Трапеция и ее свойства.

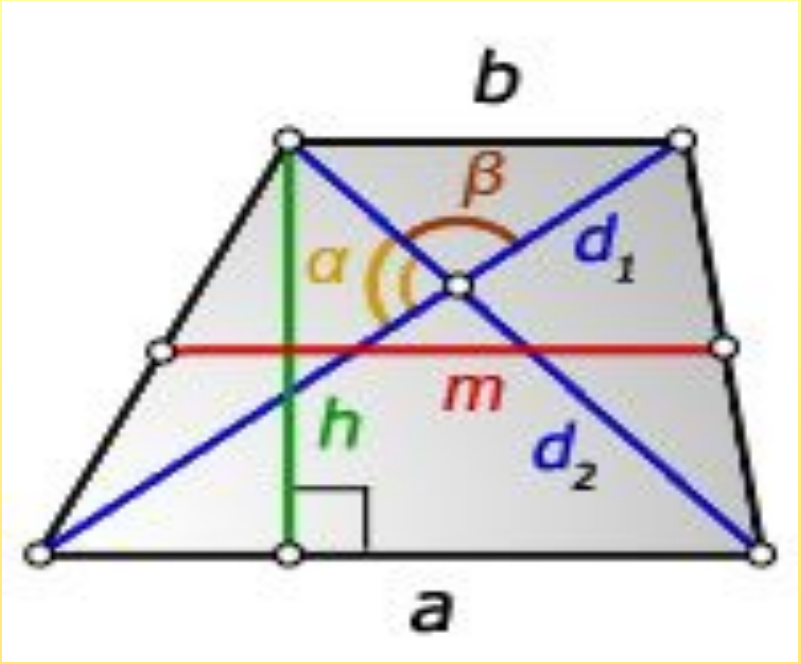
Работу выполнила учитель математики
Снегурова А.М.
МБОУ СОШ №5 г-к АНАПА.

Тот, кто учится самостоятельно, достигнет в семь раз больше того, кому все разъясняется.

Артур Гитерман.

Элементы трапеции

- ***Трапеция*** — четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две стороны не параллельны.
- ***Элементы трапеции:***
- **Основания трапеции** - параллельные стороны
- **Боковые стороны** - две другие стороны
- **Средняя линия** - отрезок, соединяющий середины боковых сторон.
- **Вторая средняя линия** - отрезок, соединяющий середины оснований.
- **Диагонали трапеции** – это отрезки, соединяющие противоположные вершины трапеции.
- **Высота трапеции** - это расстояние между основаниями **.**



