

Основы гидромеханики

механика жидкости и газа

Основные понятия и определения

Физические свойства жидкостей

Элементы гидростатики

Элементы гидродинамики



Гидромеханика

 - наука, изучающая равновесие и движение жидкости, а также взаимодействие между жидкостью и твердыми частицами, погруженными в жидкость полностью или частично.

 По принципу целенаправленности гидромеханические процессы можно разделить на:

1. Процессы перемещения потоков в трубопроводах и аппаратах;
2. Процессы, протекающие **с разделением** неоднородных систем (осаждение, фильтрование, центрифугирование)
3. Процессы, протекающие **с образованием** неоднородных систем (перемешивание, псевдоожижение и др.)



Законы гидромеханики и их практические приложения изучают в

ГИТАВЛИКЕ



Гидравлика

```
graph TD; A[Гидравлика] --> B["- наука, изучающая законы равновесия и движения жидкостей"]; B --> C[Гидростатика]; B --> D[Гидродинамика]; C --> E["Учение о равновесии жидкостей"]; D --> F["Учение о движении жидкостей"];
```

- наука, изучающая
законы равновесия
и движения жидкостей

Гидростатика

Учение о
равновесии
жидкостей

Гидродинамика

Учение о
движении
жидкостей

Жидкости

- физические тела, которые легко изменяют свою форму под действием приложенных сил.



Капельны
е



Газообра
зные

характеризуются малой сжимаемостью и
относительно небольшим изменением объема при
изменении температуры.



Молекулярное строение

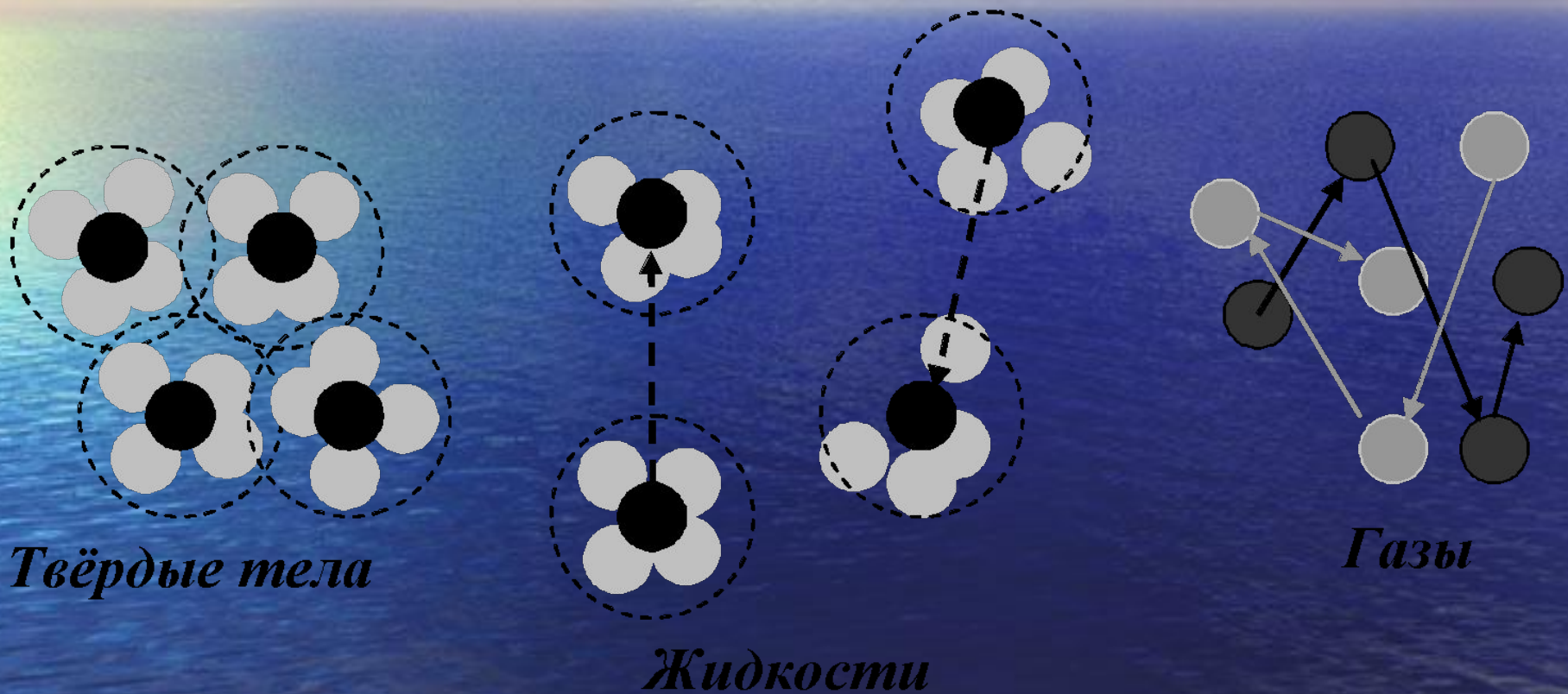


Рисунок 1

Предмет гидравлики

- Гидравлика— наука о движении и покое воды и других жидкостей. Жидкость в гидравлике представляют как сплошную среду, легко изменяющую форму под действием внешних сил.
- Сплошная среда— это масса, физические и механические параметры которой являются функциями координат в выбранной системе отсчета. Молекулярное строение жидкостей заменяется сплошной средой той же массы.

Понятие жидкости. Свойства капельной, некапельной и идеальной жидкости

Жидкостью называется физическое тело, обладающее текучестью и не имеющее своей формы, но принимающее форму того сосуда, в котором оно находится.

Текучестью называется способность жидкости изменять свою форму, не дробясь на части, под действием даже небольших сил.

Различают два вида жидкостей:
капельные и некапельные (газообразные).

- **Капельные жидкости:** оказывают большое сопротивление изменению объема и трудно поддаются сжатию.
- При изменении давления и температуры их объем изменяется весьма незначительно.
- Любая капельная жидкость может переходить в газообразное состояние при определенной температуре и давлении.
- Практически не оказывают заметного сопротивления растягивающим усилиям.
- Оказывают существенное сопротивление сдвигающим силам.

Некапельные (газообразные) жидкости

- Изменяют свой объем в зависимости от этих же факторов в значительной степени.
- При понижении температуры и повышении давления могут переходить в жидкое состояние.

Идеальная жидкость — это жидкость, лишенная вязкости ($\mu = 0$). Эту модель используют для упрощения расчетов в случае, когда силами вязкости можно пренебречь.

● Физические свойства жидкости

1 – Плотность $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad [\rho] = \text{кг/м}^3$

$$\rho = \rho(p, T)$$

$$pV = nRT; \quad (n = m/M) \Rightarrow$$

$$\frac{p}{\rho} = R_0 T \quad (R_0 = R/M) \quad R = 8,314 \quad \text{Дж/моль} \cdot \text{К}$$

2 – Сжимаемость жидкости

определяется производной $\partial \rho / \partial p$,

Несмотря на значительную сжимаемость газов по сравнению с жидкостями при скоростях в средах $v < 0,1c$ (c — скорость звука в среде), при решении конкретных задач сжимаемостью можно пренебречь. Поэтому понятие “несжимаемая жидкость” нашло широкое применение.

$$\beta = -\frac{\Delta V}{V \Delta p} = \frac{\Delta \rho}{\rho \Delta p} \Rightarrow \beta = \frac{\partial \rho}{\rho \partial p} \quad E_0 = 1/\beta$$

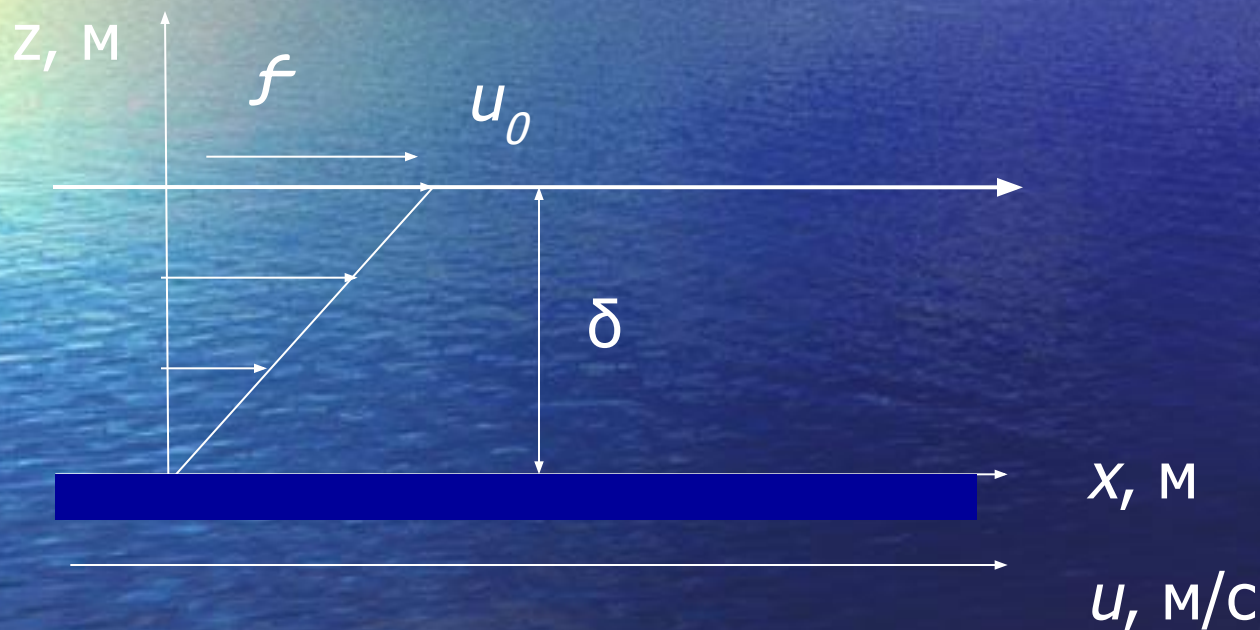
$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \Rightarrow c = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}$$

$$c_{\text{возд}} = 330 \text{ м/с}; \quad c_{\text{вод}} = 1414 \text{ м/с}; \quad \text{Ma} = u/c$$

скорость распространения малых возмущений давления в данной среде,

ВЯЗКОСТЬ ИЛИ ВНУТРЕННЕЕ ТРЕНИЕ В ЖИДКОСТЯХ

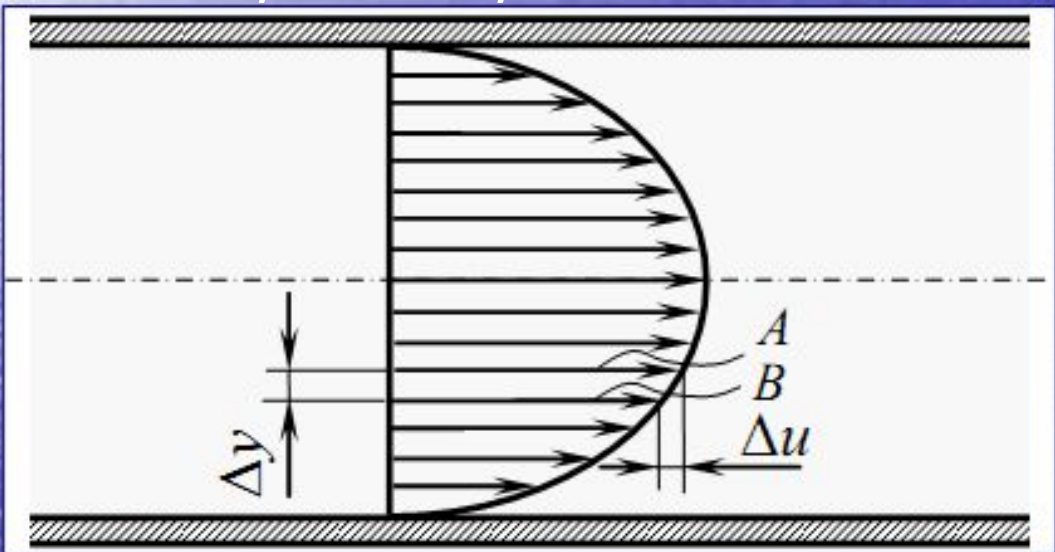
Характеризует ее способность сопротивляться
сдвиговым усилиям.



$$f = \mu S u_0 / \delta$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dz}$$

где μ – коэффициент пропорциональности или динамический коэффициент вязкости.
Единица измерения – $\text{Па} \cdot \text{с}$; Пуаз (П):
 $1 \text{ П} = 0,1 \text{ Па} \cdot \text{с}$; $1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 10 \text{ П}$



На практике чаще используется
кинематический коэффициент вязкости

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$1 \text{ стокс} = 1 \frac{\text{пуаз}}{\text{г/см}^3} = 1 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}.$$



3

$$\tau = \mu \frac{du}{dz}$$

ньютоновская (вода, керосин, спирт, газы)

1

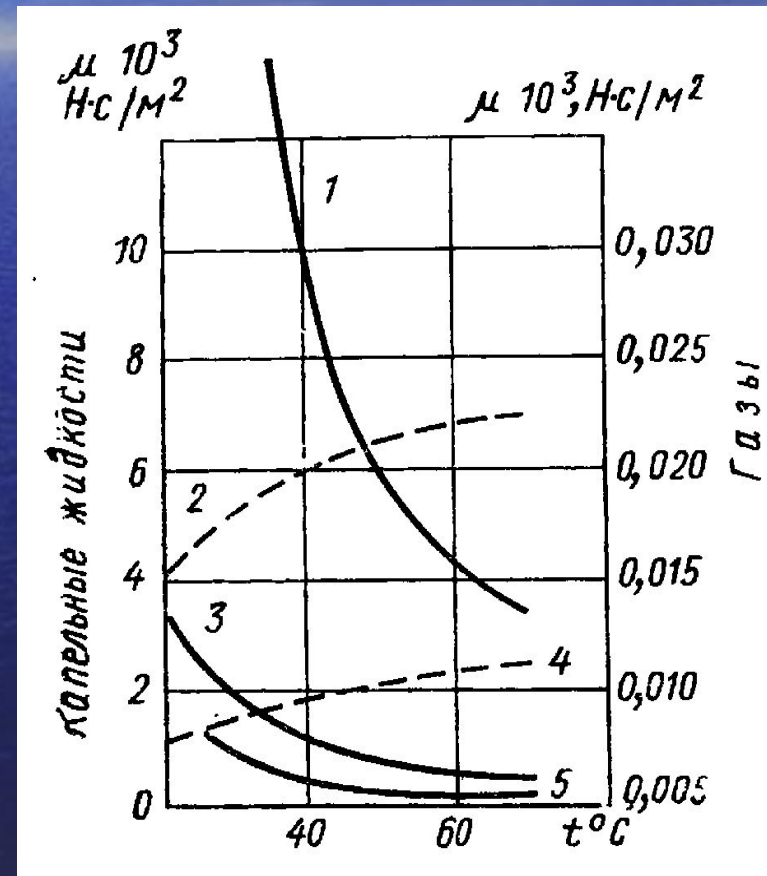
$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{du}{dz}$$

