



СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. Часть I

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

Кинематический анализ –

это исследование расчётной схемы сооружения (системы), выполняемое до начала расчёта с целью определения кинематического качества системы (геометрической неизменяемости, мгновенной изменяемости или геометрической изменяемости), а в случае геометрической неизменяемости системы – также для выявления ее статической определимости или неопределимости.

Основные понятия кинематического анализа

Д и с к –

часть системы (один или несколько соединённых друг с другом элементов), форма и размеры которой могут изменяться **только вследствие деформации материала.**

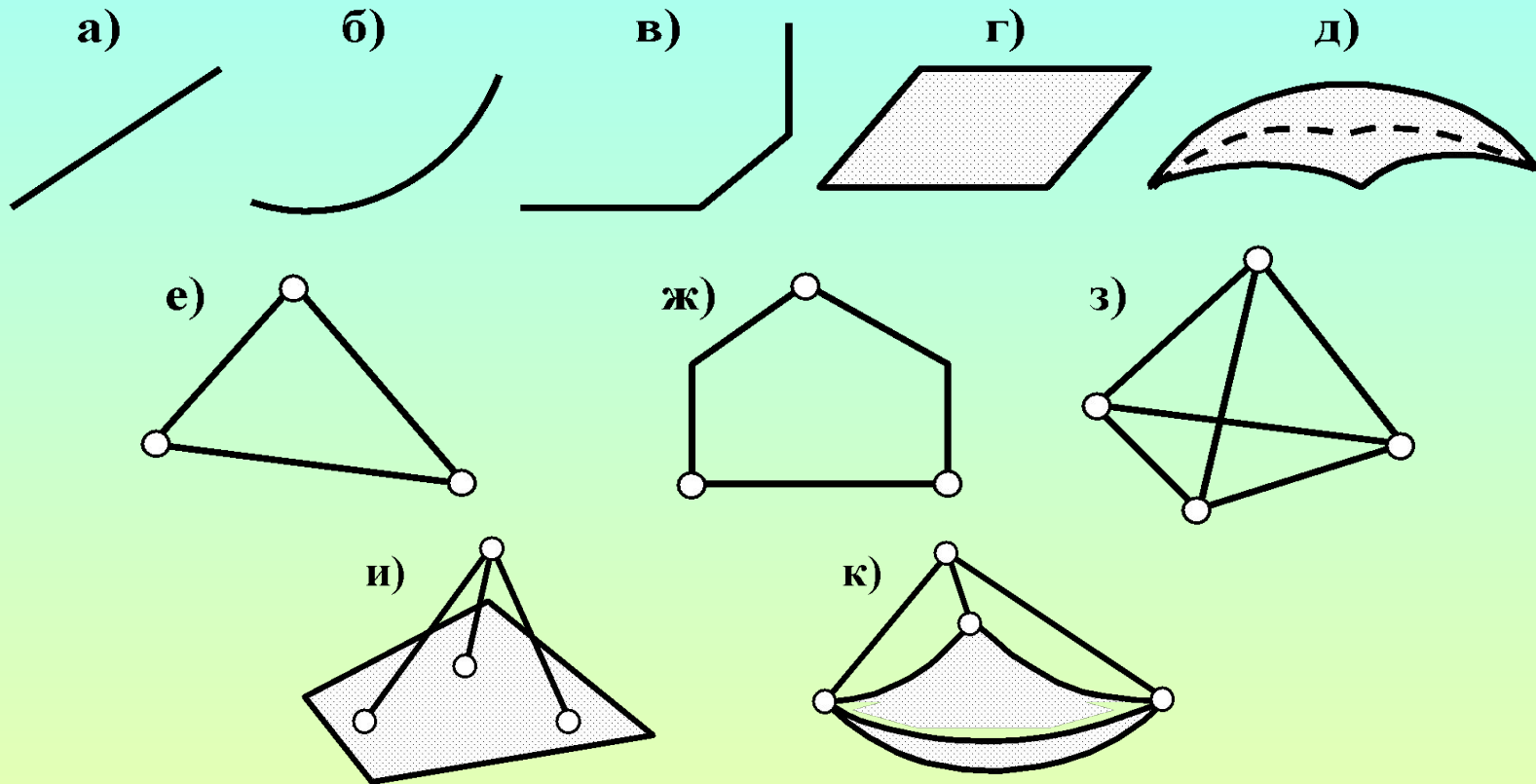
С в я з и (механические) –

ограничения на перемещения (линейные и/или угловые) точек или сечений элементов системы, а также устройства, технически реализующие эти ограничения.

С т е п е н и с в о б о д ы –

независимые геометрические параметры, полностью определяющие положение всех точек диска или системы в целом при их возможных перемещениях.

Д и с к и



– а, б, в, г, д – диски из одного элемента

(а, б, в – стержни с прямолинейной, криволинейной и ломанной в плоскости или в пространстве осью; г – диск-пластинка; д – диск-оболочка);

– е, ж, з, и, к – диски из нескольких элементов

(е, ж, з – из однотипных элементов – стержней, плоские (е, ж) и пространственный (з); и, к – комбинированные пластинчато- и оболочечно-стержневые, пространственные).