a - нижнее основание

b - верхнее основание

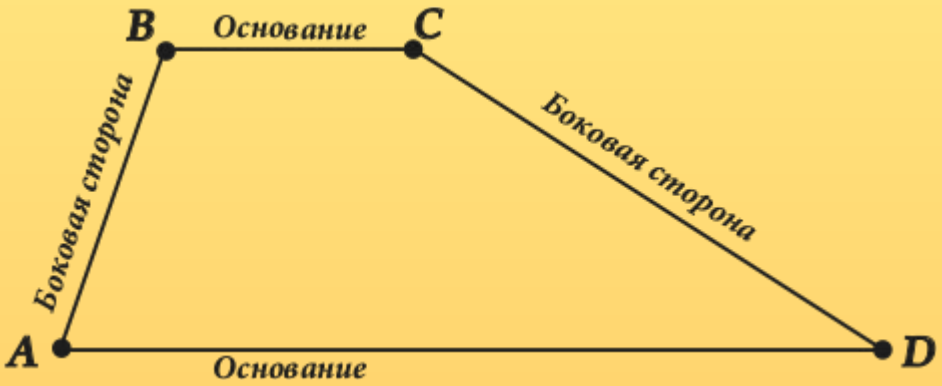
α, β - углы между диагоналями

h - высота трапеции

m - средняя линия трапеции

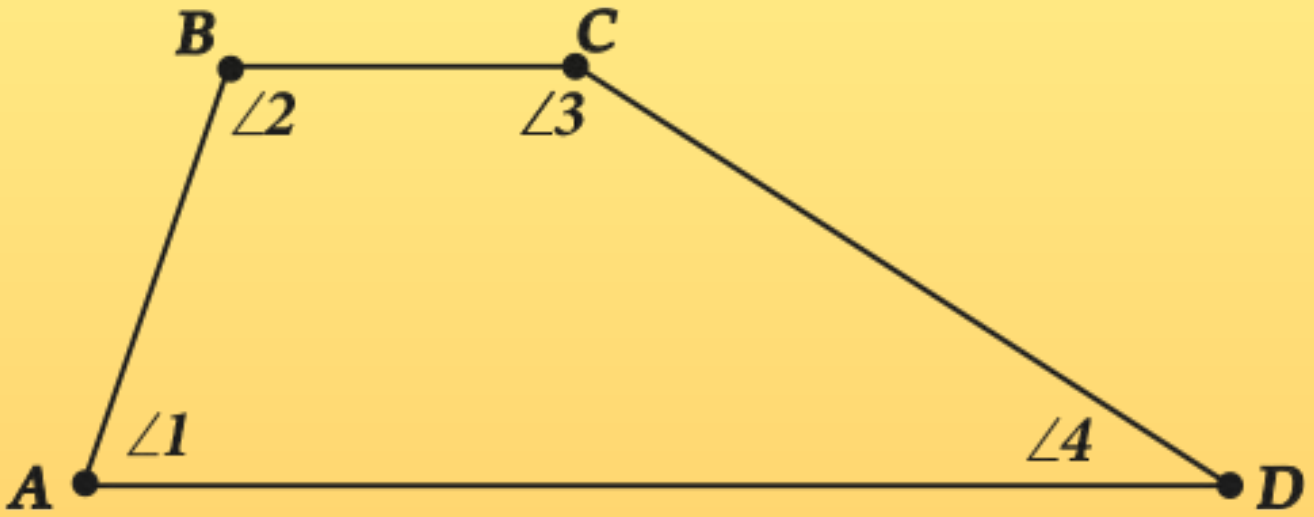
S - площадь трапеции

d_1 , d_2 - диагонали трапеции

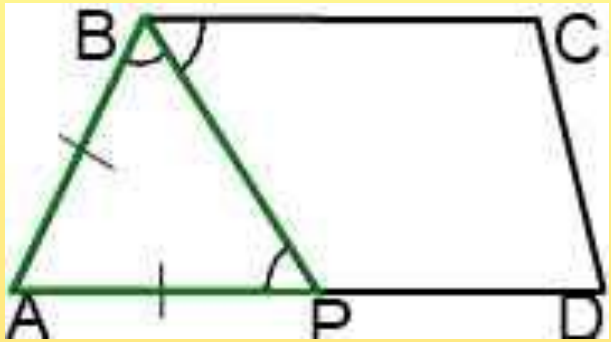


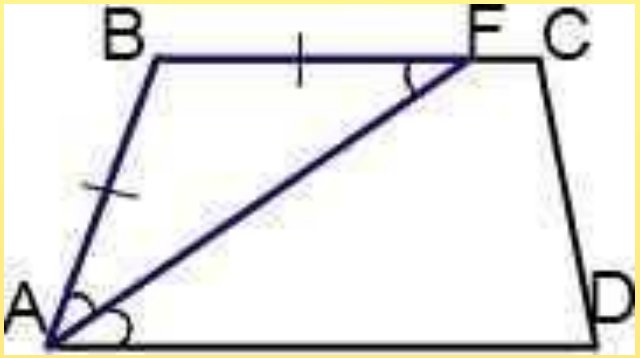
Сумма углов при каждой боковой стороне равна 180^0

- ∠1+∠2=180
  ◦
- ∠3+∠4=180◦

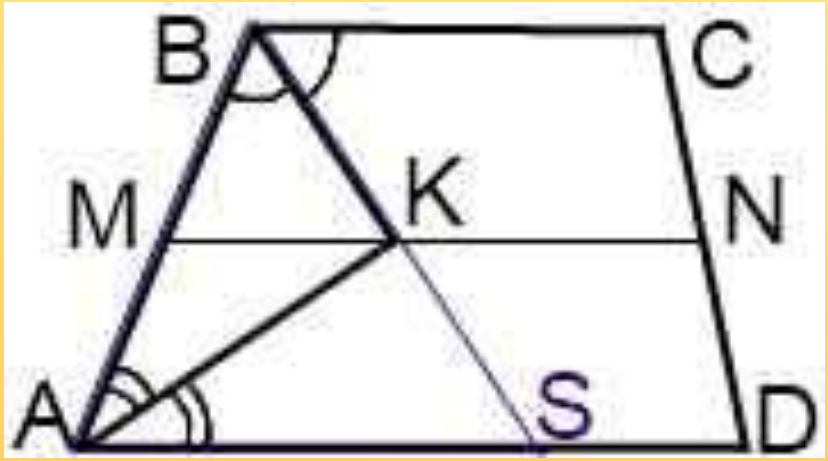


Биссектриса любого угла отсекает на ее основании (или на ее продолжении)отрезок, равный боковой стороне.