вязкопластическая или бингамовская (глинистые и цементные р-ры; пасты; пена; масл. краски)

2, 4

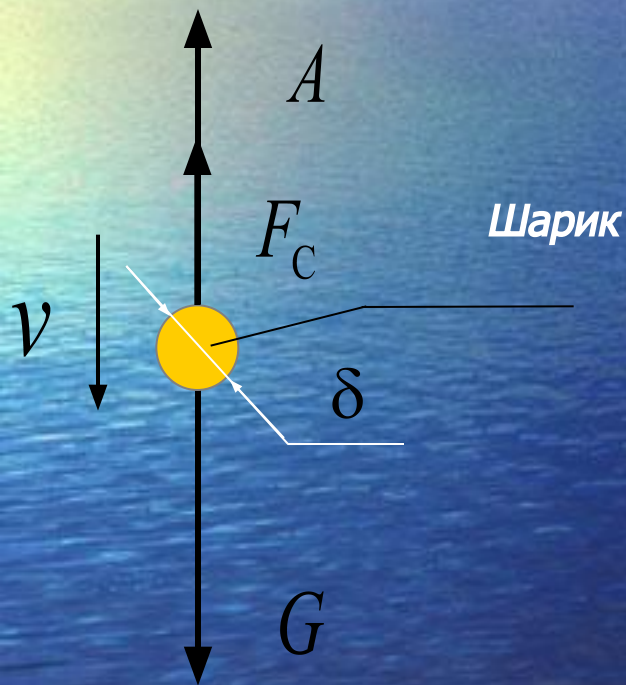
$$\tau = C \left(\frac{du}{dz} \right)^n$$

2 – псевдопластическая (суспензии из ассим. част.; р-ры полимеров; еллоулоза);
4 – дилатантная (клейстер, крахмал)



1 – масло; 2 – воздух; 3 – керосин; 4 – водород; 5 – вода

Вязкость жидкости определяется экспериментально с помощью приборов, которые называются вискозиметрами. Примером такого прибора может служить вискозиметр Стокса.

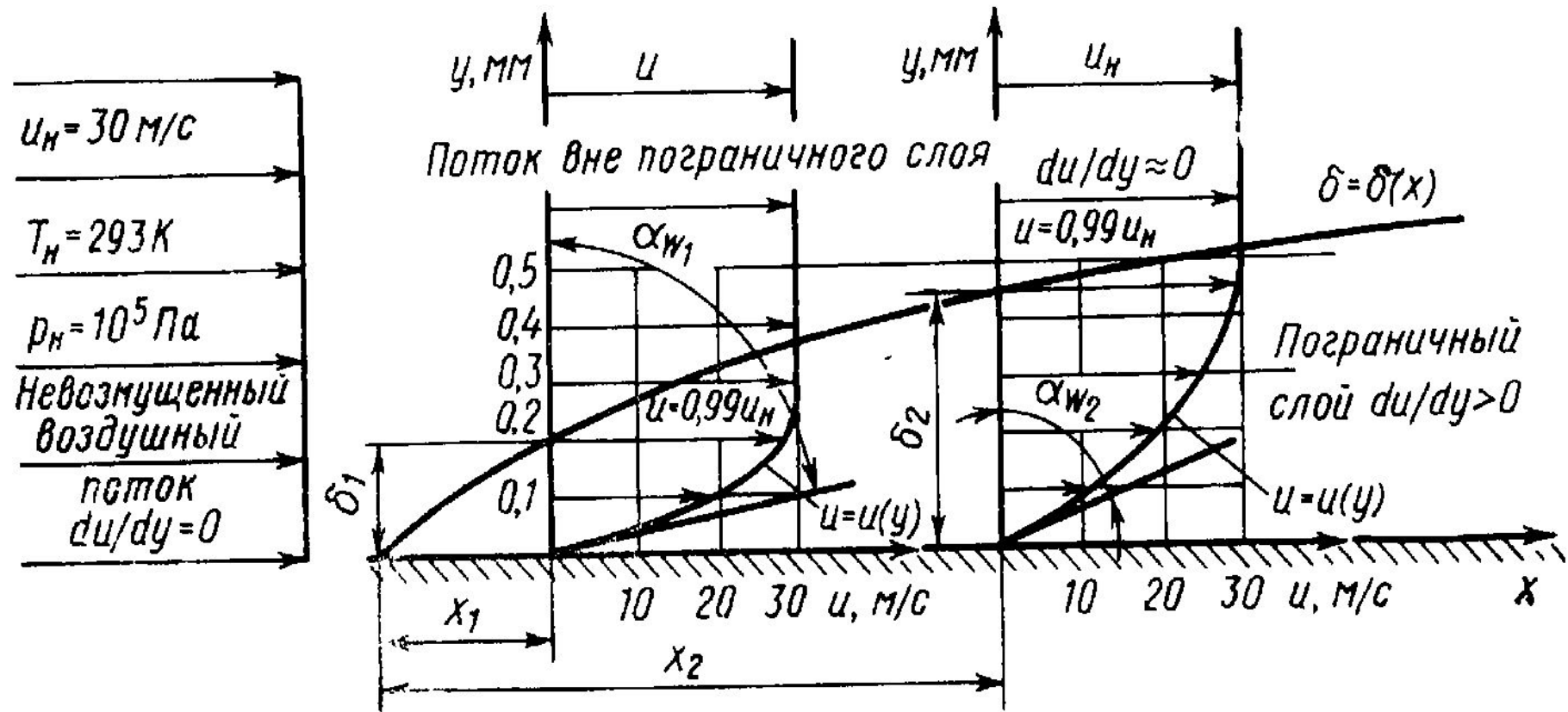


$$G = \rho_{\text{ш}} W g, \quad A = \rho_{\text{ж}} W g,$$

$$F_{\text{с}} = (\sigma + \tau) \pi \delta^2 = 3\pi \mu v \delta$$

$$\mu = \frac{1}{18} g \delta^2 \frac{1}{v} (\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}})$$

С вязкостью связано возникновение динамического пограничного слоя при обтекании жидкостями твердых тел.



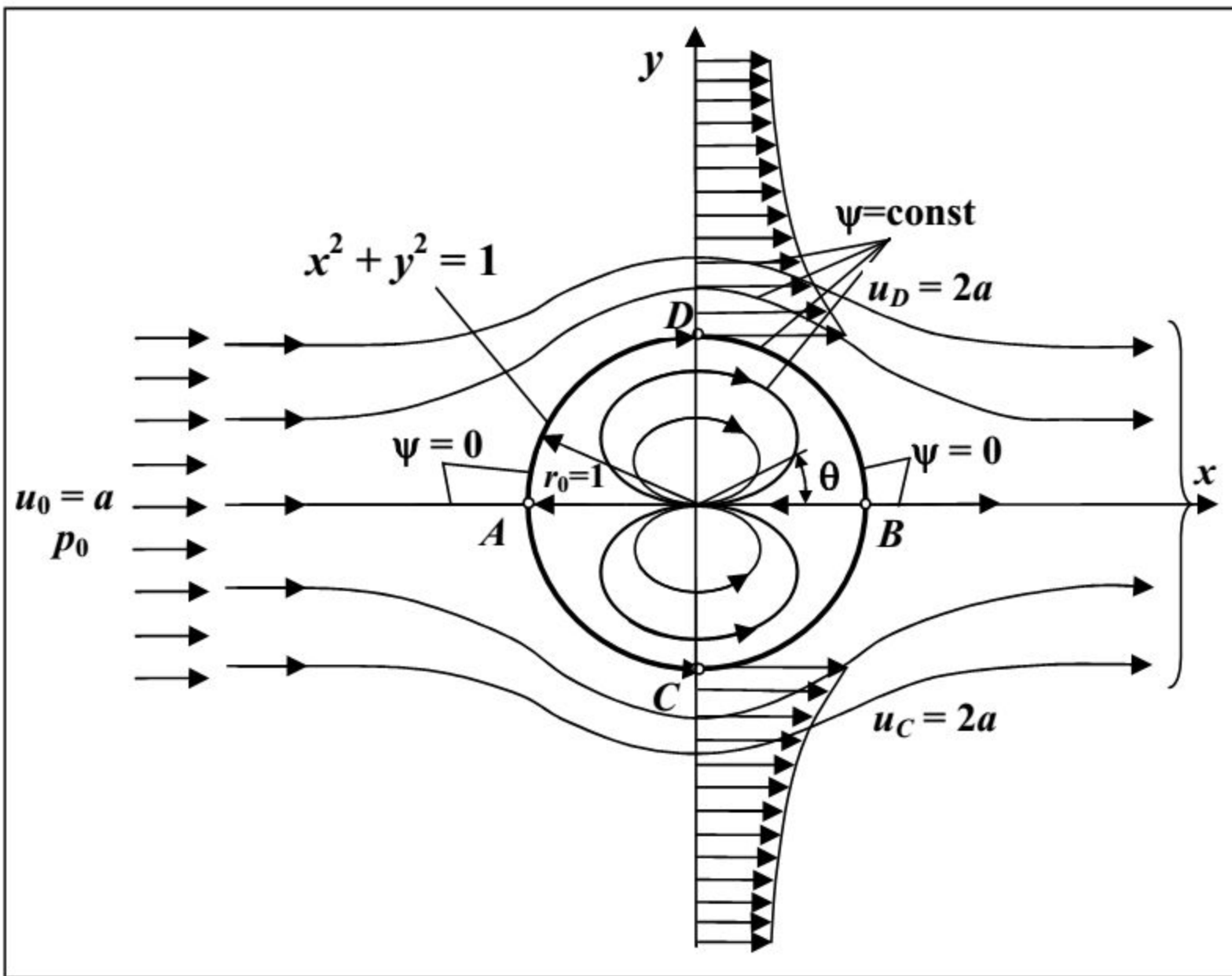


Рисунок 5.3 – Поперечное обтекание цилиндра потенциальным потоком идеальной жидкости

Парадокс Даламбера

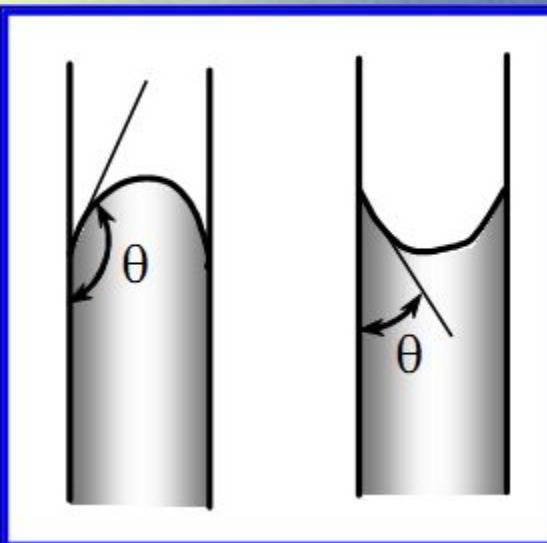
В силу полной симметрии распределения давления по поверхности цилиндра равнодействующая сил давления равна нулю. Полученный вывод называется парадоксом Даламбера: при дозвуковом безотрывном обтекании тел идеальной жидкостью сила лобового сопротивления равна нулю: сила трения отсутствует, а вторая составляющая — сила сопротивления давления, действующая на переднюю часть цилиндра, уравновешивается силой давления на кормовую часть. Парадокс состоит в несоответствии этого вывода с экспериментальными данными — при обтекании тел реальными жидкостями всегда возникает сила лобового сопротивления



Рисунок 5.4 – Распределение скорости и давления по поверхности цилиндра

Поверхностное натяжение

Коэффициент поверхностного натяжения – σ^* , Н/м.
Физический смысл – это свободная потенциальная энергия единицы поверхности раздела, обусловленная действием сил притяжения на молекулы вблизи поверхности раздела



Капиллярные явления

На поверхности раздела трех фаз: твердой стенки, жидкости и газа образуется краевой угол θ . Величина угла зависит только от природы соприкасающихся сред, и не зависит от формы сосуда и силы тяжести.

$$\Delta p = \sigma^* \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow \Delta p = \frac{4\sigma^*}{d}$$

Давление насыщенных паров p_n

Характеризует испаряемость жидкостей. Зависит от температуры T . Эта величина определяет то минимальное абсолютное давление, при котором жидкость не теряет своей сплошности.

местное нарушение сплошности течения с образованием паровых и газовых пузырей (каверн), обусловленное местным падением давления в потоке, называется **кавитацией**.

Кавитация сопровождается характерным шумом, а при длительном её воздействии также и **эрозионным разрушением** твёрдых, как правило, металлических стенок. Последнее объясняется тем, что конденсация пузырьков пара (и сжатие пузырьков газа) происходит со значительной скоростью, частицы жидкости, заполняющие полость конденсирующегося пузырька, устремляются к его центру и в момент завершения конденсации вызывают местный гидравлический удар, т. е. значительное местное повышение давления. Разрушение материала при кавитации происходит не там, где выделяются пузырьки, а там, где они конденсируются вследствие длительного воздействия знакопеременных сил.

Кавитация в обычных случаях явление нежелательное. При кавитации также возрастает сопротивление трубопроводов и, следовательно, уменьшается их пропускная способность.

ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ ЖИДКОСТИ

Метод Эйлера заключается в непосредственном описании поля скоростей в пространстве и времени, т. е.

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$$

или $u_x = u_x(x, y, z, t); u_y = u_y(x, y, z, t); u_z = u_z(x, y, z, t)$

Если $\partial u / \partial t = 0$ или, иначе, $u = u(x, y, z)$, то движение называют установившемся или стационарным

Если $\partial u / \partial t \neq 0$, то неустановившемся или нестационарным

Линия тока — это линия, в каждой точке которой в данный момент времени вектор скорости $\vec{u}$ направлен по касательной, т. е.

$$\vec{u} \parallel d\vec{r} \Rightarrow \vec{u} \times d\vec{r} = 0 \Rightarrow$$

$$(u_y dz - u_z dy)i + (u_z dx - u_x dz)j + (u_x dy - u_y dx)k = 0$$

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$$

Траектория— кривая, вдоль которой происходит перемещение частицы жидкости, т. е.

$$d\vec{r} = \vec{u} dt \Rightarrow dx = u_x dt; \quad dy = u_y dt; \quad dz = u_z dt$$

$$dt = \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$$

Трубка тока. Если через каждую точку произвольного контура провести линии тока, то получим трубчатую поверхность, называемую трубкой тока. Если контур мал, то трубка тока называется элементарной.