Классификация связей

- по области расположения
 - дискретные (в отдельных точках или сечениях)
 - континуальные (распределённые по объему, поверхности или линии)
- по соединяемым дискам
 - внутренние
 - внешние
- по числу ограничиваемых перемещений
 - простые (линейные и угловые)
 - сложные
- по физическим свойствам
 - жёсткие (недеформируемые)
 - податливые (деформируемые)
- по кинематическому признаку
 - необходимые
 - избыточные (лишние и ложные)

Типы связей плоских систем

Тип свя- зи	Наи- мено- вание связи	Изображение связи на расчетной схеме	Характеристики связи	
			Кинематическая	Статическая
1	2	3	4	5

[illegible]

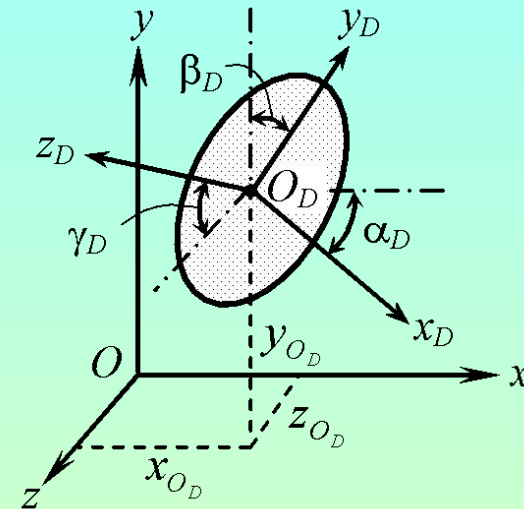
Типы связей плоских систем (окончание)

Тип связи	Наиме- нование связи	Изображение связи на расчетной схеме	Характеристики связи	
			Кинематическая	Статическая

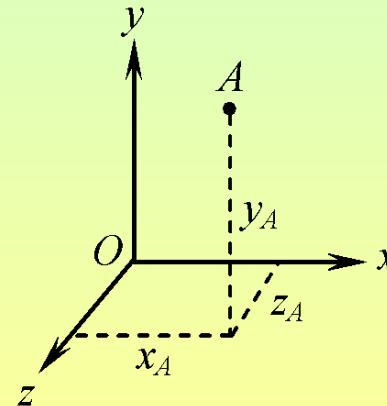
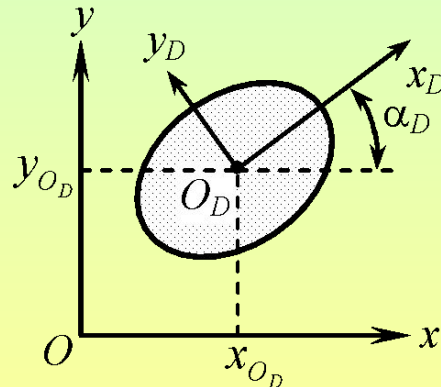
Степени свободы

Несвязанный диск в пространстве имеет шесть степеней свободы:

координаты x_{O_D} , y_{O_D} и z_{O_D} некоторой точки O_D диска – начала его локальной (собственной) системы координат и трёх углов α_D , β_D и γ_D между глобальными и локальными осями.



В плоскости диск обладает тремя степенями свободы – это координаты x_{O_D} , y_{O_D} и угол α_D . Точка в пространстве имеет три степени свободы – x_A , y_A и z_A , а в плоскости – две (x_A и y_A).



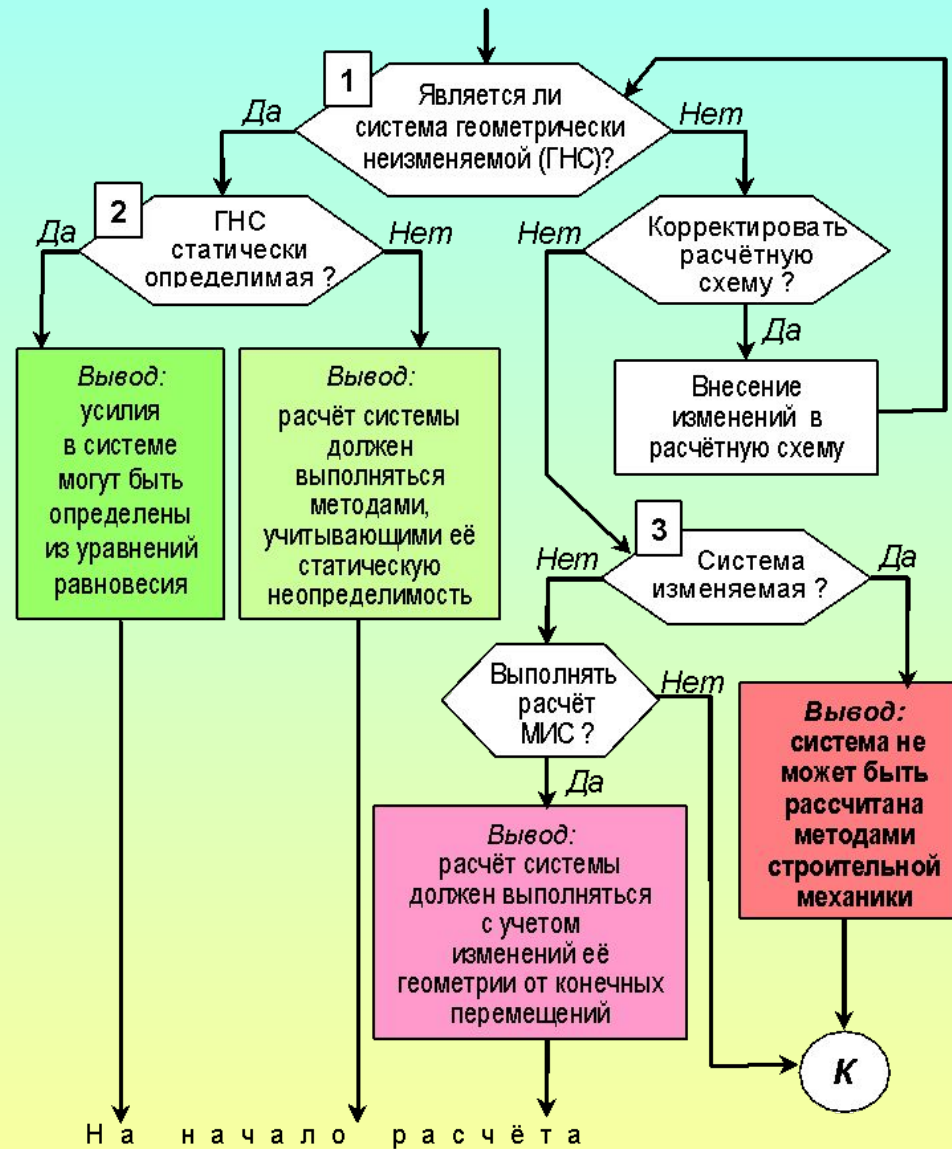
Системы геометрически неизменяемые, изменяемые и мгновенно изменяемые

Геометрически неизменяемая система (ГНС) –
это система, перемещения в которой могут возникать
только вследствие деформации её элементов.