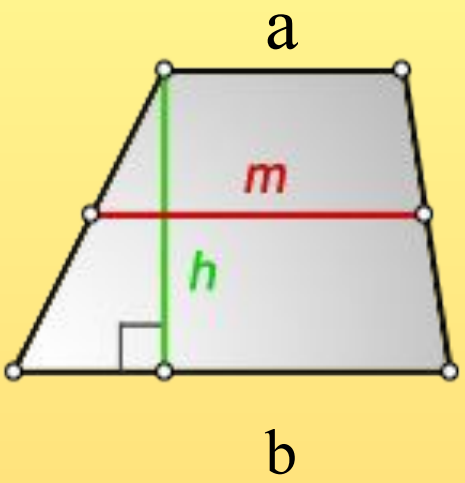




Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются под прямым углом.

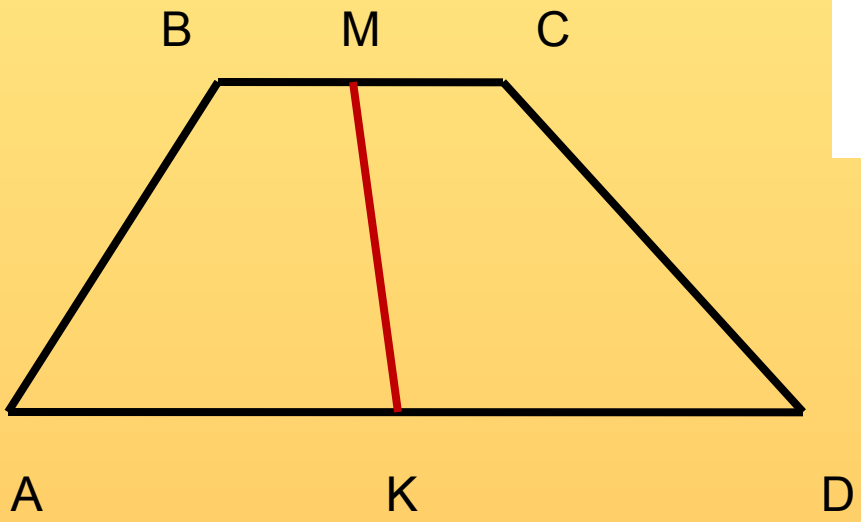


Средняя линия трапеции равна полусумме оснований и параллельна им.



$$\mathbf{m} = \frac{a+b}{2} = \frac{S}{h}$$

Если сумма углов при любом основании трапеции равна 90 градусов, то отрезок, соединяющий середины оснований равен их полуразности:

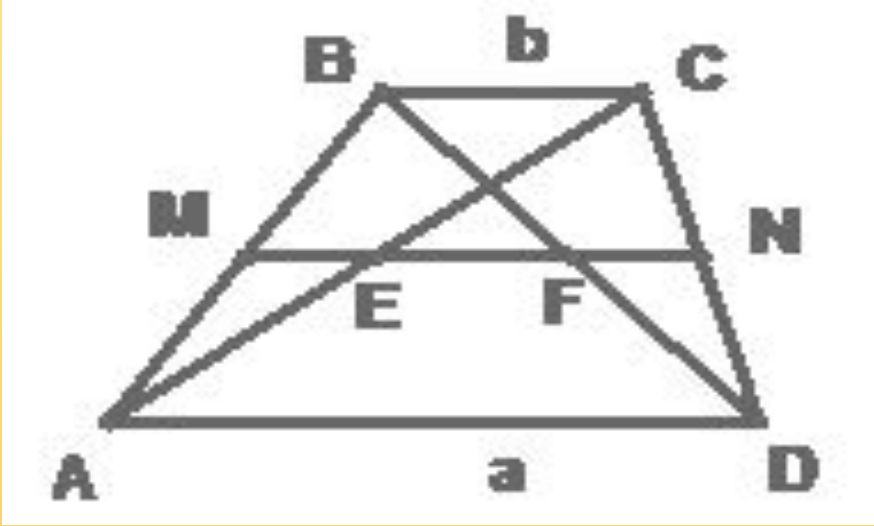


Если $\angle A + \angle D = 90°$, то

$$MK = \frac{AD - BC}{2}$$

Средняя линия

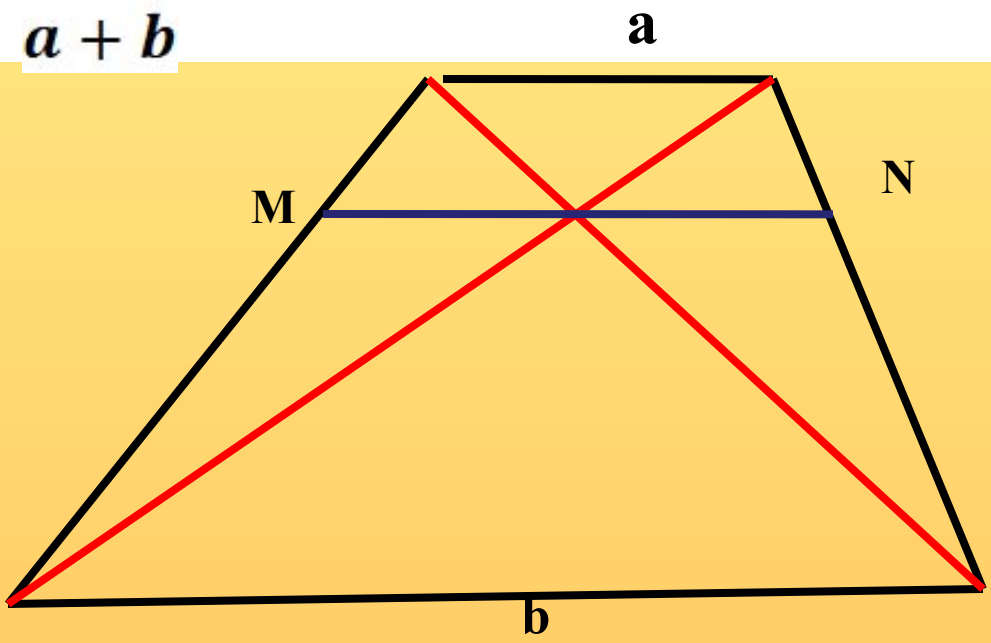
$$MN = \frac{a+b}{2}; \quad FN = ME = \frac{b}{2}; \quad EN = MF = \frac{a}{2}; \quad EF = \frac{a-b}{2}$$



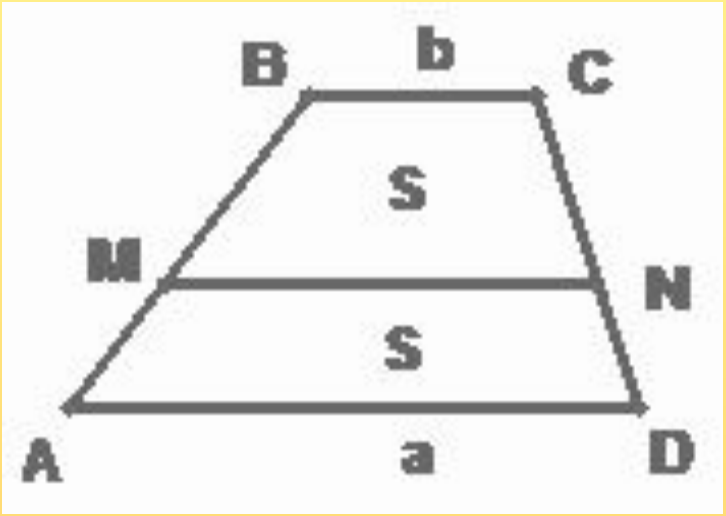
Линия, проходящая через точку пересечения диагоналей

Отрезок, параллельный основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей, делится последней пополам и равен среднему гармоническому длин оснований трапеции (формула Буракова).