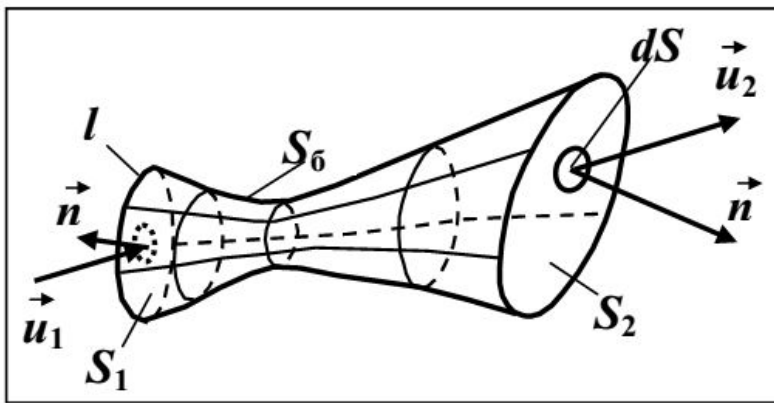


Рисунок 2.2 – Трубка тока

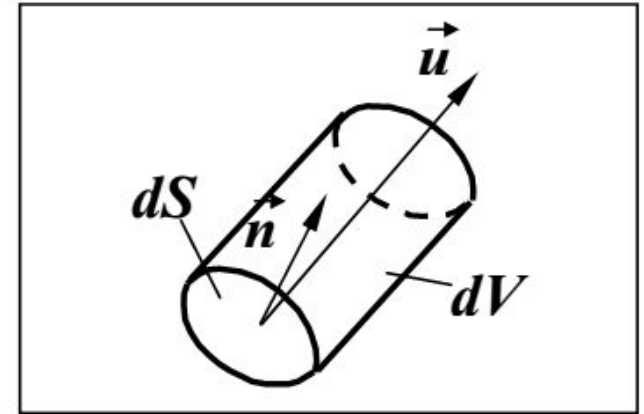


Рисунок 2.3 – Элементарная трубка тока

Объемный расход жидкости через произвольное сечение ds с нормалью элементарной трубки тока вычислим из простых рассуждений: объем жидкости, прошедший через сечение ds за время dt , равен объему цилиндра

$$u_n ds dt = dV,$$

т. е. расход

$$dQ = dV/dt = u_n ds = u ds_n$$

$$ds_n = ds \cdot \cos(\vec{u}, \vec{n})$$

площадь сечения, перпендикулярная линиям тока, или
«живое сечение»

$$dG = \rho \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \rho u_n ds = \rho u ds_n$$

Объемный и массовый расходы жидкости через произвольную площадку S найдем, просуммировав расходы по элементарным пронизывающим ее трубкам, т. е. объемный расход

$$Q = \int_S u_n ds \qquad G = \int_S \rho u_n ds$$

Средняя расходная скорость V в живом сечении S_n

$$v = Q/S_n$$

Ускорение при движении жидкости

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = u_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial t}$$

Уравнение неразрывности

это уравнение материального баланса
или иначе закон сохранения массы

Если в сплошной среде выделить произвольный объем V , то очевидно

$$m = \int_V \rho dV$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

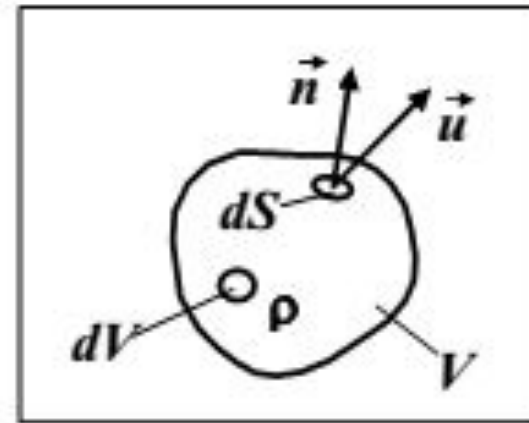


Рисунок 2.4 – Фиксация произвольного объема V в пространстве (для вывода уравнения неразрывности)

Возможно лишь за счет притока жидкости, который равен суммарному массовому расходу жидкости через поверхность S объема V , т. е.

$$G = - \int_s \rho u_n ds$$

Тогда

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_s \rho u_n ds = 0$$

уравнение неразрывности в интегральной форме

С учетом теоремы о кратных интегралах (теоремы Остроградского-Гаусса) можно записать

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) \right] dV = 0$$

Поскольку предел интегрирования произволен, то

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Тогда

$$\text{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Для потока несжимаемой жидкости уравнение неразрывности для трубки тока с учетом непроницаемости ее боковой поверхности после интегрирования преобразуется к виду

$$Q = v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Скорость деформации

В отличие от твердого тела, движение которого рассматривается как сумма поступательного движения со скоростью произвольно выбранной точки (полюса) и вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку, жидкости присуще деформационное движение.

Особенности движения жидкой среды можно выяснить на примере отдельной ее частицы. Если задана скорость в точке A , то скорость жидкости в точке B , отстоящей от точки A (рис. 2.5) на расстоянии $d\vec{r}$, можно вычислить по формуле

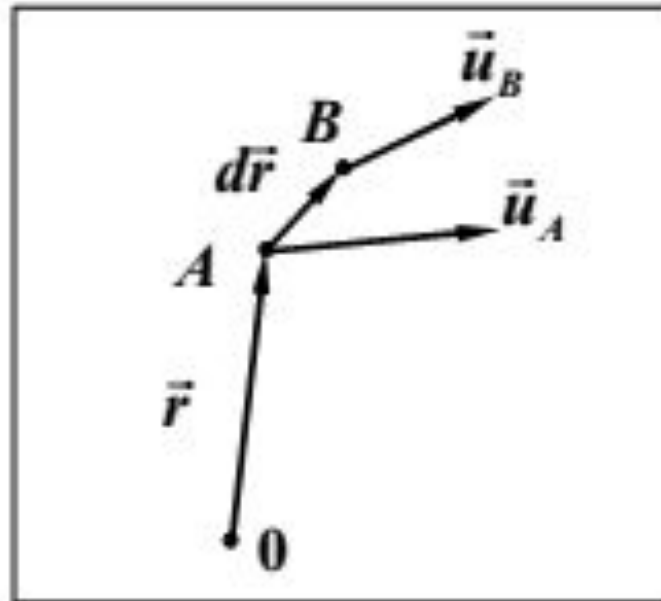


Рисунок 2.5 – Схема к определению скорости в точке B

$$u_B = u_A + du = u_A + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Отсюда следует

$$d\bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} dz. \quad (2.18)$$

Различие в скоростях обусловлено:

а) растяжением жидкостного элемента, т. е. линейной деформацией; б) угловой деформацией, изменяющей форму и размер жидкостной частицы; в) вращением элемента без деформации. Следовательно, различие в скоростях – результат деформации жидкостного элемента, т. е.

$$du_{\text{деф}} = du - du_{\text{вр}}$$

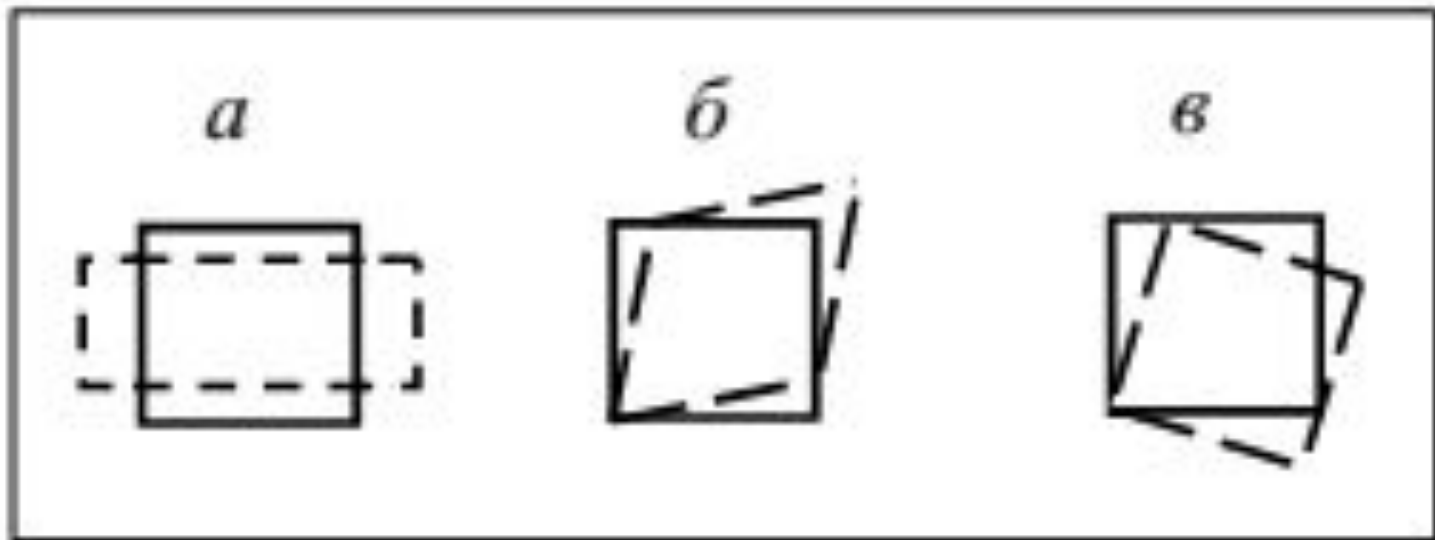


Рисунок 2.6 – Геометрическая иллюстрация изменения жидкостного элемента за счет деформации *a* – линейной; *б* – угловой и вращения (*в*)

В свою очередь

$$\begin{aligned}
 du_{\text{вр}} &= \vec{\omega} \times d\vec{r} = \left(\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \right) \times \left(dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \right) = \\
 &= \left(\omega_y dz - \omega_z dy \right) \vec{i} + \left(\omega_z dx - \omega_x dz \right) \vec{j} + \left(\omega_x dy - \omega_y dx \right) \vec{k}
 \end{aligned}$$

Проектируя, например, на ось x будем иметь

$$du_{\text{деф } x} = du_x - du_{\text{вр } y} \quad (1)$$

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \quad (2)$$

$$du_{\text{вр } x} = \omega_y dz - \omega_z dy \quad (3)$$

Подставляя (2) – (3) в (1) получим

$$du_{\text{деф } x} = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz - \omega_y dz - \omega_z dy \quad (4)$$

$$d\varphi_{\text{вр } y} = \frac{1}{2} (d\varphi_A - d\varphi_C) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dt$$

то

$$\omega_y = \frac{d\varphi_{\text{вр } y}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

По аналогии для ω_z можно записать

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

Подставляя эти выражения в (4), после преобразований будем иметь

$$du_{\text{деф } x} = \varepsilon_{xx} dx + \varepsilon_{xy} dy + \varepsilon_{xz} dz$$

Здесь ε_{xx} – скорость линейной относительной деформации;
 ε_{xy} ; ε_{xz} – скорости угловой деформации, представляющие собой

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).$$

Физический (кинематический) смысл $\frac{\partial u_x}{\partial x}$

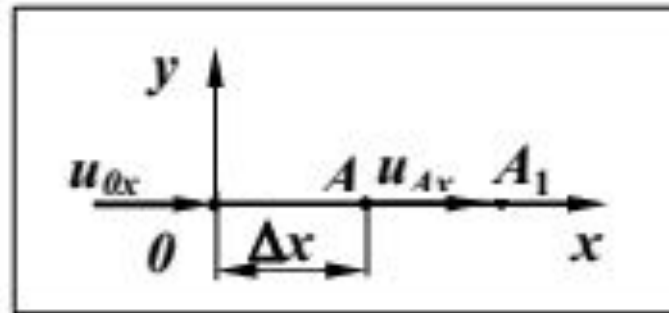


Рисунок 2.7 – Схема к определению скорости линейной деформации

В системе координат, связанной с точкой O жидкости, за время dt точка A переместится и займет положение A_1 . Тогда удлинение отрезка $AA_1 = (u_{Ax} - u_{Ox})dt$ и, так как для бесконечно малого отрезка OA

$$u_{Ax} = u_{Ox} + \frac{\partial u_x}{\partial x} OA, \text{ то } AA_1 = \frac{\partial u_x}{\partial x} OA dt$$

Скорость относительного удлинения отрезка OA или *скорость линейной деформации* вдоль оси x

$$\varepsilon_{xx} = \frac{AA_1}{OA dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

По аналогии можно записать

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Тогда уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости, представленное в виде

$$\text{div} \vec{u} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0$$

свидетельствует о неизменности объема элемента жидкости при его линейной деформации

б) – Кинематический смысл $\partial u_x/\partial y$ и $\partial u_y/\partial x$

Пусть за время dt точка A переместится в A_1 , $B \rightarrow B_1$, $C \rightarrow C_1$ (рис. 2.8). Воспользовавшись рядом Тейлора, можно записать

$$u_{Ax} = u_{0y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \theta A, \quad u_{Cx} = u_{0x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \theta C.$$

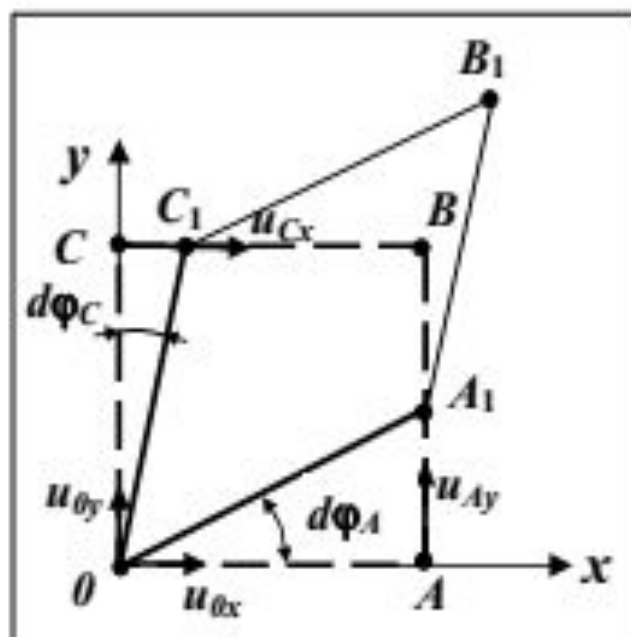


Рисунок 2.8 – Схема к определению угловой деформации и угловой скорости

Тогда

$$AA_1 = (u_{Ay} - u_{Oy})dt = \frac{\partial u_y}{\partial x} OA dt, \quad CC_1 = (u_{Cx} - u_{Ox})dt = \frac{\partial u_x}{\partial y} OC dt.$$

В результате относительного движения ребра OA_1 и OC_1 повернутся соответственно на бесконечно малые углы

$$d\varphi_A \approx \operatorname{tg} d\varphi_A = AA_1 / OA = \left(\partial u_y / \partial x \right) dt;$$

$$d\varphi_C \approx \operatorname{tg} d\varphi_C = CC_1 / OC = \left(\partial u_x / \partial y \right) dt,$$

т. е. частные производные du_x/du и du_y/dx равны *угловым скоростям вращения* линий OA и OC , причем OC вращается по часовой стрелке, а OA – против.