Геометрически изменяемой
называется система (ГИС), в которой возможны
конечные перемещения без деформации элементов.

Мгновенно изменяемой
называется система (МИС), в которой
могут возникать бесконечно малые перемещения
без деформации её элементов.

Алгоритм кинематического анализа



Этапы кинематического анализа

- 1) **количественный анализ;**
- 2) **качественный (структурный) анализ.**

Количественный анализ — это исследование расчётной схемы сооружения, заключающееся в оценке баланса (соотношения) суммарного числа n_{Δ} степеней свободы дисков системы до наложения на них внешних и внутренних связей (т.е. несвязанных дисков) и суммарного числа n_c внешних и внутренних связей системы, в пересчёте на связи первого типа.

Необходимое условие
геометрической неизменяемости системы:

$$\mathbf{W} \leq \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{W} = n_{\Delta} - n_c)$$

Количественный анализ

Необходимое условие геометрической неизменяемости системы:

$$W \leq 0 \quad (W = n_{\Delta} - n_c)$$

Для плоской системы:

$$n_{\Delta} = 3D; \quad n_c = n_{\text{внут. св.}} + n_{\text{внеш. св.}} = \underbrace{3\Pi + 2H + C}_{n_{\text{внут. св.}}} + \overset{n_{\text{внеш. св.}}}{C_0}$$

D – количество дисков;

Π – число *простых* припаяк

H – число *простых* шарниров } между дисками системы,
без учёта диска «земля»;

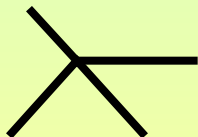
C – количество внутренних связей первого типа (линейных и угловых);

C_0 – число внешних (опорных) связей – в пересчёте на связи первого типа.

Простая припайка – жёсткое соединение **двух** дисков.

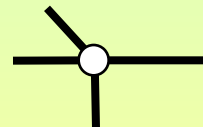
Простой шарнир (цилиндрический или поступательный) – шарнирное соединение **двух** дисков.

Сложная (кратная) припайка



Соответствующее
(жёсткое или шарнирное)
соединение **более чем двух** дисков

Сложный (кратный) шарнир



Учитываются эквивалентным числом простых припаяк (шарниров):

$$\Pi = n_D - 1$$

n_D – число соединяемых дисков в узле

$$H = n_D - 1$$

Качественный (структурный) анализ –
это исследование структуры
расчётной схемы сооружения, заключающееся
в проверке правильности расположения связей,
выявлении возможных дефектов соединения
дисков и завершающееся определением
кинематического качества (природы) системы
(её геометрической неизменяемости,
изменяемости или мгновенной изменяемости).

Классификация связей по кинематическому признаку

Необходимые связи – это связи, удаление которых вызывает изменение кинематической природы системы (геометрически неизменяемая система превращается в геометрически изменяемую или мгновенно изменяемую, мгновенно изменяемая система становится геометрически изменяемой).

Лишними называются связи, при удалении которых кинематическая природа системы не изменяется, но эти связи ограничивают перемещения в деформируемой системе.

Ложные связи – такие, которые не оказывают никакого влияния ни на кинематическую природу системы, ни на перемещения в ней, определяемые с учетом деформации элементов.

Вид связи (наименование)	Кинематический признак связи	

δ_S – возможное перемещение в системе с удалённой связью по направлению этой связи (без учёта деформаций);
 δ_S^0 – то же, с учётом деформаций элементов системы.

Типовые способы геометрически неизменяемого соединения дисков плоских систем

№ и на- звание способа	Содержание способа (приема)	Схема соединения	Требования к расположению связей	№ и название способа	Содержание способа (приема)	Схема соединения	Требования к расположению связей
1	2	3	4	1	2	3	4

Дополнительные сведения, вытекающие из структурного анализа

*Если в процессе синтеза системы на нескольких шагах (более одного) последовательно образуются геометрически неизменяемые системы, то рассматриваемая система может квалифицироваться как **составная**, с выделением в ней **главных** и **второстепенных** частей.*

Главной называется геометрически неизменяемая часть составной системы, способная воспринимать любые воздействия даже при отсутствии всех других частей.

Второстепенная часть составной системы – это часть, утрачивающая работоспособность вследствие возникновения её геометрической или мгновенной изменчивости при удалении других частей (всех или некоторых).

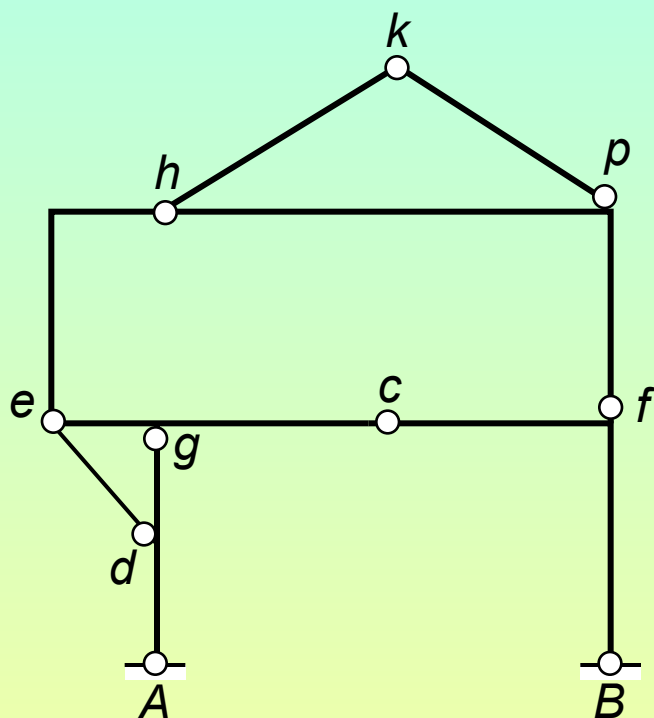
Второстепенные части могут образовывать иерархию по признаку большей-меньшей второстепенности.