$$MN = \frac{2ab}{a+b}$$



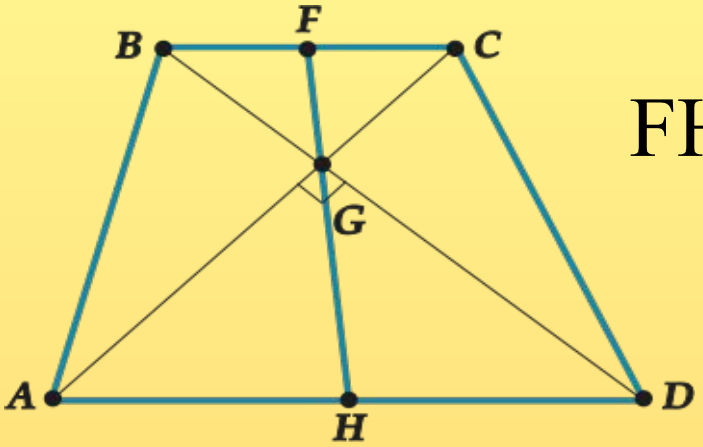
Линия, делящая площадь трапеции на равновеликие части



$$MN = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

В трапеции с перпендикулярными диагоналями:

если BF = FC и AH = HD



$$FH = \frac{AB + CD}{2}$$

Если провести отрезок, концы которого лежат на основаниях трапеции и проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции ,то соотношение составляющих его отрезков от стороны основания до точки пересечения диагоналей будет равно соотношению оснований трапеции. Это справедливо и для диагоналей и для высоты.

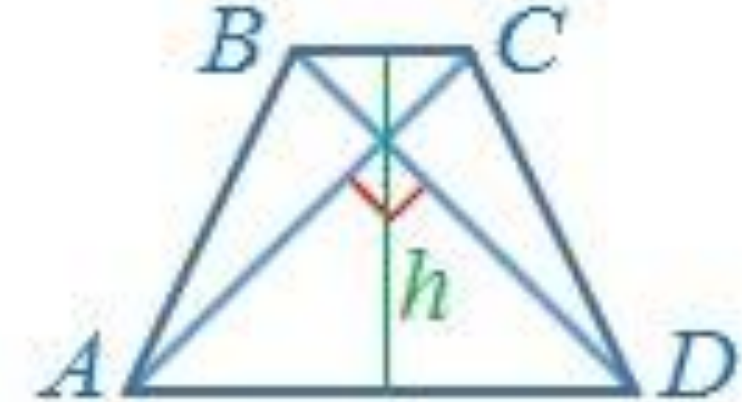
$$\frac{FG}{GH} = \frac{BC}{AD} = \frac{BC}{AD}$$

А площадь такой трапеции равна квадрату высоты : $S_{ABCD} = h^2$

В равнобедренной трапеции равны не только боковые стороны, но и диагонали:

AC = BD

h = m



$$h = \frac{AB + CD}{2}$$

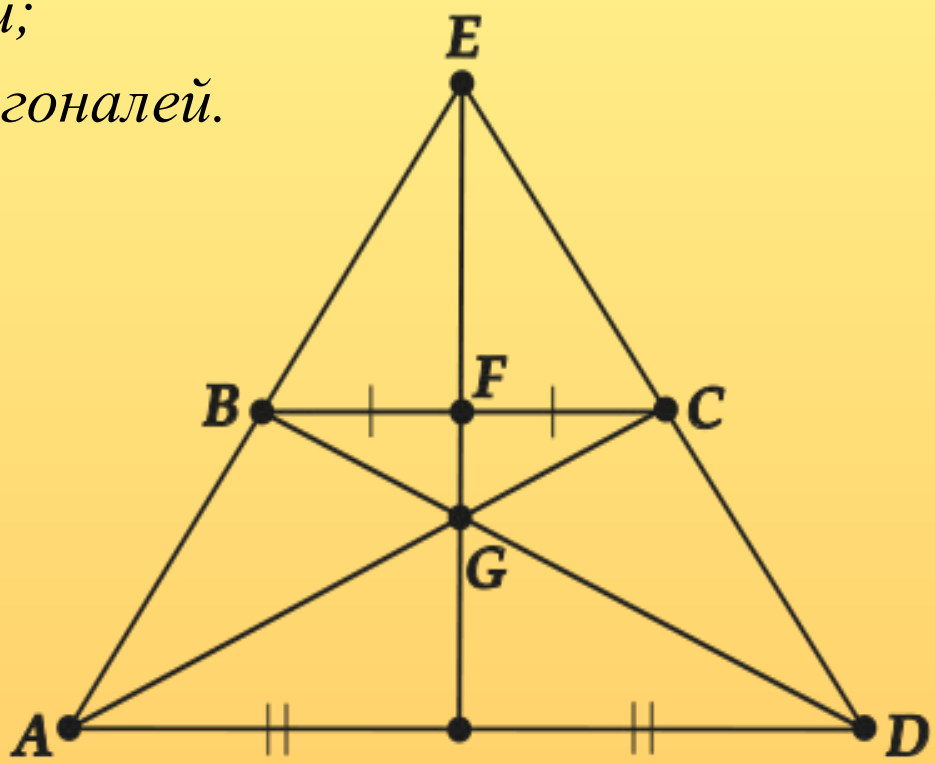
Если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то средняя линия равна высоте трапеции.