Поэтому, если принять, что $\omega_C = d\varphi_C/dt$, то $\omega_A = -d\varphi_A/dt$.

Скорость вращения жидкости в точке θ относительно оси Z можно вычислить, как среднее арифметическое ω_A и ω_C , т.е.

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (2.21)$$

По аналогии нетрудно найти

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right); \quad (2.22)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \quad (2.23)$$

В свою очередь общая относительная деформация сдвига частицы $d\varphi_{\text{деф}}$ или деформация скашивания прямого угла $A\theta C$ в $A_1\theta C_1$ под действием тангенциальных напряжений τ_{yx} и τ_{xy} будет равна сумме этих углов, т.е.

$$d\varphi_{\text{деф}} = d\varphi_A + d\varphi_C = (\partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y) dt.$$

Скоростью угловой деформации в плоскости $x - y$ называется величина

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \frac{d\varphi_{\text{деф}}}{dt}.$$

Т. е.

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (2.24)$$

По аналогии можно записать

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)$$

Таким образом имеем

$$du_{\text{деф } y} = \varepsilon_{yx} dx + \varepsilon_{yy} dy + \varepsilon_{yz} dz; \quad du_{\text{деф } z} = \varepsilon_{zx} dx + \varepsilon_{zy} dy + \varepsilon_{zz} dz$$

Матрица, составленная из девяти компонентов скоростей линейных и угловых деформаций называется тензором скоростей деформаций S .

$$S = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЖИДКИЙ ОБЪЕМ

Внешние силы, действующие на жидкий объем и определяющие его движение, разделяются на **массовые (объемные) и поверхностные**.

Массовые силы R_m приложены ко всем жидким частицам, составляющим жидкий объем. К ним относятся силы тяжести и силы инерции.

Напряжением или плотностью, или удельной (единичной) массовой силой (м/с^2 , Н/кг) называют

$$\vec{f} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}_m}{\Delta m}; \quad \vec{f} = \vec{a}$$

$$\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}; \quad f_z = -g$$

Поверхностные силы R_s представляют воздействие внешней среды на поверхность выделенного объема. Это воздействие распределено по поверхности непрерывно.

Выберем на плоскости S , рассекающей некоторую массу жидкости на части 1 и 2 (рис. 3.1), элементарную площадку ΔS , на которой лежит точка $A(x, y, z)$. Отбросим часть 2 и заменим ее действие на площадку ΔS части 1 равнодействующей поверхностных сил ΔR_s . В общем случае величина ΔR_s зависит от ориентации площадки ΔS и направлена к ней под острым углом γ . Ориентация площадки ΔS определяется единичным вектором внешней нормали n .

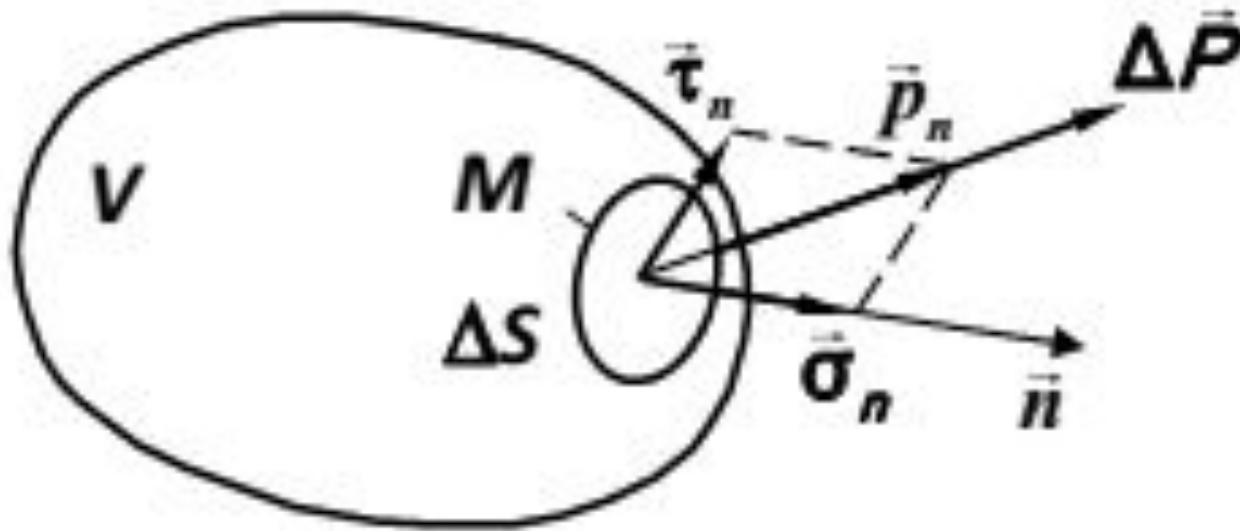


Рисунок 3.1 – Схема к определению напряжения в точке сплошной среды

Нормальная составляющая ΔR_n поверхностной силы ΔR_s действует по нормали к поверхности ΔS , противоположно n . Сила трения или тангенциальная составляющая ΔR_t действует в плоскости ΔS .

Плотность поверхностных сил на площадке с нормалью n называется напряжением и определяется выражением

$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}_S}{\Delta S}; \quad [\vec{p}_n] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} =$$

При этом различают следующие напряжения.

$$\vec{p}_n = p_{nn} \vec{n} + p_{n\tau} \vec{\tau}$$

Компоненты напряжения на площадках, нормальных к координатным осям, называются основными. Так, например, напряжение на площадке с нормалью, совпадающей с направлением оси x , может быть выражено через основные компоненты напряжения в виде

$$\vec{p}_x = \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k}$$

Первый индекс указывает направление нормали к площадке, второй – ось, на которую спроектировано напряжение .
Компонент напряжения, считается положительным, если его направление и направление внешней нормали к площадке совпадают (или оба направления не совпадают) с направлениями осей координат. На рисунке 3.2 показаны положительные направления компонентов напряжения при плоском напряженном состоянии.

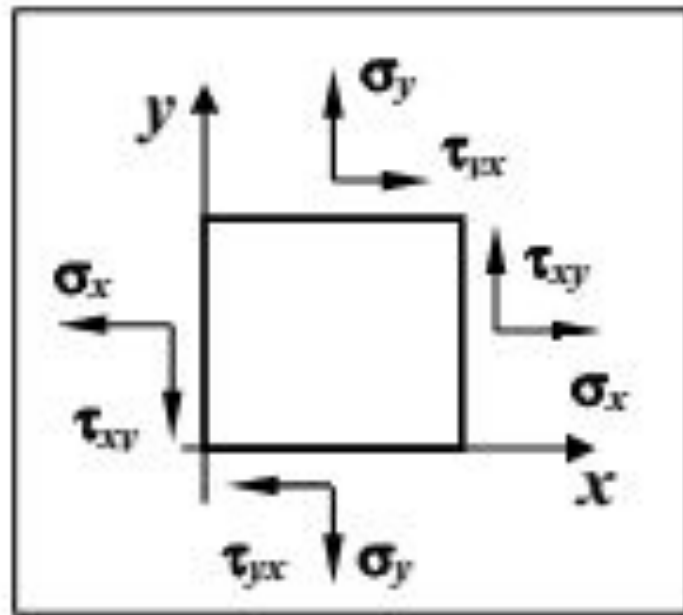


Рисунок 3.2 – Положительные направления основных компонентов напряжений

Итак, существует всего девять основных компонентов напряжений. Обычно их представляют в виде матрицы:

$$P^T = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

и называют *тензором напряжений*.

Тензор напряжений *симметричен относительно главной диагонали* (примем без доказательства), т. е.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz},$$

и независимо от ориентации координатных осей

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{const.}$$

Установим взаимосвязь напряжения $\vec{p}_n$ с основными компонентами напряжений. Для этого применим второй закон Ньютона к элементарной массе жидкости, имеющей форму тетраэдра (рис. 3.3) с ребрами dx, dy, dz :

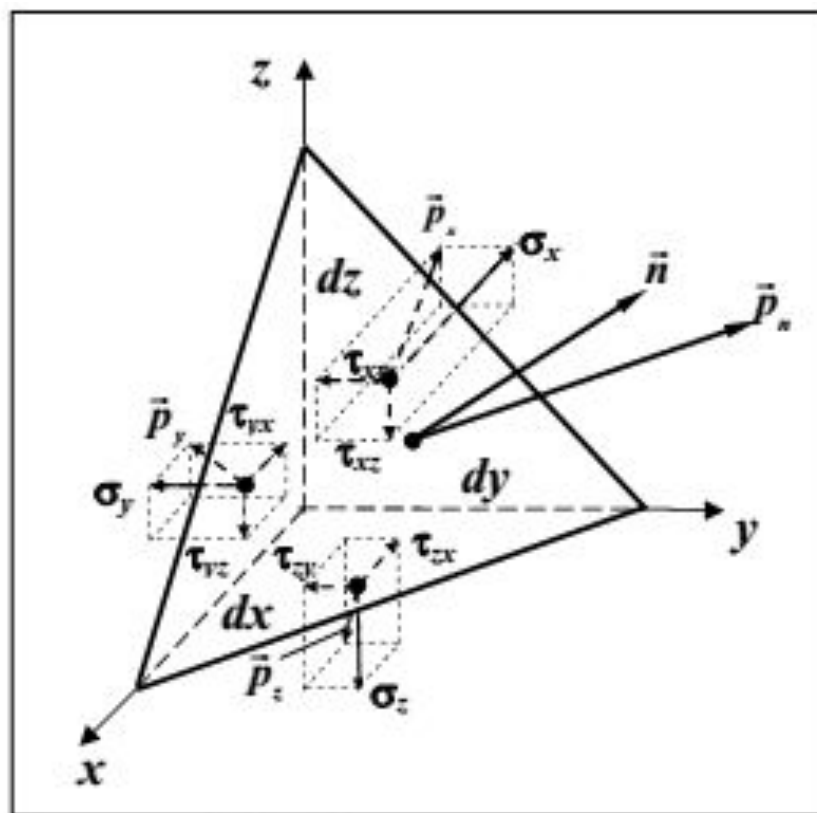


Рисунок 3.3 – К определению взаимосвязи напряжения $\vec{p}_n$ с основными компонентами напряжений

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R} = \vec{R}_m + \vec{R}_s, \quad (3.2)$$

где $\vec{K}$ – количество движения;

$\vec{R}$ – главный вектор внешних сил представлен в виде суммы массовых $\vec{R}_m$ и поверхностных $\vec{R}_s$ сил.

Массовые силы $\vec{R}_m$ этого равенства и количество движения $\vec{K}$ пропорциональны массе жидкости, т. е. величине $1/6\rho dx dy dz$. Поверхностные силы, например, на площадке dS_x нормальной к оси x

$$\vec{P}_x = \vec{p}_x \frac{1}{2} dy dz$$

на порядок больше массовых. Следовательно, в уравнении (3.2) можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными массе элементарного тетраэдра.

Тогда получим $\vec{R}_x = 0$ или

$$\vec{p}_n dS_n + \vec{p}_x dS_x + \vec{p}_y dS_y + \vec{p}_z dS_z = 0.$$

Разделив это выражение почленно на dS_n , и учитывая, что

$$\frac{dS_x}{dS_n} = \cos(x, n); \quad \frac{dS_y}{dS_n} = \cos(y, n); \quad \frac{dS_z}{dS_n} = \cos(z, n),$$

получим

$$\vec{p}_n + \vec{p}_x \cos(x, n) + \vec{p}_y \cos(y, n) + \vec{p}_z \cos(z, n) = 0,$$

или в проекциях на координатные оси

$$\left. \begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cos(x, n) + \tau_{xy} \cos(y, n) + \tau_{xz} \cos(z, n) \\ p_{ny} &= \tau_{yx} \cos(x, n) + \sigma_y \cos(y, n) + \tau_{yz} \cos(z, n) \\ p_{nz} &= \tau_{zx} \cos(x, n) + \tau_{zy} \cos(y, n) + \sigma_z \cos(z, n) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Давлением в движущейся жидкости называется величина

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (3.4)$$

т. е. среднеарифметическое значение сжимающих нормальных основных компонентов напряжений.

Давление в покоящейся жидкости

$$p = -p_n = -\sigma_x = -\sigma_y = -\sigma_z$$

Закон внутреннего трения в обобщенной форме – это эмпирический закон

Устанавливает взаимосвязь между компонентами тензоров скоростей деформаций S и напряжений T .