Самой второстепенной частью является та, которая неработоспособна при отсутствии любой другой части системы.

Практическая рекомендация по последовательности расчёта статически определимой составной системы:
*для определения реакций связей рассматривается равновесие частей, начиная с самой второстепенной и заканчивая главной (то есть в порядке, **обратном** последовательности синтеза).*

Замечание: понятия составной системы, главной и второстепенной частей, а также соображения о последовательности расчёта не относятся непосредственно к кинематическому анализу; принципиально важными они являются для статически определимых систем.

Пример выполнения кинематического анализа плоской стержневой системы

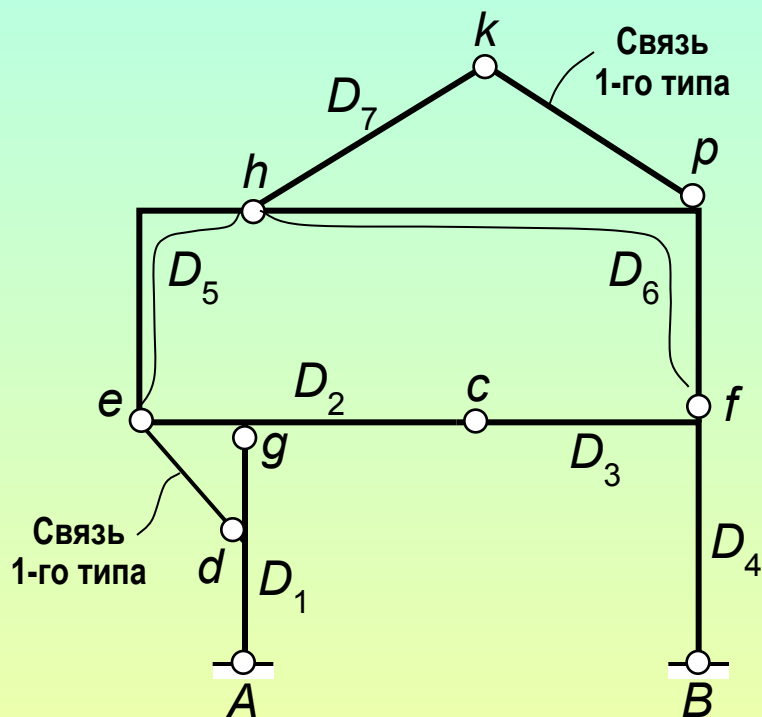


Основные вопросы кинематического анализа:

- 1) является ли система геометрически неизменяемой?
- 2) если да, то статически определима она или статически неопределима?

Этап **1**. Количественный анализ –
 проверка выполнения необходимого,
 но недостаточного условия
 геометрической неизменяемости системы

$$W \leq 0 \quad (?)$$



$$W = 3D - (3\Pi + 2H + C + C_0)$$

$D = 7$ (диски D_5 и D_6 – стержни с ломаными осями)

$\Pi = 1$ (между дисками D_3 и D_4 в узле f)

$H = 6$ (простые – в узлах e, g, c, f , кратный – в узле h)

$C = 2$ (стержни ed и kp)

$C_0 = 4$ (шарнирные неподвижные опоры A и B)

$$W = 3 \cdot 7 - (3 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 2 + 4) = 21 - 21 = 0 -$$

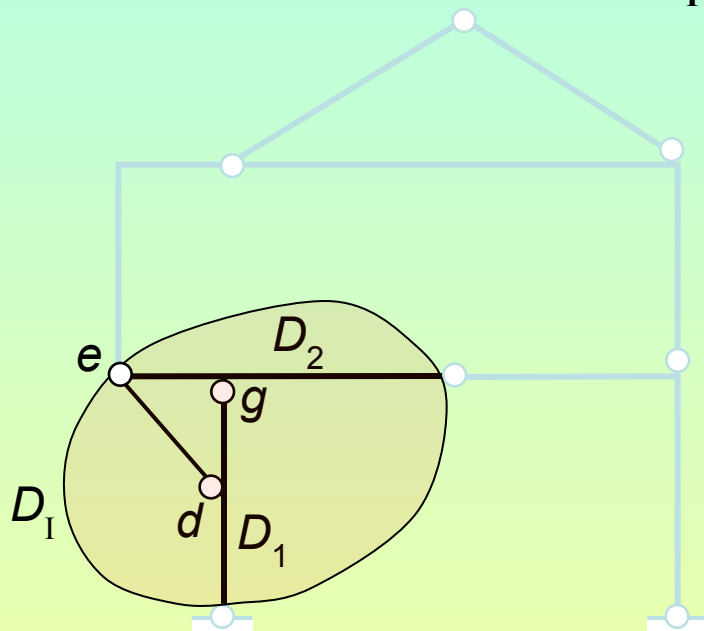
необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется.

Вывод: система *может быть* геометрически неизменяемой.

Этап 2.

Качественный (структурный) анализ – проверка правильности расположения связей

Шаг 1: соединение двух дисков (D_1 и D_2) по способу 2б – с помощью шарнира g и линейной связи ed , ось которой не проходит через центр шарнира. Результат – диск D_I : $D_I = D_1 + D_2$ (по способу 2б).



