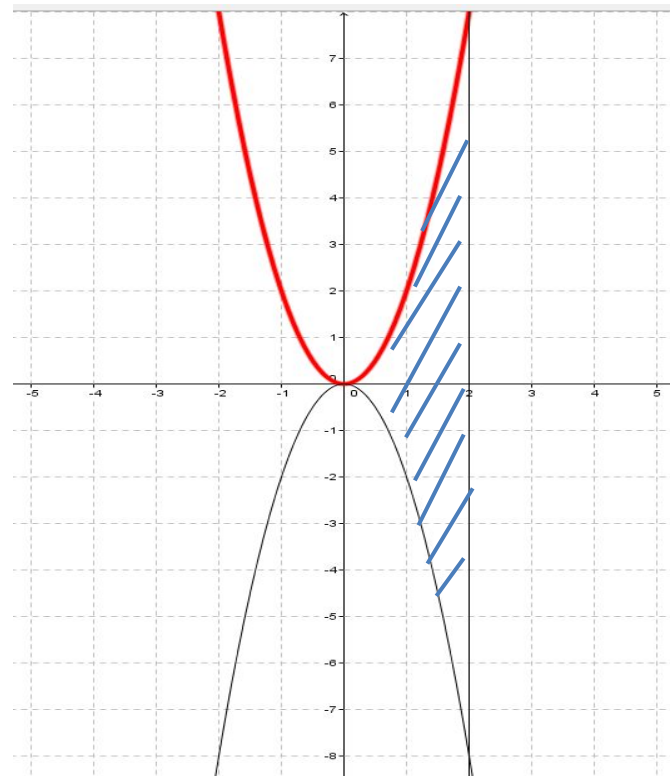
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_1^4 (x + 1)^2 dx = \pi \int_1^4 (x^2 + 2x + 1) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_1^4 =$$

$$= \pi \left[\frac{4^3}{3} + 4^2 + 4 - \left(\frac{1^3}{3} + 1^2 + 1 \right) \right] = 39\pi \text{ ruumalaühikut.}$$



b)

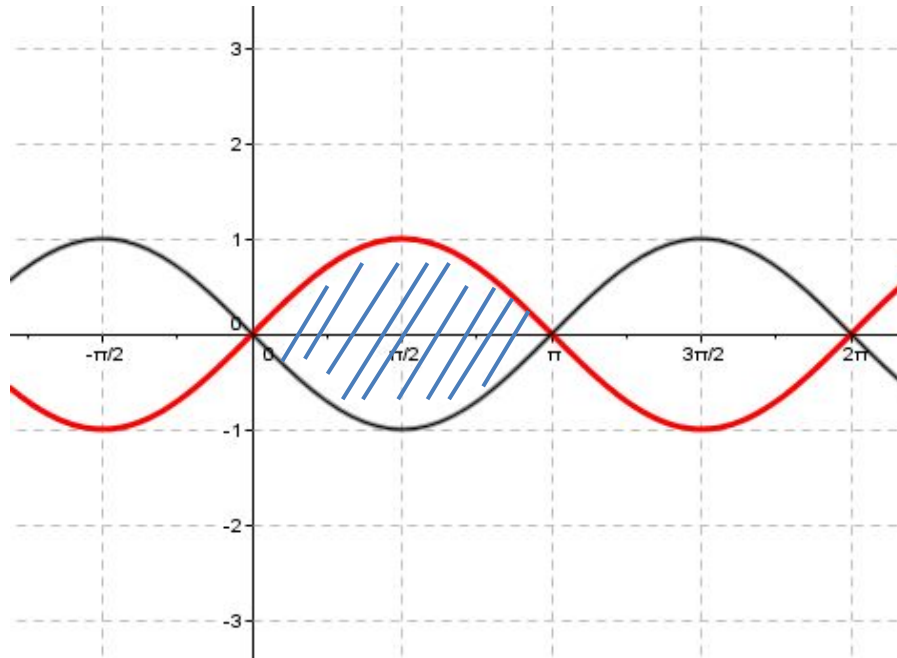
$$V = \pi \int_0^2 (2x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 4x^4 dx = 4\pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = 4\pi \cdot \frac{2^5}{5} - 0 = 25,6\pi (\ddot{u}^3)$$



$$\text{c) } \text{NB! } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi - 0 + \frac{1}{2} \sin 0 \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = 0,5\pi^2 (\ddot{u}^3)$$