Если T представить в виде

$$T = T_0 + T_1$$

$$T_0 = - \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} \quad T_1 = \begin{vmatrix} \sigma_x + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_x + p \end{vmatrix}$$

то простейшая форма связи между матрицами S и T_1 для ньютоновской жидкости – это прямая пропорциональность

$$T_1 = 2\mu S$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right); \\ \sigma_z &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\}$$

Уравнение движения в напряжениях

Воспользовавшись теоремой об изменении количества движения к движущейся массе жидкости, заключенной в произвольном объеме, с учетом теоремы Остроградского-Гаусса, получим

$$\int_V \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \int_V \left(\rho \vec{F} + \text{Div} \vec{p}_n \right) dV$$

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{F} + \text{Div} \vec{p}_n$$

$$\text{Div} \vec{p}_n = \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{du_x}{dt} &= \rho X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \rho \frac{du_y}{dt} &= \rho Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \rho \frac{du_z}{dt} &= \rho Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнение Навье—Стокса)

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_x \\ \frac{du_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 u_y \\ \frac{du_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z \end{aligned} \right\}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \qquad \vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

$$\text{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}$$

Уравнение энергии

Изменение энергии E жидкости в случае отсутствия теплообмена с окружающей средой $dQ = 0$ возможно лишь за счет работы внешних сил, т. е.

$$dE = dA = Ndt$$

или иначе

$$\frac{dE}{dt} = N$$

Для гомогенной жидкости, не изменяющей своего агрегатного состояния, можно записать

$$E = \int_V \frac{u^2}{2} \rho dV + \int_V c_p T \rho dV$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \left(\rho \frac{u^2}{2} + \rho c_p T \right) dV = \int_V \left(u \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{du}{dt} + c_p \frac{dT}{dt} \right) \rho dV$$

$$N = N_m + N_s$$

$$N_m = \int_V u F \rho dV$$

$$N_s = \int_V u p ds = \int_V \left[\frac{\partial (u p_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u p_y)}{\partial y} + \frac{\partial (u p_z)}{\partial z} \right] dV$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + u \left(\rho \frac{du}{dt} - F \rho - \frac{\partial p_x}{\partial x} - \frac{\partial p_y}{\partial y} - \frac{\partial p_z}{\partial z} \right) - p_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - p_y \frac{\partial u_y}{\partial y} - p_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \tau_{zy} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \sigma_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \mu D$$

$$D = 2 \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] +$$

$$+ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2$$

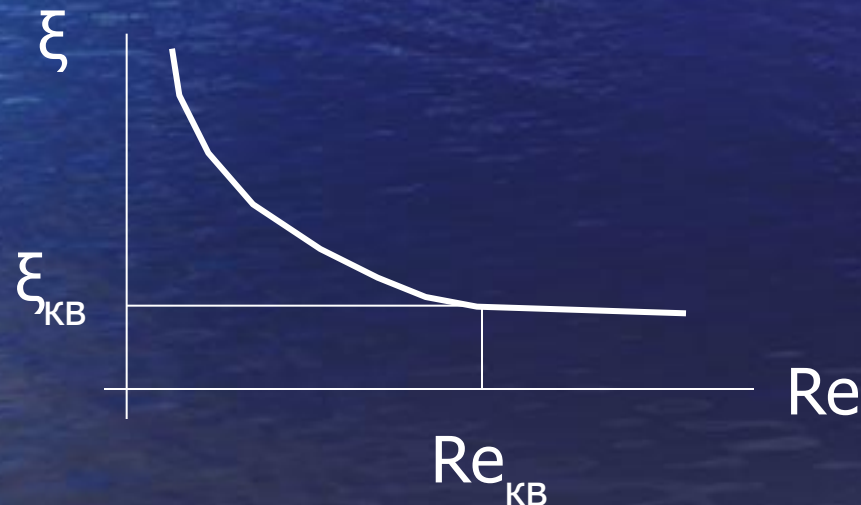
$$D = 2 \left(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 \right) + 4 \left(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2 \right)$$

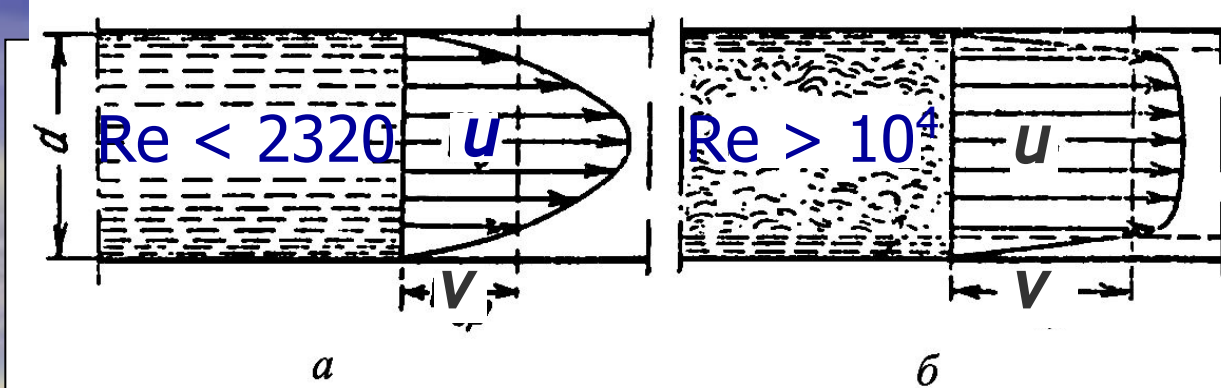
Потери энергии на сопротивлениях и по длине трубопровода

$$h_w = \frac{1}{\rho g Q} \int_V \rho c_p \frac{dT}{dt} dV = \frac{1}{\rho g Q} \int_V \mu D dV$$

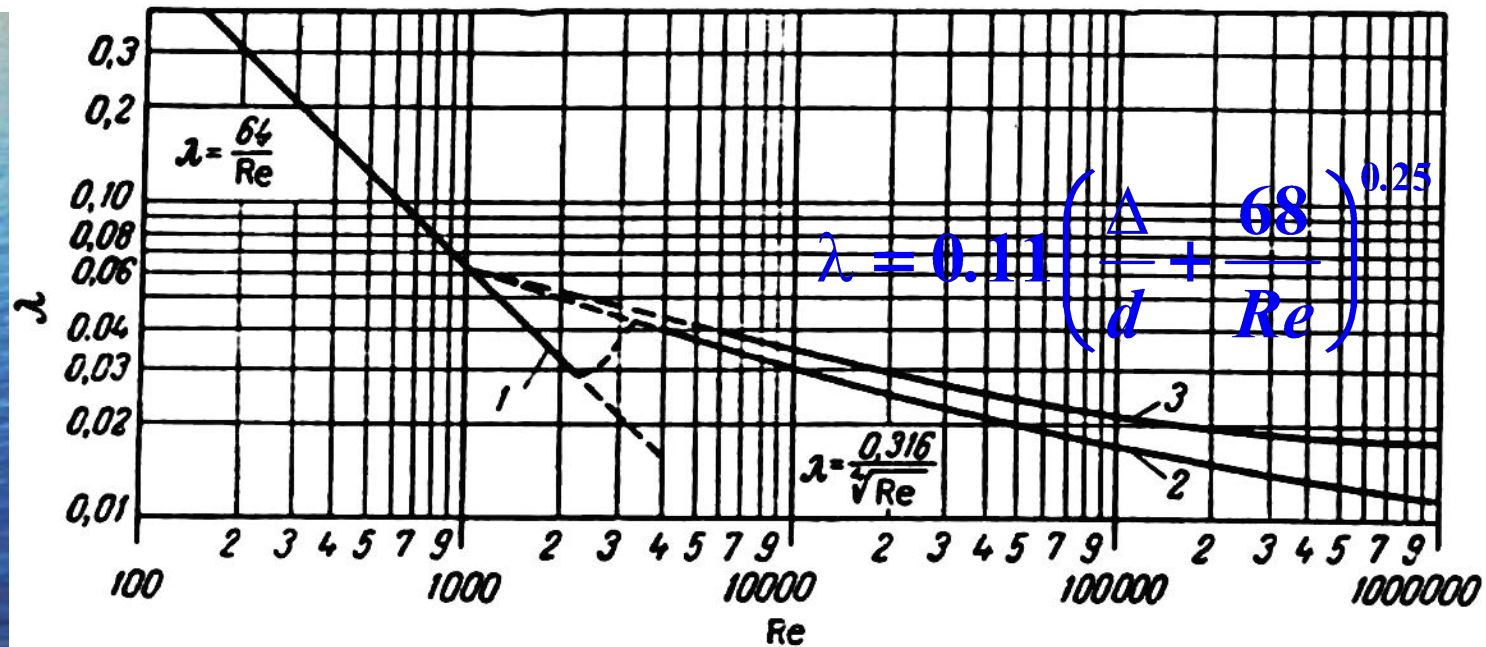
$$h_w = h_{mc} + h_l; h_{mc} = \xi \frac{v^2}{2g}; h_l = \lambda \frac{l}{d_0} \frac{v^2}{2g}; d_0 = \frac{4S}{\Pi}.$$

$$\xi = \xi(\text{геометрических размеров, Re}) \Rightarrow \xi = \xi_{KB} + \frac{A}{Re}$$





Распределение скоростей при ламинарном (а) и турбулентном (б) движении жидкости в трубе



Зависимость λ от критерия Re :

1 – гладкие и шероховатые трубы; 2 – гладкие трубы); 3 – шероховатые трубы

ГИДРОСТАТИКА

$$\vec{F} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

$$\left. \begin{aligned} f_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ f_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ f_z &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right)$$

Если $\rho = \text{const}$, то

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = d \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad a)$$

т. е. правая часть представляет собой полный дифференциал. В связи с этим можно утверждать, что это уравнение имеет решение всегда, т. е. жидкость может находиться в равновесии, если и левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции Φ , зависящей от x, y, z . Так как

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \quad b)$$

Сравнив $a)$ и $b)$ получим условия, при которых жидкость может находиться в равновесии

$$f_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; f_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; f_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

$$A = \int_l \vec{F} d\vec{l} = \int_l \left(f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k} \right) \left(i dx + j dy + k dz \right) =$$

$$\int_l \left(f_x dx + f_y dy + f_z dz \right) = \int_l^2 d\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$$

Поверхность, на которой $\Phi = \text{const}$ или $d\Phi=0$, называется эквипотенциальной или поверхностью уровня. На этой поверхности $dp=0$ или $p=\text{const}$ или

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0$$

Равновесие жидкости в гравитационном поле



В этом случае имеем: $f_z = -g$; $f_x = f_y = 0$.

Граничные условия: $z = z_0$;
 $\Rightarrow p = p_0$.

Уравнение поверхности уровня – $gdz = 0$ или
после интегрирования $z = \text{const}$

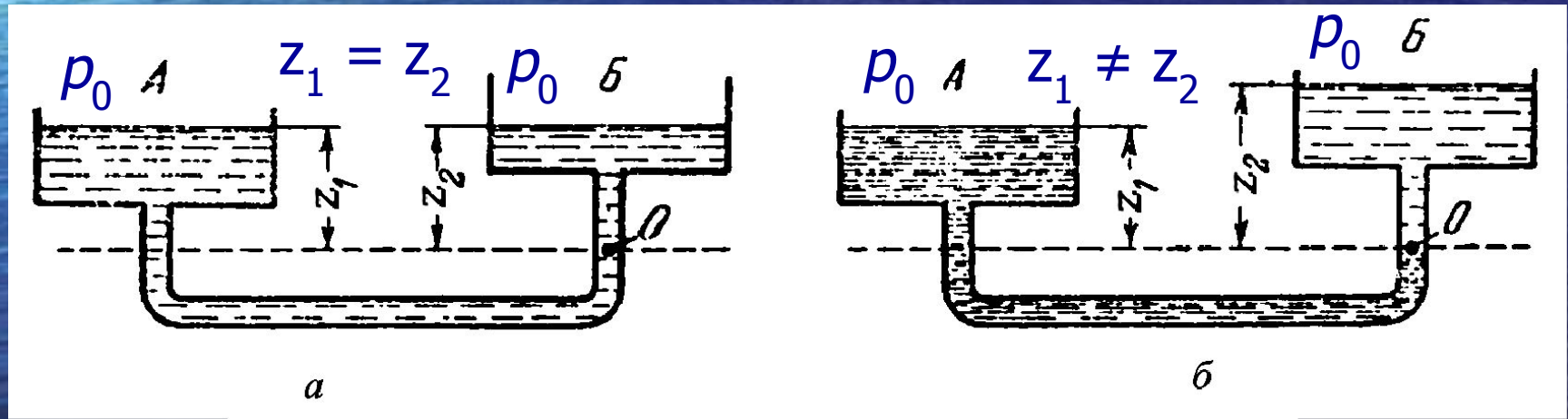
$$\frac{p}{\rho} = -gz + C \Rightarrow z + \frac{p}{\rho g} = \text{const} \quad C = \frac{p_0}{\rho} + gz_0$$

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z) = p_0 + \rho gh$$

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const} \quad - \text{статический напор}$$

$z = mgz/(mg) = \mathcal{E}_n/(mg)$, т. е. z есть отношение потенциальной энергии положения к весу жидкостной частицы с массой m

$p/(\rho g)$ – удельная потенциальная энергия давления



Сообщающиеся сосуды, заполненные жидкостью:
 а – одной плотности; б – разной плотности

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

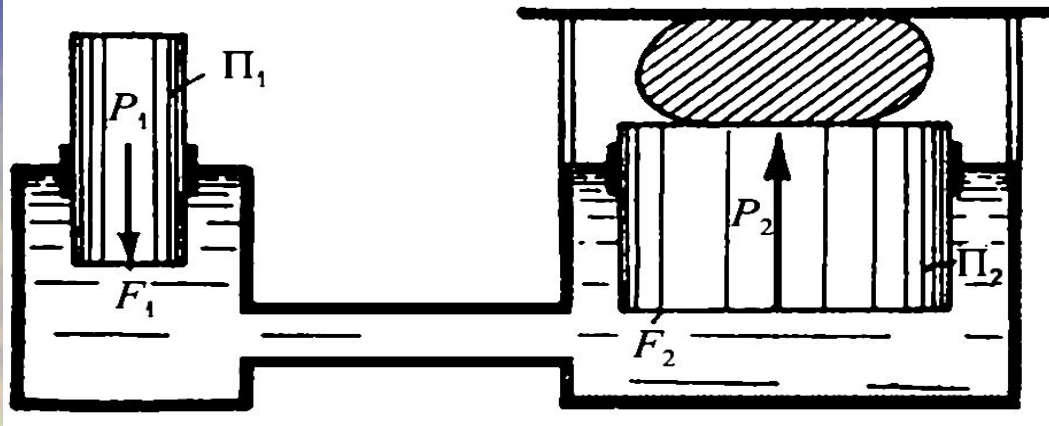
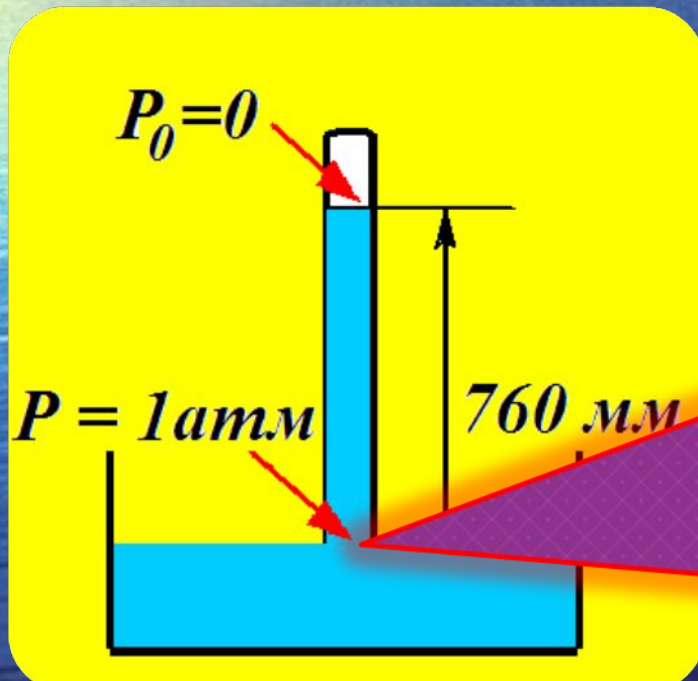


Схема гидравлического пресса

$$P_2 = P_1 \frac{F_2}{F_1}$$



При изменении атмосферного давления изменяется высота жидкости в трубке. Это позволяет использовать такую трубку в качестве прибора для измерения давления – **ртутного барометра**

Для воды:

$$H = \frac{101325}{1000 \cdot 9,8} = 10,34$$

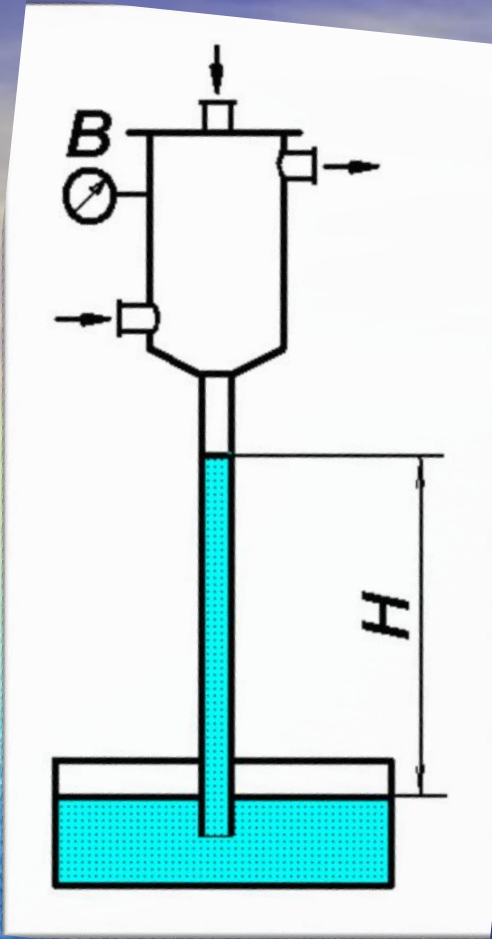
Задача

Вакуумметр на барометрическом конденсаторе показывает вакуум, равный 600 мм рт.ст. Атмосферное давление 748 мм рт.ст.