Вариант:

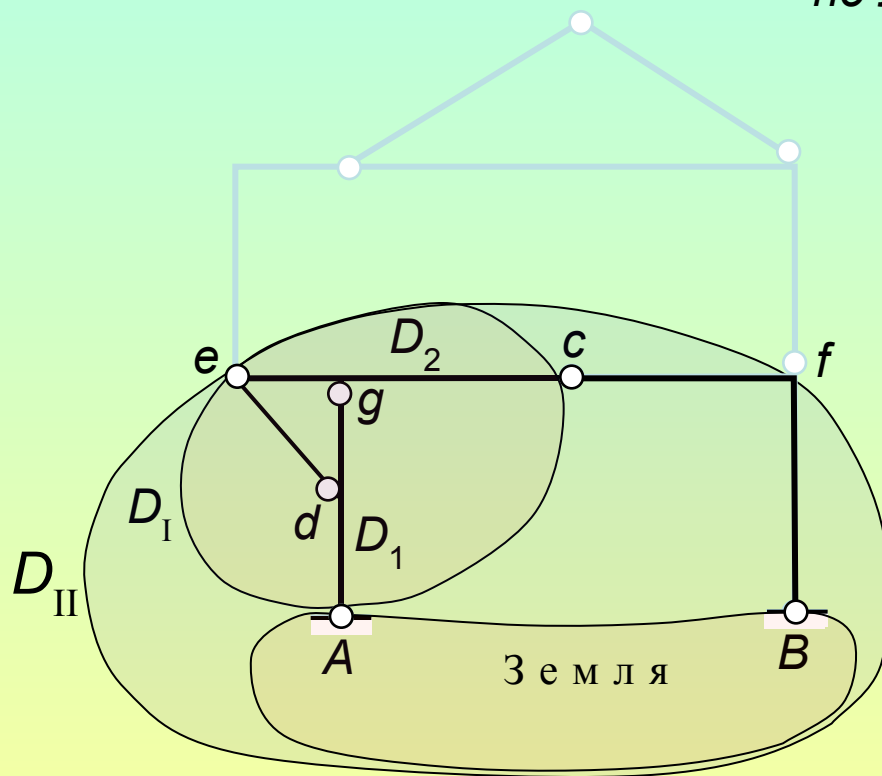
соединение трёх дисков (D_1 , D_2 и диск ed) по способу 3б – с помощью трёх цилиндрических шарниров в точках e , d и g , не лежащих на одной прямой.

Результат – диск D_I :
 $D_I = D_1 + D_2 + ed$
(по способу 3б).

Этап 2. Качественный (структурный) анализ – проверка правильности расположения связей

Шаг 2: соединение трёх дисков (D_I , cfB и диск «Земля») по способу 3б – с помощью трёх цилиндрических шарниров в точках A , c и B , не лежащих на одной прямой.

Результат – диск D_{II} :
 $D_{II} = D_I + cfB + \text{«Земля»}$
(по способу 3б).



Примечание:
поскольку в диск D_{II}
входит диск «Земля»,
то D_{II} является
геометрически
неизменяемой
системой:

$$D_{II} \equiv ГНС_1$$

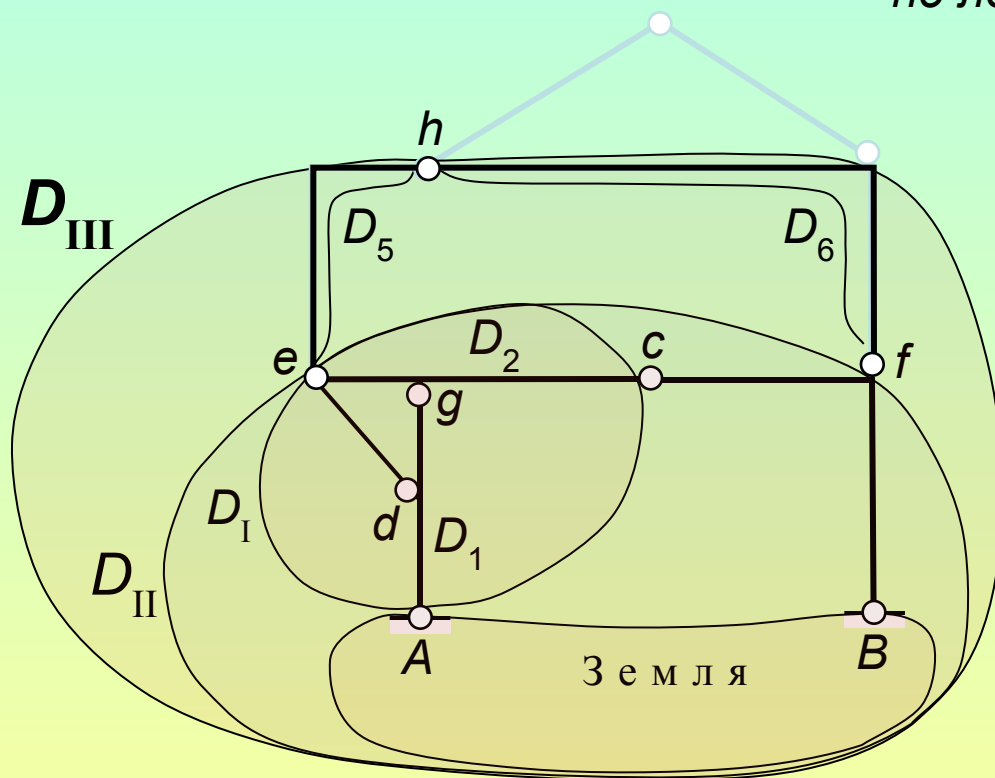
Этап 2.

Качественный (структурный) анализ – проверка правильности расположения связей

Шаг 3: соединение трёх дисков (D_{II} , D_5 и D_6) по способу 3б – с помощью трёх цилиндрических шарниров в точках e , h и f , не лежащих на одной прямой.