Integraali seos füüsikaga

Kui keha liigub mööda sirget kohast a kohani b muutuva jõu P mõjul, mis mõjub piki sirget ja sõltub läbitud tee pikkusest s , st $P=f(s)$, kui $a < b$, siis avaldub tehtud töö

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(s_i) \cdot \Delta s = \int_a^b f(s) ds$$

Näide. Venimata olekus vedru on 20 cm pikk. Jõud suurusega 100 N suudab hoida selle vedru 5 cm pikemana. Kui palju tööd minimaalselt on vaja teha, et venitada vedru pikkuselt 25 cm pikkuseni 35 cm?

Hooke'i seaduse põhjal venitusjõud P on vedru tasakaaluasendis võrdeline vedru algpikkuse muuduga $\Delta x = s$ st $P=ks$.

Et 100 N suurune jõud hoiab vedru 5 cm = 0,05 m pikemana $100=k \cdot 0,05$, st $k=2000$ ja $P=2000s$. Meid huvitab töö pärast seda, kui vedru on juba venitatud 0,05 m võrra ja seda jätkatakse Kuni vedru on pikenenud 15 cm = 0,15 m võrra.

$$A = \int_{0,05}^{0,15} 2000s \, ds = \frac{2000s^2}{2} \Big|_{0,05}^{0,15} = 1000(0,15^2 - 0,05^2) = 20(J)$$

Harjutusülesanne 5, lk. 77.

5. Rasmus valmistas oma kassile Kikule kaarhalli kujulise majakese, mille eestvaade on paraboolikujuline. Kaarhalli maksimaalne kõrgus on 40 cm ja laius põrandal 0,8 m. Kui suur on kaarhalli otsa pindala?

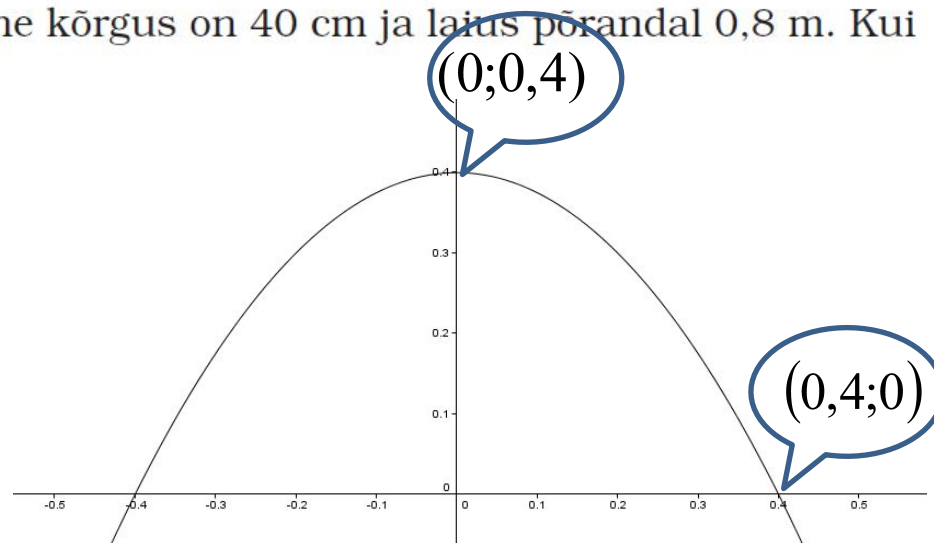
$$y = ax^2 + 0,4$$

$$0,16a + 0,4 = 0$$

$$0,16a = -0,4$$

$$a = -2,5$$

$$y = -2,5x^2 + 0,4$$



$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \int_0^{0.4} (-2,5x^2 + 0,4) dx \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{2,5x^3}{3} + 0,4x \right) \Big|_0^{0,4} = 2 \cdot \left(-\frac{2,5 \cdot 0,4^3}{3} + 0,4 \cdot 0,4 \right) - 0 \approx 0,2 (m^2) \end{aligned}$$

Vastus. Kaarhalli otsa pindala on ligikaudu 0,2 m².