Определить:

- а) абсолютное давление в конденсаторе в Па и в кгс/см²;
- б) на какую высоту H поднимается вода в барометрической трубе?

Решение



- Абсолютное давление в конденсаторе:

$$p = 748 - 600 = 148 \text{ ммрт.ст.} = \\ = 148 \cdot 133,3 = 19700 \text{ Па}$$

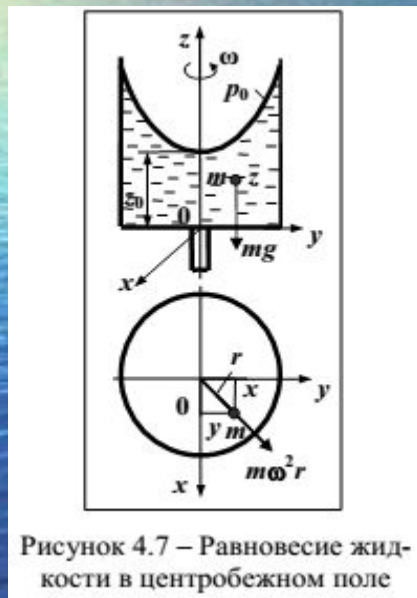
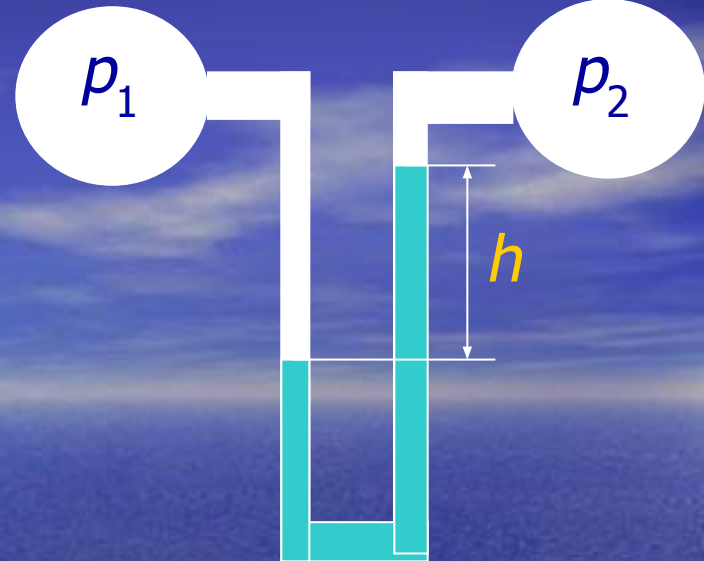
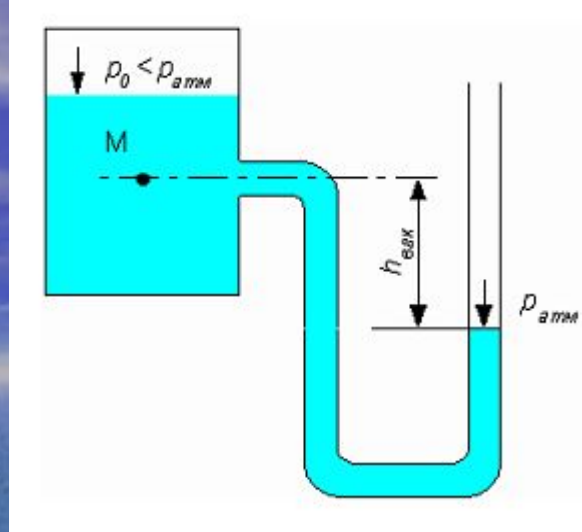
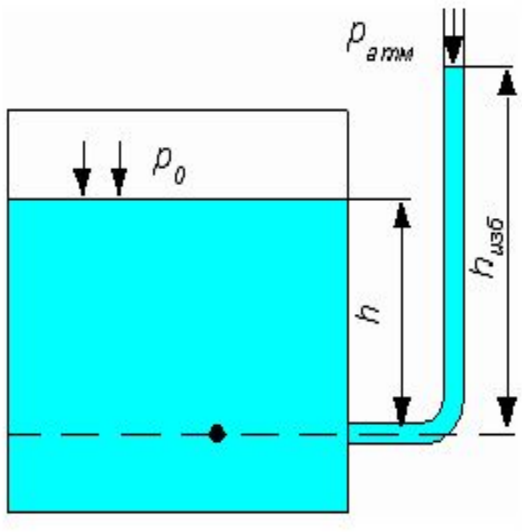
$$p = \frac{19700}{9,81 \cdot 10^4} = 0,201 \text{ кгс/см}^2$$

Высоту столба в барометрической трубе найдем из уравнения:

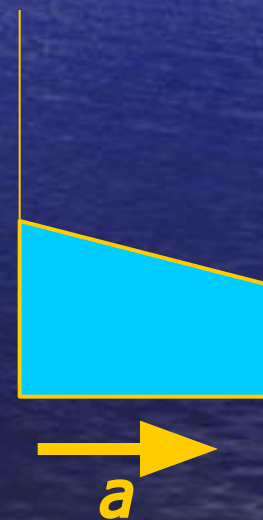
$$p_{\text{атм}} = p + \rho g H$$

- Откуда

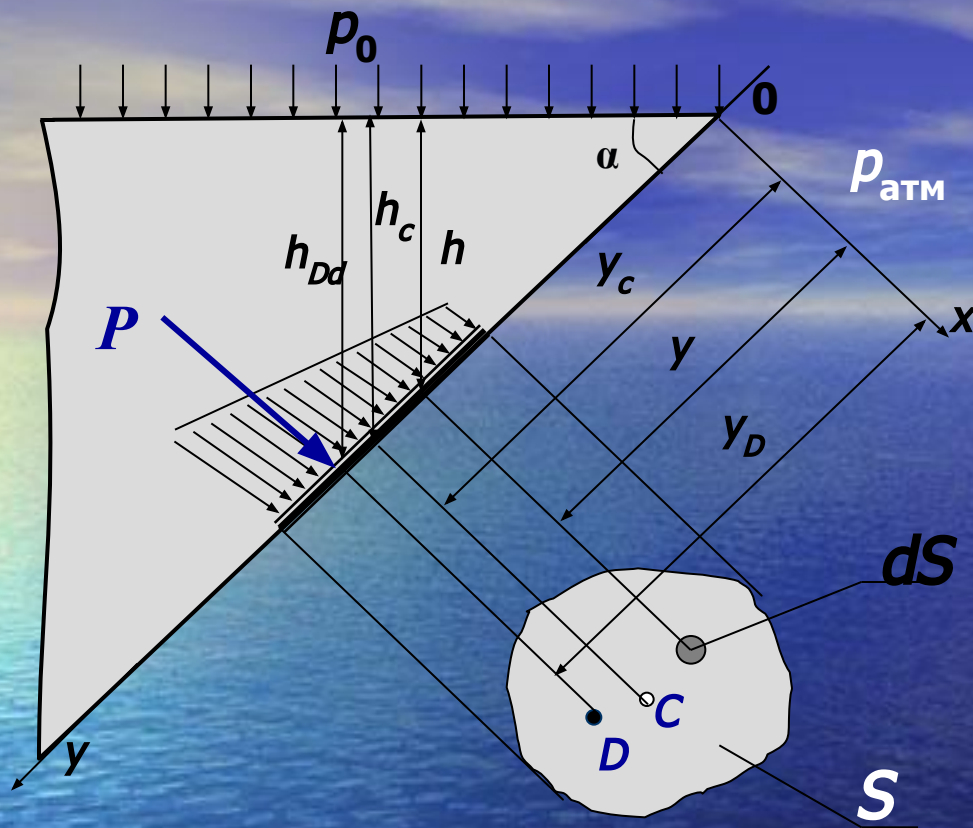
$$H = \frac{p_{\text{атм}} - p}{\rho g} = \frac{600 \cdot 133,3}{1000 \cdot 9,81} = 8,16 \text{ м}$$



$$dp = -\rho(ax + gdz)$$



$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz)$$



$$p = (\rho gh + p_{\text{атм}})$$

$$p_0 = p - p_{\text{атм}}$$

$$Py_D = \int_S y dS$$

$$\int_S y^2 dS$$

$$y_D = \frac{\int_S y^2 dS}{y_c S}$$

$$y_D = \frac{y_c^2 S + J_C}{y_c S} = y_c + \frac{J_C}{y_c S}$$

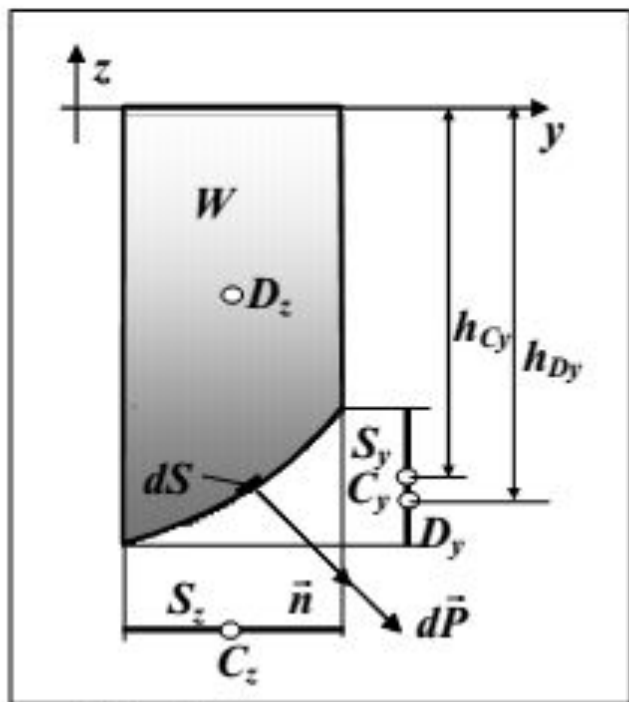


Рисунок 4.8 – Схема определения силы давления на цилиндрическую поверхность тела

$$\vec{P} = \int_S p \vec{n} dS$$

$$P_x = \int_S p \cos(x, n) dS = \int_{S_x} p dS_x$$

$$P_z = \int_S p \cos(z, n) dS = \int_{S_z} p dS_z$$

$$W = \int_{S_z} h dS_z$$

$$P_x = (p_{0и} + \rho g h_c) S_x$$

$$P_z = p_{0и} S_z + \rho g W$$

Закон Архимеда

Если пронизать тело, погруженное в жидкость, вертикальным цилиндром с основанием dS_z , то на площадки dS_1 и dS_2 , отсекаемые на поверхности тела (рис. 4.10), действуют соответственно гидростатические силы, вертикальные составляющие которых

$$dP_{1z} = \rho g h_1 S_r \text{ и } dP_{2z} = \rho g h_2 S_r.$$

Результирующая сила направлена вверх и равна

$$dP_z = dP_{2z} - dP_{1z} = \rho g (h_2 - h_1) dS_z = \rho g dW,$$

где dW – объем тела, отсекаемый элементарным цилиндром.

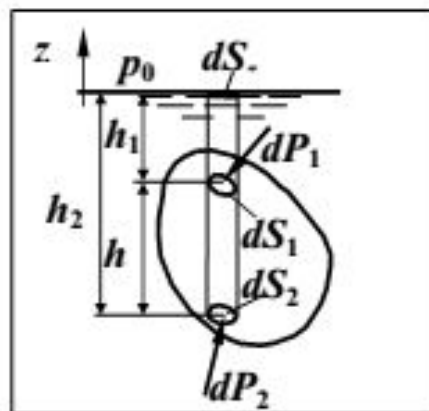


Рисунок 4.10 – К выводу закона Архимеда

Просуммировав силы по всей поверхности тела, найдем, что

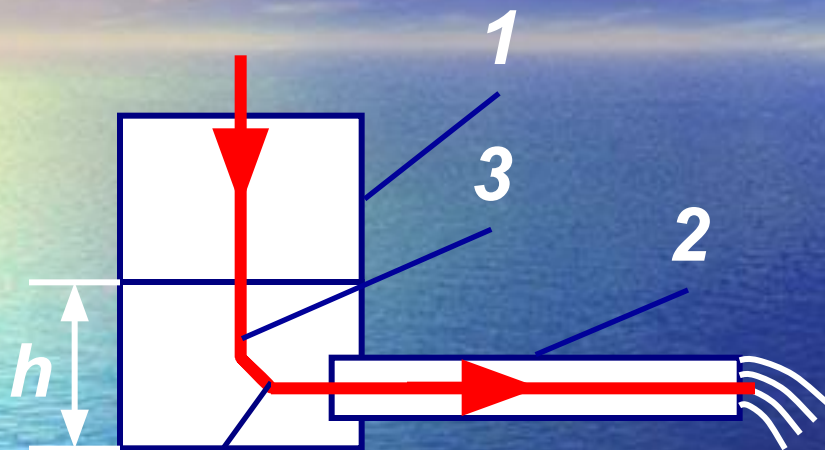
$$P_z = \rho g W,$$

где W – объем тела, погруженного в жидкость.

Режимы движения жидкости

Опыт Рейнольдса. 1883г.