Результат – диск D_{III} :
$$D_{III} = D_{II} + D_5 + D_6$$

(по способу 3б).



Примечание:
поскольку в диск D_{III}
входит диск «Земля»,
то D_{III} является
геометрически
неизменяемой
системой:

$$D_{III} \equiv \Gamma H C_2$$

Этап 2.

Качественный (структурный) анализ – проверка правильности расположения связей

Шаг 4: соединение двух дисков (D_{III} и D_7) по способу 2б – с помощью цилиндрического шарнира в точке h и линейной связи ed , ось которой не проходит через центр шарнира.

Результат – диск D_{IV} :

$$D_{IV} = D_{III} + D_7 \text{ (по способу 26).}$$

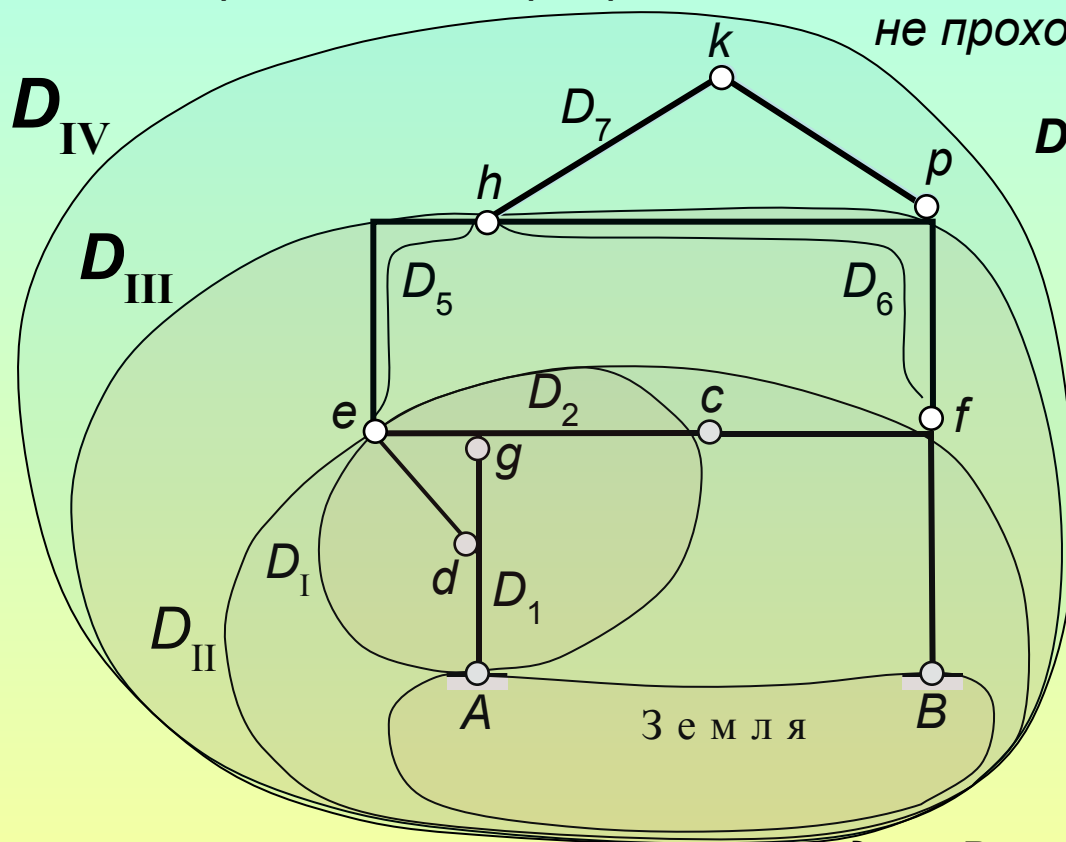
Варианты:

а) соединение *трёх* дисков (D_{III} , hk и kp) по способу 3б – с помощью *трёх* цилиндрических шарниров h , k и p , не лежащих на одной прямой;

б) присоединение точки k к диску D_{III} по способу 1 – с помощью двух связей 1-го типа (hk и kp).

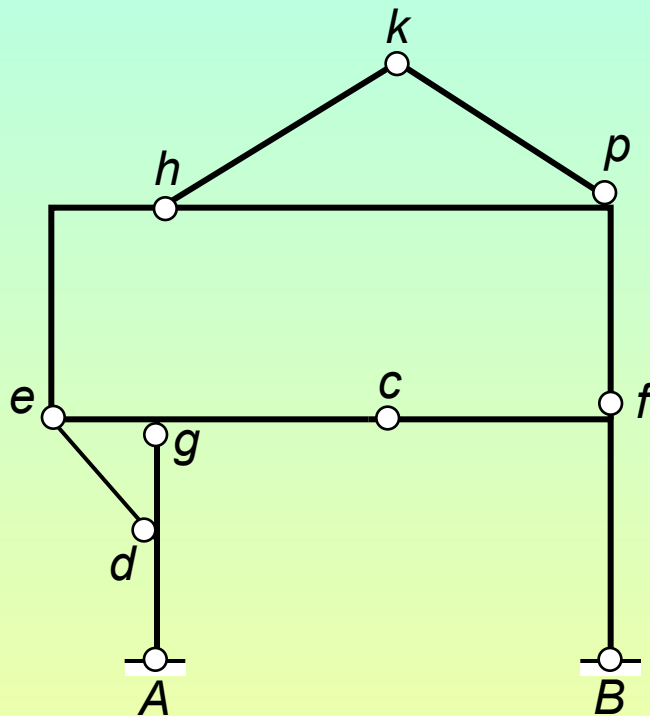
Примечание:

поскольку в диск D_{IV} входит диск «Земля», то D_{IV} является геометрически неизменяемой системой: $D_{IV} \equiv \text{ГНС}$