В любой трапеции следующие четыре точки лежат на одной прямой:

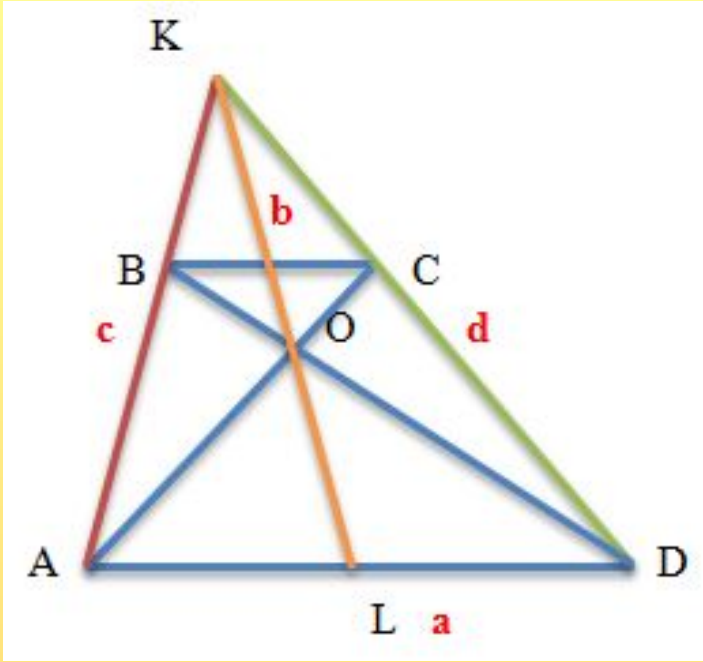
1) *E – точка пересечения продолжений боковых сторон;*

2)F и H – середины оснований;

3) G – точка пересечения диагоналей.



Если продлить стороны трапеции в сторону меньшего основания, то точка пересечения сторон будет **совпадать с прямой линией, которая проходит через середины оснований**.



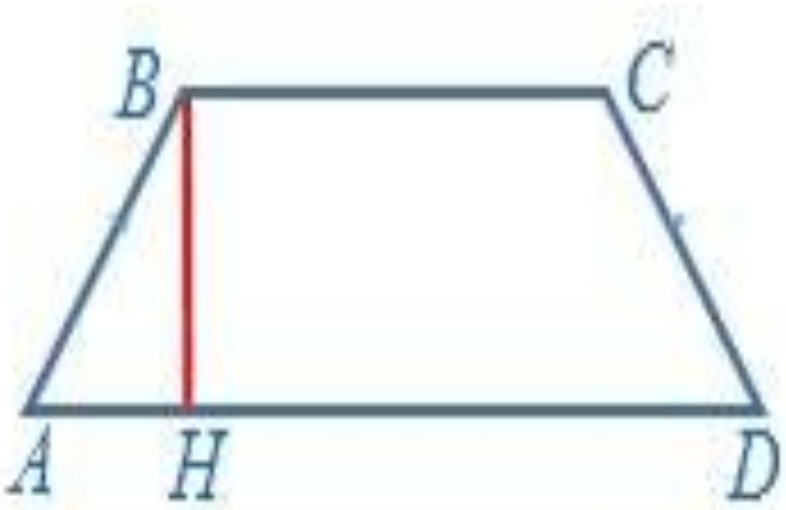
Таким образом, любая трапеция может быть достроена до треугольника.

При этом:

Треугольники, образованные основаниями трапеции с общей вершиной в точке пересечения продленных боковых сторон являются подобными.