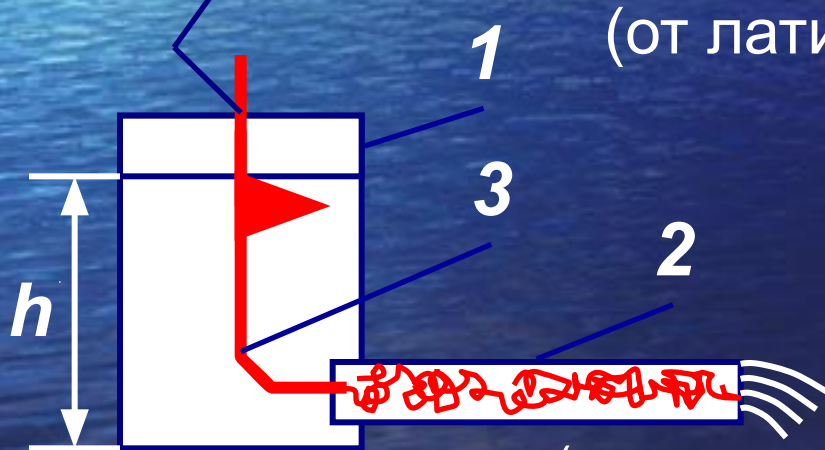
- 1 — сосуд
- 2 — стеклянная труба
- 3 — капиллярная трубка



частицы движутся
прямолинейно
и параллельно друг другу

ламинарное движение

(от латинского слова «ламина» — слой)



частицы жидкости движутся
по хаотическим траекториям

турбулентное движение

(от латинского слова «турбулентус» — вихревой)

$h = \text{const}$

Опыт показывает, что переход от ламинарного течения к турбулентному зависит от массовой скорости жидкости ρU , диаметра трубы d и вязкости жидкости μ .

Критерий Рейнольдса:

$$Re_{кр} = 2300$$

$$Re = \frac{vd\rho}{\mu} = \frac{vd}{\nu}$$

$Re < 2300$ – устойчивый ламинарный режим

$2300 < Re < 10000$ – неустойчиво турбулентный режим

$Re > 10000$ – устойчиво турбулентный режим

Уравнение турбулентного течения несжимаемой жидкости (уравнение Рейнольдса)

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x$$

$$\sigma_x = \bar{\sigma}_x + \sigma'_x$$

$$u_y = \bar{u}_y + u'_y$$

$$\tau_{xy} = \bar{\tau}_{xy} + \tau'_{xy}$$

$$u_z = \bar{u}_z + u'_z$$

$$\tau_{xz} = \bar{\tau}_{xz} + \tau'_{xz}$$

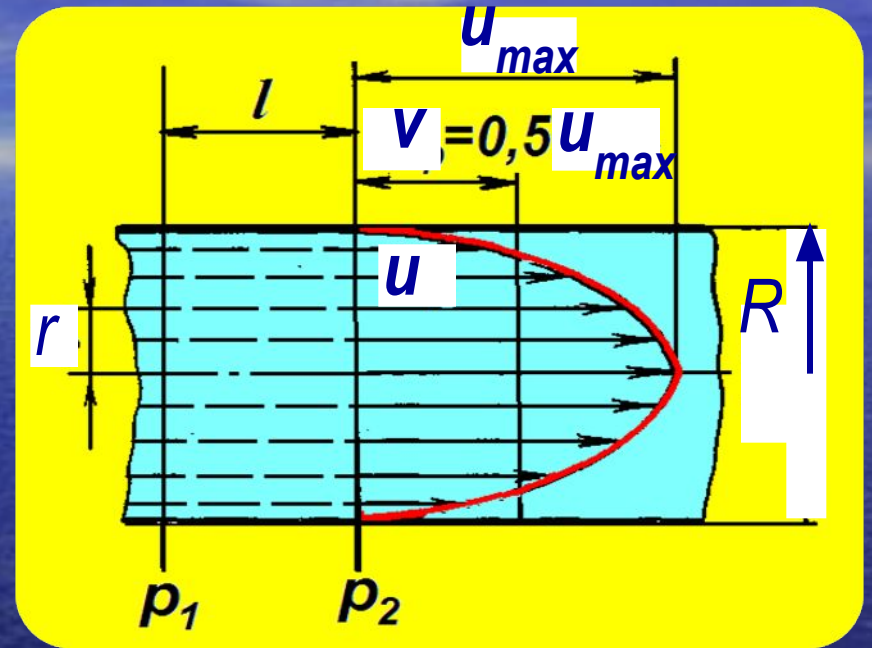
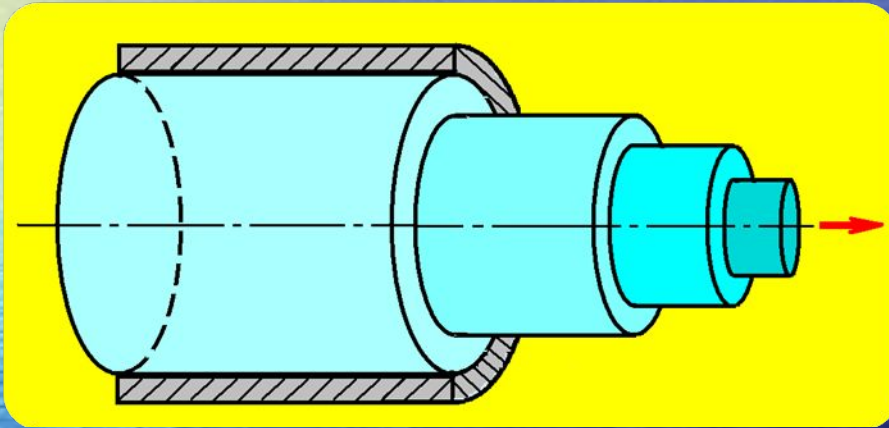
$$a = \bar{a} + a'; \quad b = \bar{b} + b'; \quad \overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}; \quad \bar{\bar{a}} = \bar{a}; \quad \bar{a'} = 0; \quad \overline{ab'} = 0; \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x}$$

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial (u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (u_x u_z)}{\partial z}$$

$$\rho \frac{d\bar{u}_x}{dt} = \rho X + \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\sigma}_x - \rho \overline{u'_x u'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\tau}_{xy} - \rho \overline{u'_x u'_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\tau}_{xz} - \rho \overline{u'_x u'_z} \right)$$

$$T' = \begin{bmatrix} \overline{\rho u'_x u'_x} & \overline{\rho u'_x u'_y} & \overline{\rho u'_x u'_z} \\ \overline{\rho u'_y u'_x} & \overline{\rho u'_y u'_y} & \overline{\rho u'_y u'_z} \\ \overline{\rho u'_z u'_x} & \overline{\rho u'_z u'_y} & \overline{\rho u'_z u'_z} \end{bmatrix}$$

Распределение скоростей по сечению потока при ламинарном режиме



$$P_1 - P_2 = (p_1 - p_2) \pi r^2$$

$$F = -\mu S \frac{du}{dy}$$

p_1 и p_2 – гидростатические давления в сечениях трубы на расстоянии l

u – скорость движения жидкости на расстоянии r от оси трубы

$S = 2\pi r l$ – наружная поверхность цилиндра

μ – вязкость жидкости

Распределение скоростей по сечению потока при ламинарном режиме

Сумма проекций всех сил на ось потока равна нулю

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\mu 2\pi r l \frac{du}{dr}$$

После сокращения и разделения переменных

$$\frac{p_1 - p_2}{2\mu l} r dr = -du$$

Интегрируя с учетом граничных условий, получим

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (R^2 - r^2)$$

Распределение скоростей по сечению потока при ламинарном режиме

Скорость имеет максимальное значение на оси трубы

$$u_{\max} = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} R^2$$

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

- параболическое

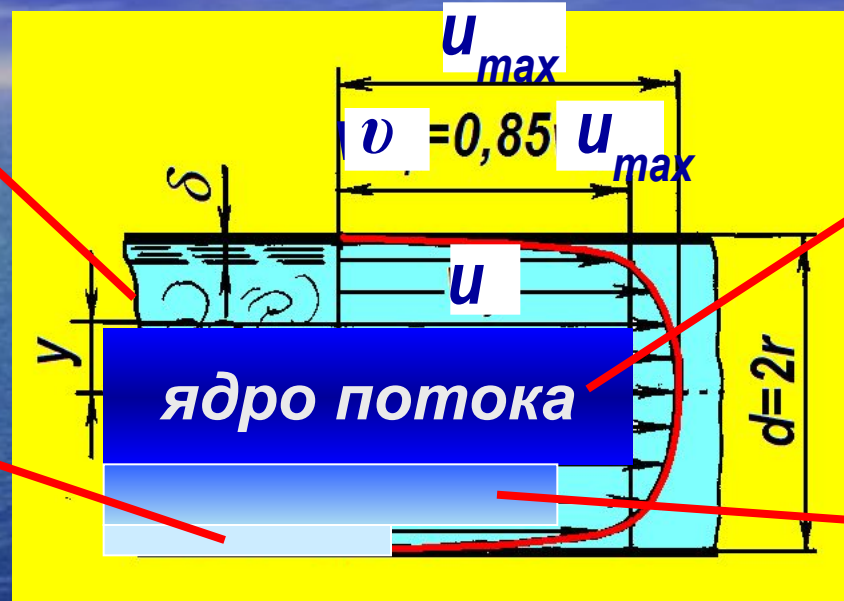
распределение скоростей в сечении трубопровода
при ламинарном движении

При ламинарном режиме средняя скорость жидкости
равна половине скорости на оси трубы

$$v = 0,5 u_{\max}$$

Распределение скоростей по сечению потока при турбулентном режиме

пульсация
скоростей,
перемешиван
ие
жидкости
ламинарный
пограничный
слой



в ядре
потока
скорости
частиц
одинаковы
переходная
зона

При $Re \ll 100000$

$$\delta = 62,8 d Re^{-0,875}$$

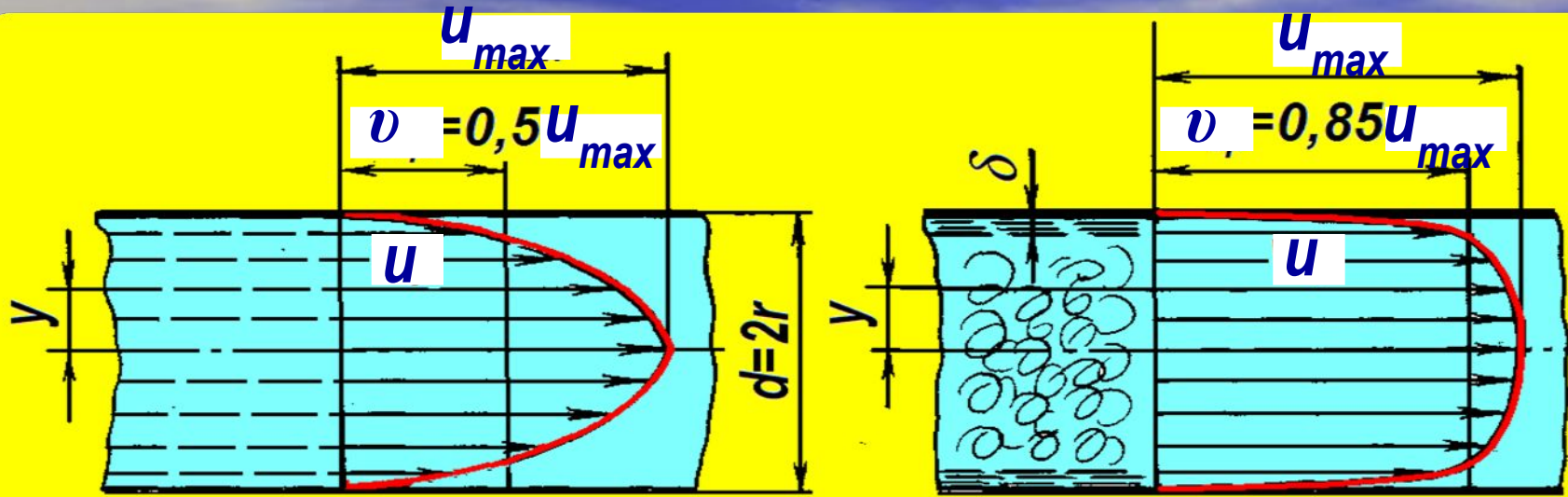
$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{r - y}{r} \right)^m$$

$$, m = f(Re)$$

$$\frac{v}{u_{\max}} = 0,75 \div 0,90$$

$$v \approx 0,85 u_{\max}$$

Распределение скоростей по сечению потока при ламинарном и турбулентном режимах



Характерное распределение скоростей для каждого режима движения жидкости устанавливается на протяжении некоторого участка трубопровода, называемого начальным, длину которого рассчитывают по формулам:

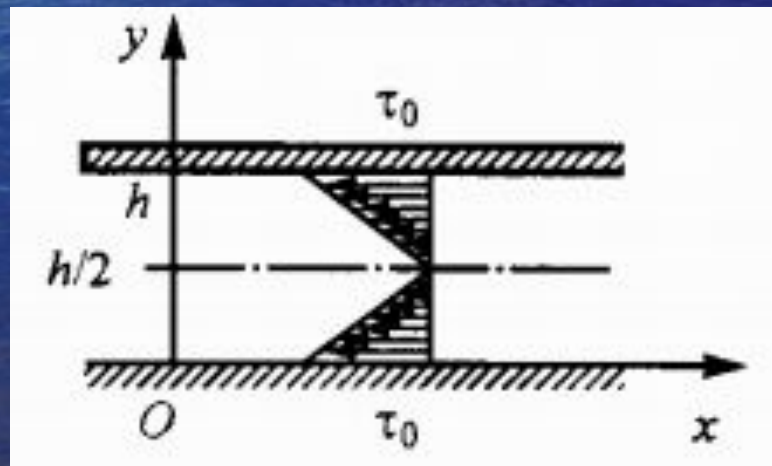
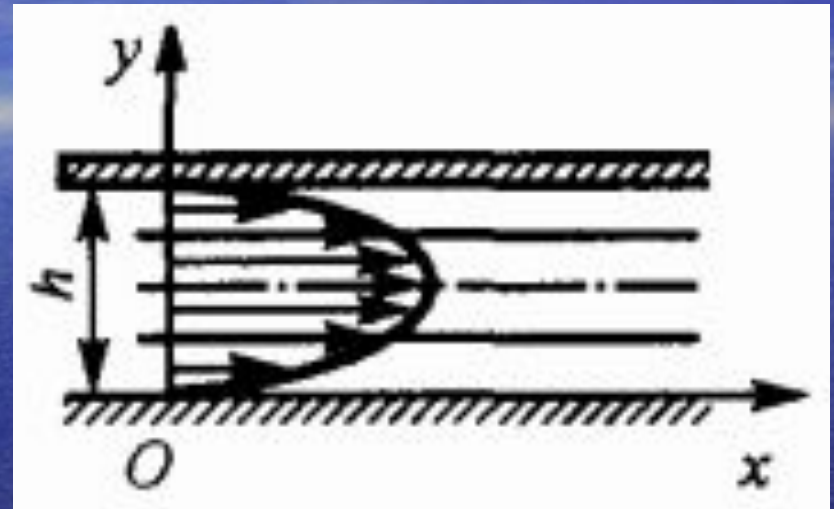
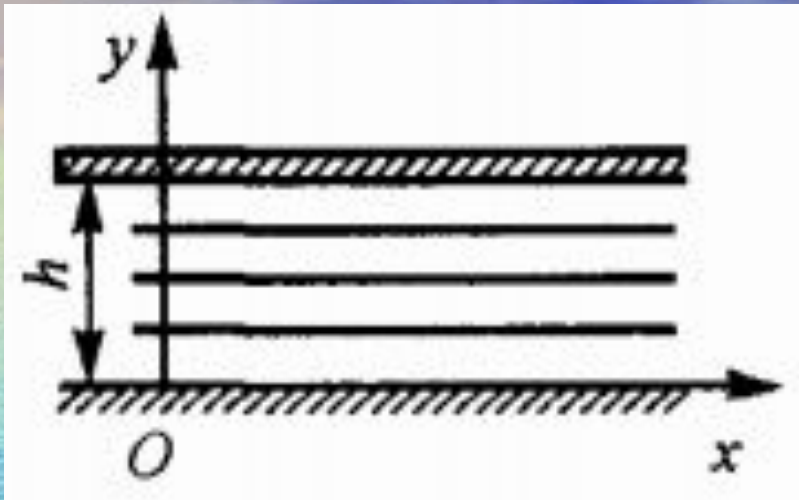
$$l_{нач} = 0,028dRe$$