Резюме:

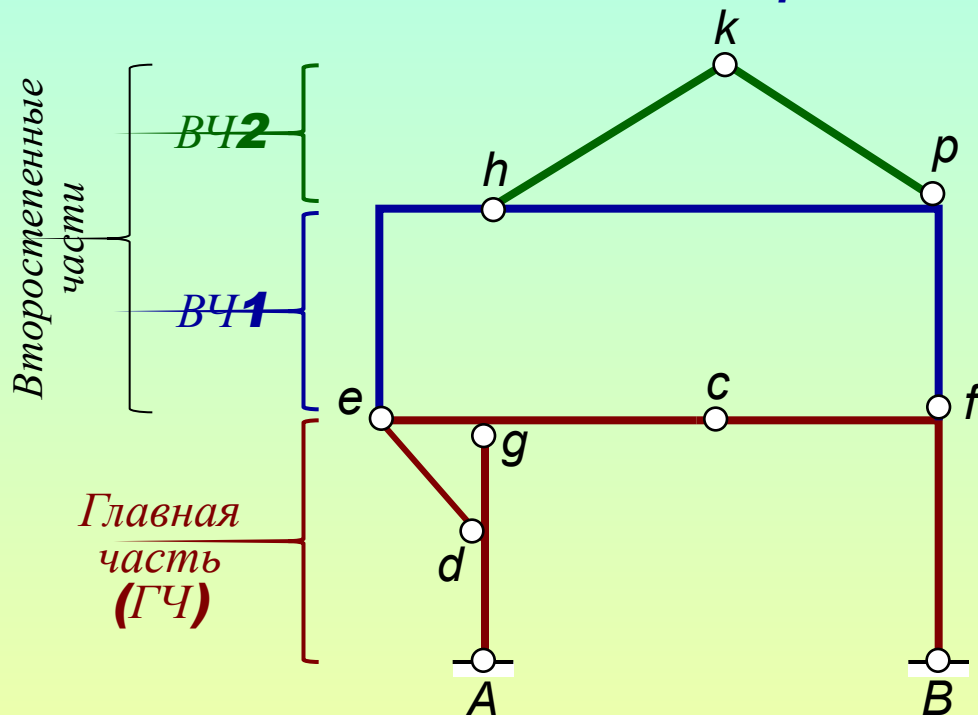
- а) в системе имеется достаточное число связей, избыточных связей нет ($W = 0$);
- б) структура системы правильная – отсутствуют дефекты расположения связей.



Вывод:
система
геометрически
неизменяемая
и
статически
определимая.

Дополнительные сведения, вытекающие из структурного анализа

Поскольку в процессе синтеза системы на нескольких шагах (*более одного*) последовательно образуются геометрически неизменяемые системы (ГНС₁, ГНС₂, ГНС), то рассматриваемая система может квалифицироваться как *составная*, с выделением в ней *главной* и *второстепенных* частей:



**Практическая
рекомендация
по последовательности
расчёта:**

для определения реакций
связей рассматривается
равновесие частей
системы, начиная
с самой второстепенной
и заканчивая главной:

$VЧ2 \rightarrow VЧ1 \rightarrow ГЧ$

(то есть в порядке,

обратном
последовательности
синтеза).

Системы, для которых качественный (структурный) анализ расчётной схемы может быть полностью выполнен с использованием только типовых способов (приёмов) геометрически неизменяемого соединения дисков, называются системами с простой структурой.

Системы, для которых качественный (структурный) анализ расчётной схемы не может быть полностью выполнен с использованием только типовых способов (приёмов) геометрически неизменяемого соединения дисков, называются системами со сложной структурой.

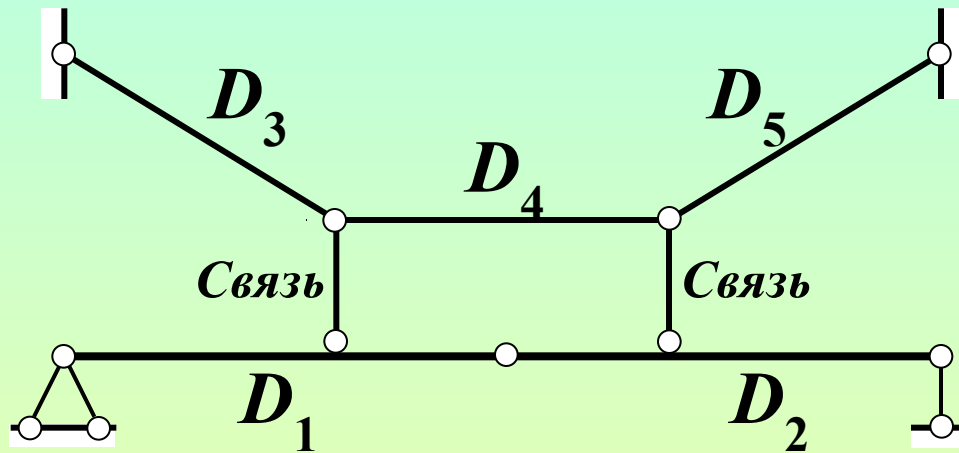
В качественном анализе систем со сложной структурой применяются:

- исследование кинематической природы связей (всех или части) по критерию $\delta_s \neq 0$ – ? ;
- проверка по аналитическому признаку геометрической неизменяемости $\text{Det}(A) \neq 0$ – ? ;
- способ замены связей.