Прямая, соединяющая середины оснований трапеции, является, одновременно, медианой построенного треугольника

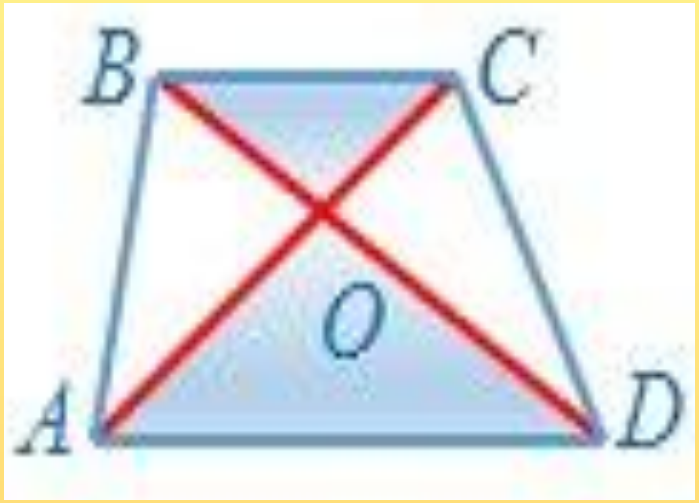
Высота, проведенная из вершины тупого угла в равнобокой трапеции делит большее основание на два отрезка:



$$AH = \frac{AD - BC}{2};$$

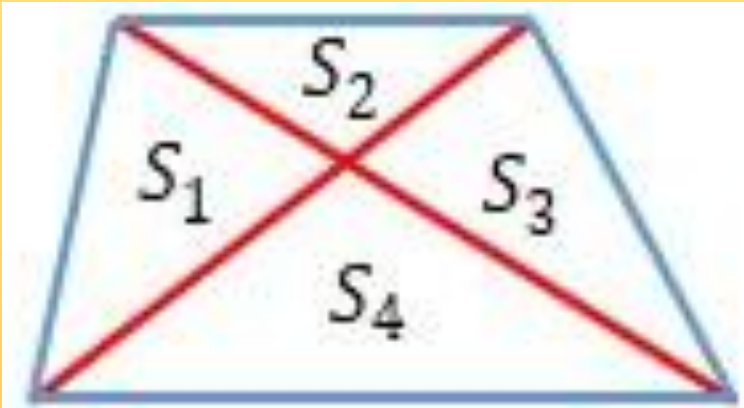
$$HD = \frac{AD + BC}{2}$$

Треугольники, образованные основаниями и диагоналями, подобны. Их коэффициент подобия k равен отношению большего основания к меньшему снованию трапеции.



$$\frac{AD}{BC} = k$$

$$\frac{S_{AOD}}{S_{BOC}} = k^2$$

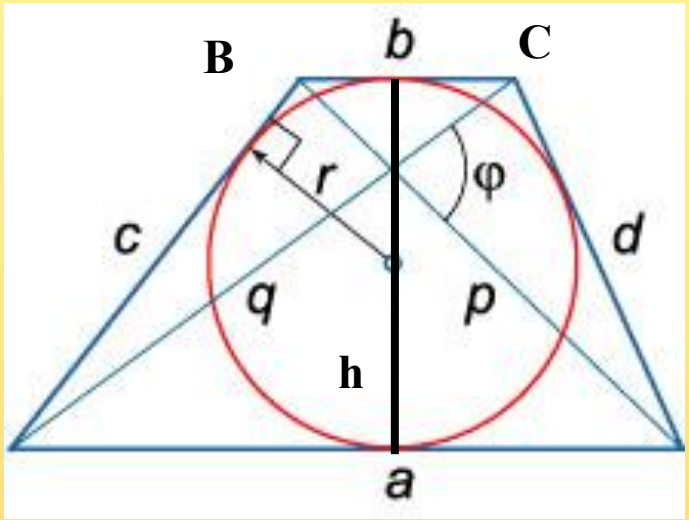


$$S_1 = S_3$$

$$S_1^{\,2} = S_2 \cdot S_4$$

Если в произвольной трапеции сумма оснований равна сумме боковых сторон, то в нее можно вписать окружность:

$$a+b = c+d$$



Диаметр вписанной в трапецию окружности равен высоте трапеции, радиус — половине высоты:

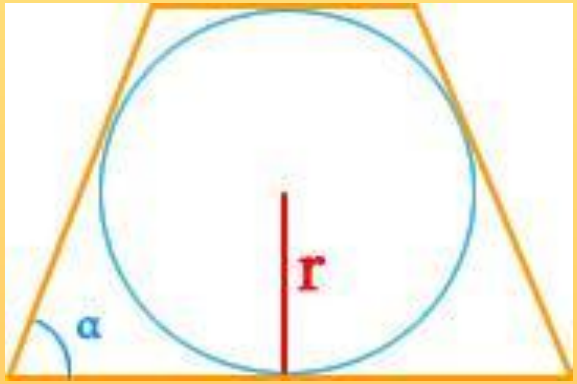
d=h или **r =** $\frac{h}{2}$

Если в трапецию можно вписать окружность, то квадрат высоты равен произведению оснований