Пример

кинематического анализа системы со сложной структурой

Этап 1. Количественный анализ



$$D = 5; \quad \Pi = 0; \quad H = 3; \quad C = 2; \quad C_0 = 7$$

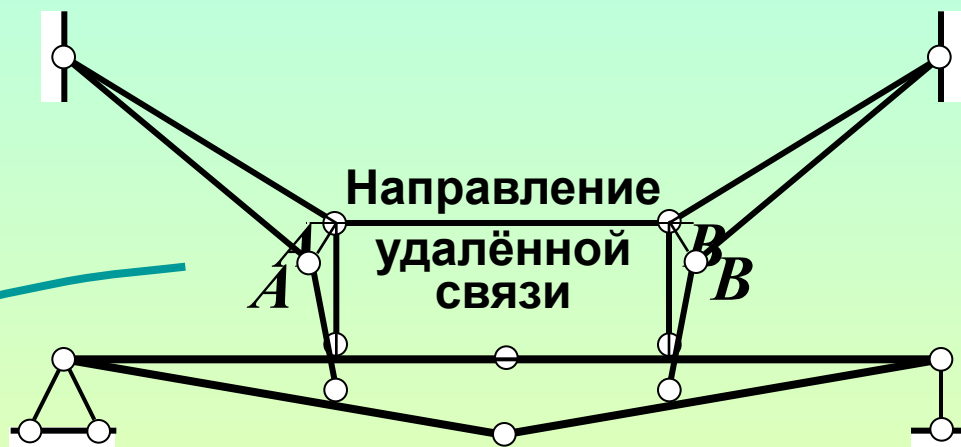
$$W = 3 \cdot D - (3 \cdot \Pi + 2 \cdot H + C + C_0) = \\ = 3 \cdot 5 - (3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 2 + 7) = 0 -$$

необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется;
система может быть геометрически неизменяемой

Пример

кинематического анализа системы со сложной структурой

Этап 2. Качественный (структурный) анализ



Выполнить синтез системы с помощью типовых способов геометрического неизменяемого соединения дисков не удаётся, поэтому исследуется кинематическая природа связей системы: система превращается в механизм, удаляется стержень AB , которому задается возможное перемещение как линейная связь 1-го типа

Пример

кинематического анализа

системы со сложной структурой

Этап **2. Качественный (структурный) анализ**

Можно использовать план перемещений узлов:



Определяется перемещение δ_S по направлению удалённой связи в данном случае $\delta_S = \delta_{S,l} + \delta_{S,r} \neq 0$ (относительно)

линейного перемещения точек A и B по направлению

Вывод: удалённая связь — необходимая, следовательно, структура системы правильная,

система геометрически неизменяемая.

Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы;
для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках*);
для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши
и выбрать «Перейти к слайду 29»)

1. Что такое кинематический анализ? Его назначение? (2)
2. Назовите основные понятия кинематического анализа. (3)
3. Дайте определение диска. (3) 3. Дайте определение диска. (3) Что может быть диском? (4)
4. Что такое диск «земля» и какими свойствами он наделяется? (см. [1])
5. Дайте определение связи. (3) По каким признакам и как классифицируются связи? (5)
6. Перечислите типы связей плоских систем и для каждого из них дайте кинематическую и статическую характеристики. (6)
7. Каким комбинациям простых связей кинематически эквивалентны сложные связи разных типов? (см. [1])
8. Дайте разные варианты изображения связей плоских систем. (6)
9. Какова роль гипотезы отвердения материала в кинематическом анализе? (см. [1])
10. Что такое степени свободы (3) и какие величины могут выступать в качестве степеней свободы? (8)
11. Сколько степеней свободы имеет жёсткий диск в пространстве и в плоскости? А точка? (8)
12. Ответы на какие главные вопросы даются в ходе кинематического анализа? (17)
13. Какие системы называются геометрически неизменяемыми? Геометрически изменяемыми? Мгновенно изменяемыми? (9)
14. Назовите этапы кинематического анализа. (11)
15. Дайте определение количественного анализа. (11)
16. Что означают символы n_{Δ} и n_c (11) и как вычисляются обозначаемые ими величины? (12)
17. Какие припайки (шарниры) называются сложными (кратными)? Как определяется число эквивалентных им простых припаяк (шарниров)? (12)

*) Только в режиме «Показ слайдов»

Контрольные вопросы

(в скобках даны номера слайдов, на которых можно найти ответы на вопросы; для перехода к слайду с ответом можно сделать щелчок мышью по номеру в скобках); для возврата к контрольным вопросам сделать щелчок правой кнопкой мыши и выбрать «Перейти к слайду 30»)*

18. Какой вид имеет необходимое условие геометрической неизменяемости системы? [\(11 \)](#)
19. Почему оно является недостаточным? (см. [1])
20. Что такое W ? Как вычисляется эта характеристика? [\(12 \)](#)
21. Какой вывод делается по результатам кинематического анализа, если получается $W > 0$? (см. [1]) А если необходимое условие неизменяемости выполняется? [\(18 \)](#)
22. Что такое качественный (структурный) анализ? [\(13 \)](#)
23. Как классифицируются простые связи по кинематическому признаку? [\(14 \)](#)
24. Дайте определения необходимой, лишней и ложной связей. [\(14 \)](#)
25. Какие геометрические параметры используются в описании кинематических признаков разных связей? [\(14 \)](#)
26. Что общего у необходимых и лишних связей? У лишних и ложных связей? В чём различия между ними? [\(14 \)](#) Что нужно делать с обнаруженными ложными связями? (см. [1])
27. Как выявляются лишние связи? (см. [1])
28. Перечислите типовые способы геометрически неизменяемого соединения дисков, объясните смысл каждого из них с указанием требований к расположению связей. [\(15 \)](#)
29. Какова последовательность действий при выполнении структурного анализа с применением типовых способов соединения дисков? (см. [1])
31. Какие выводы делаются по результатам структурного анализа системы? [\(23 \)](#)
32. Что такое система с простой структурой? [\(25 \)](#)
33. Что такое система со сложной структурой? Каковы возможные пути выполнения структурного анализа таких систем? [\(25 \)](#)
34. Какие части составной системы называются главными, а какие – второстепенными? [\(16 \)](#)

*) Только в режиме «Показ слайдов»