$$h^2 = BC \cdot AD$$

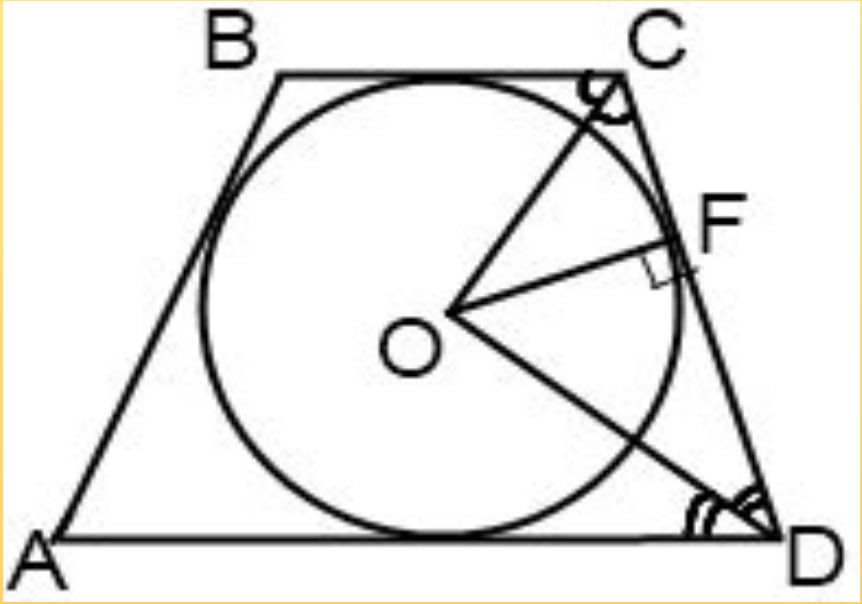
Площадь трапеции равна отношению квадрата радиуса вписанной окружности умноженное на четыре и синуса острого угла между боковой стороной и основанием

$$S = \frac{4r^2}{\sin \alpha}$$



В трапецию можно вписать окружность, если:

- сумма длин боковых сторон равна сумме длин оснований: AB + CD = BC + AD;
- трапеция равнобедренная;
- боковая сторона трапеции видна из центра вписанной окружности под прямым углом.



Формулы в помощь:

*Средняя линия через площадь и высоту: $m = \frac{S}{h}$

*Высота через площадь и длины оснований: $h = \frac{2S}{a+b}$

*Высота через площадь и длину средней линии: $h = \frac{2S}{m}$

*Площадь через среднюю линию и высоту **S= h·m**

*В равнобедренной трапеции длина диагонали равна **d =** $\sqrt{c^2 + ab}$

где c – боковая сторона, a и b – основания или

d = $\sqrt{h^2 + m^2}$

*Длина основания через среднюю линию и другое основание

a = 2m - b и b = 2m - a

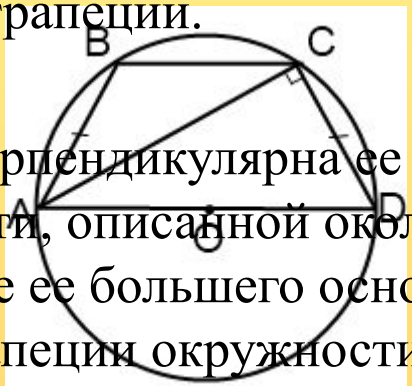
Описанная окру́жность многоугольника — окружность, содержащая все вершины многоугольника. Центром является точка (принято обозначать {O}) пересечения серединных перпендикуляров к сторонам многоугольника.

- Радиус окружности, описанной около трапеции, можно найти как радиус окружности, описанной около из одного из двух треугольников, на которые трапецию делит ее диагональ.
- Где находится центр окружности, описанной около трапеции? Это зависит от угла между диагональю трапеции и ее боковой стороной.
-

Окружность, описанная около трапеции.

Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противолежащих углов равна 180º. Отсюда следует, что *вписать в окружность можно только равнобокую трапецию*.

Радиус описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров с сторонам трапеции.



Если диагональ трапеции перпендикулярна ее боковой стороне, то центр окружности, описанной около трапеции, лежит на середине ее большего основания. Радиус описанной около трапеции окружности в этом случае равен половине ее большего основания:

$$R = \frac{1}{2}AD$$