для ламинарного режима

$$l_{нач} = 0,639dRe^{0,25}$$

для турбулентного режима

Равномерное ламинарное течение в плоском канале



$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

$$u = \frac{y^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} + C_1 y + C_2,$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y - h) + u_0 \frac{y}{h}$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y - h)$$

$$u_m = -\frac{h^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}.$$

$$\frac{u}{u_m} = 4 \left(1 - \frac{y}{h} \right) \frac{y}{h}.$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (2y - h)$$

$$\tau = \tau_0 \left(2 \frac{y}{h} - 1 \right)$$

$$q = \int_0^h u dy = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \int_0^h y(y - h) dy = \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$v = \frac{q}{h} = \frac{h^2}{12\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$u_m = -\frac{h^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}$$

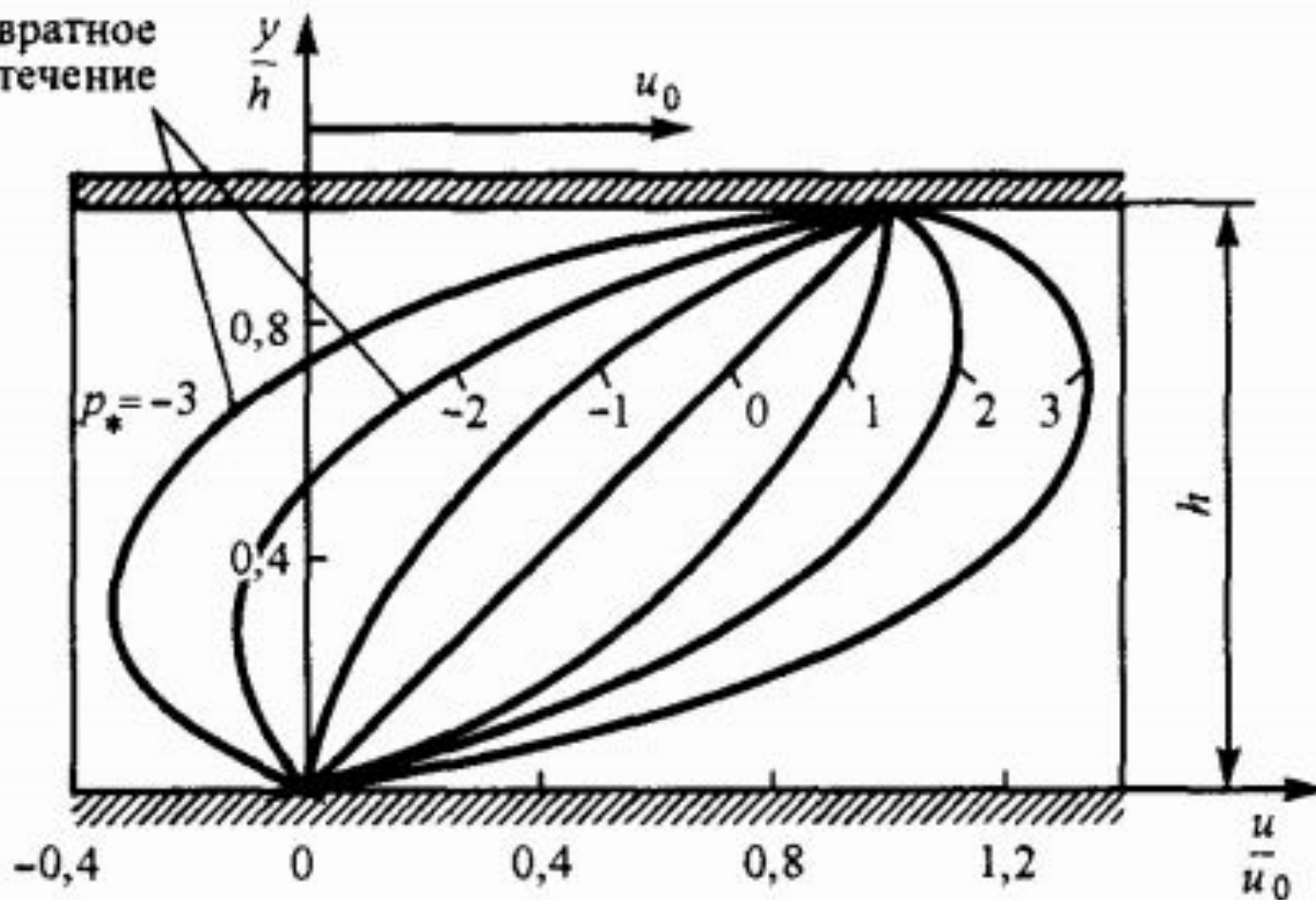
$$\Rightarrow \frac{v}{u_m} = \frac{2}{3}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{12\mu v}{h^2} l$$

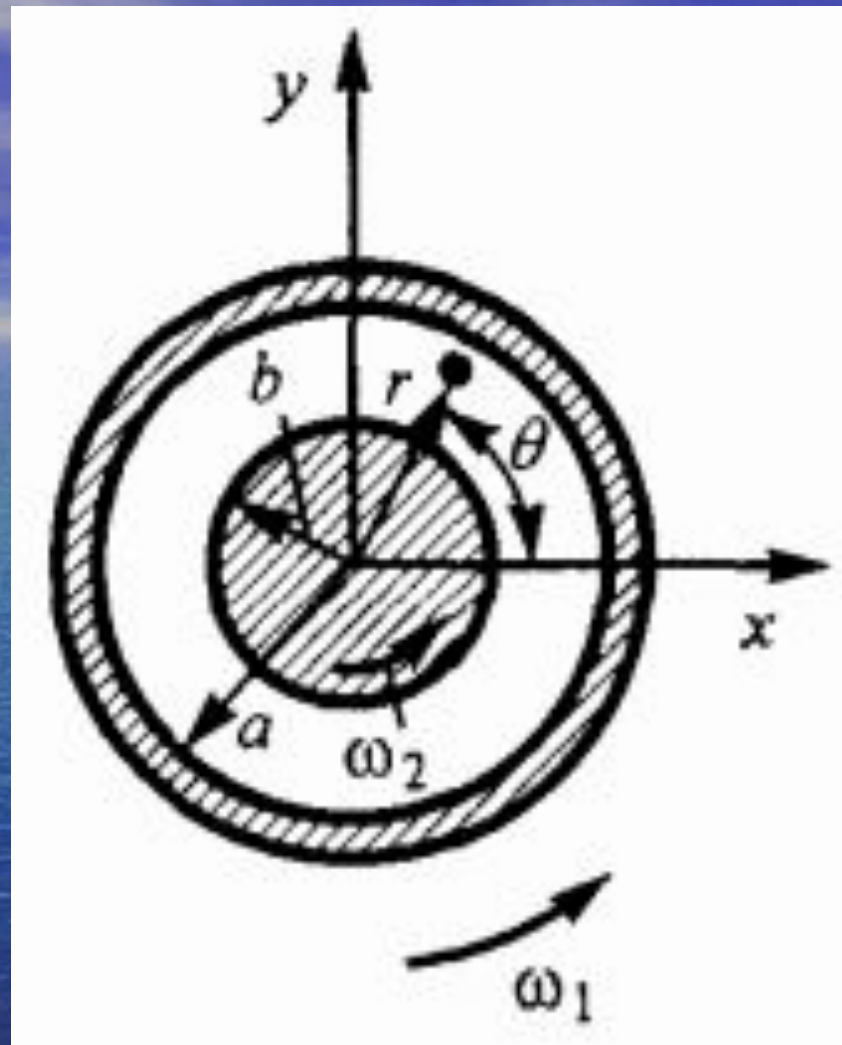
$$p_1 - p_2 = \lambda_K \frac{l}{h} \rho \frac{v^2}{2}$$

$$\lambda_K = \frac{24}{\text{Re}}$$

Возвратное
течение



Распределение скоростей в ламинарном
потоке между параллельными стенками при $u_0 \neq 0$ и $\frac{dp}{dx} \neq 0$



$$M_{\text{TP}} = -2\mu\pi l \frac{a^2}{\delta} u \approx -\mu \frac{2\pi b^2 l}{\delta} u$$

$$u = \omega_2 b$$

Элементы теории подобия

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ
ПРОЦЕСС

математическая модель

решение системы сложных
дифференциальных
уравнений известными
математическими
методами

*общий случай,
но не всегда возможен*

экспериментальная модель

получение эмпирических
уравнений

*частный случай,
применим не для всех
аналогичных явлений*

**ТЕОРИЯ
ПОДОБИЯ**

Элементы теории подобия

Два процесса подобны, если описываются тождественными уравнениями с тождественными граничными условиями и протекают в геометрически подобной обстановке.

Зная условия подобия, можно исследовать модельный аппарат, машину, а потом перенести результаты испытаний на реальный проектируемый объект. Для выявления условий гидромеханического подобия уравнение Навье—Стокса преобразуется к безразмерному виду.

L – масштаб длины; $\tilde{x} = x/L$; $\tilde{y} = y/L$; $\tilde{z} = z/L$
 U – масштаб скорости; $\tilde{u}_x = u_x/U$; $\tilde{u}_y = u_y/U$; $\tilde{u}_z = u_z/U$
 T – масштаб времени; $\tilde{t} = t/U$
 g – масштаб массовых сил; $\tilde{X} = X/g$; $\tilde{Y} = Y/g$; $\tilde{Z} = Z/g$
 Δp_0 – масштаба давлений; $\tilde{p} = p/\Delta p_0$

$$\text{Sh} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_y \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} = \frac{1}{\text{Fr}} \tilde{X} - \text{Eu} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \tilde{u}_x$$

$$\text{Sh} = \frac{L}{UT}; \text{Fr} = \frac{U^2}{gL}; \text{Eu} = \frac{\Delta p_0}{\rho U^2}; \text{Re} = \frac{UL}{\nu}$$

$$\text{Sh} = \frac{F_{\text{и.л}}}{F_{\text{и.к}}}; \text{Fr} = \frac{F_{\text{и.к}}}{F_m}; \text{Eu} = \frac{F_p}{F_{\text{и.к}}}; \text{Re} = \frac{F_{\text{и.к}}}{F_{\text{тр}}}$$

Полную модель для объекта не всегда удастся получить. Воспользовавшись индексами: о – объект; м – модель, рассмотрим пример:

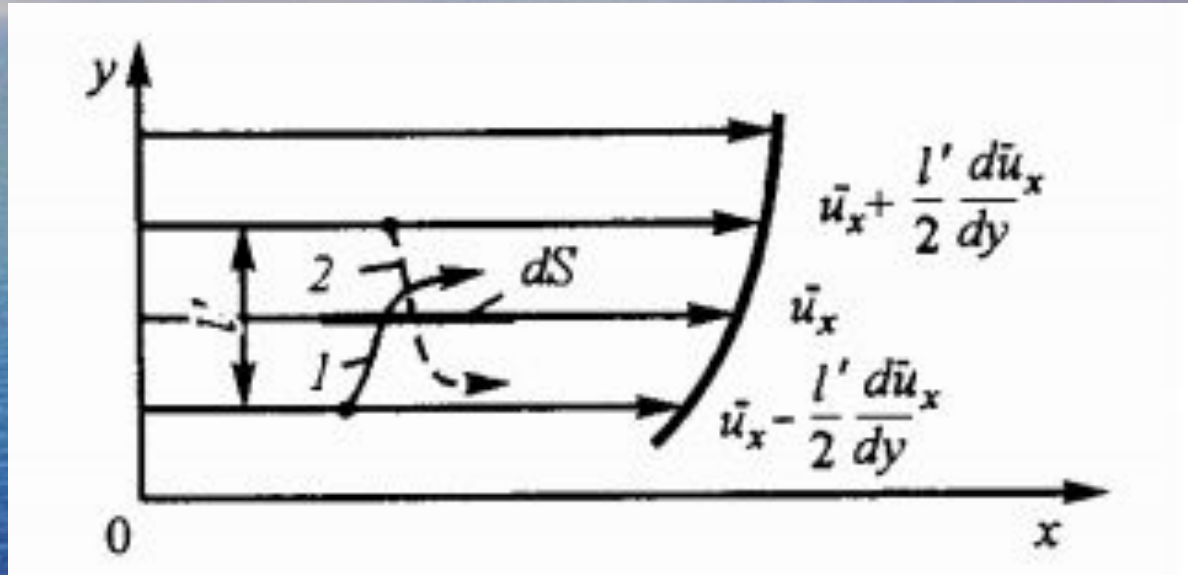
Пусть $L_0/L_m = 10^2$. Тогда из равенства чисел Фруда $U_0^2/(gL_0) = U_m^2/(gL_m)$ следует, что $U_0/U_m = (L_0/L_m)^{0,5} = 10$; а из равенства чисел Рейнольдса

$$\frac{U_0 L_0}{\nu_0} = \frac{U_m L_m}{\nu_m}; \quad \frac{\nu_0}{\nu_m} = \frac{U_0 L_0}{U_m L_m} = 10^3$$

Т. е. испытания модели надо проводить в среде, вязкость которой значительно ниже вязкости среды объекта, что не всегда удастся реализовать

Турбулентное течение

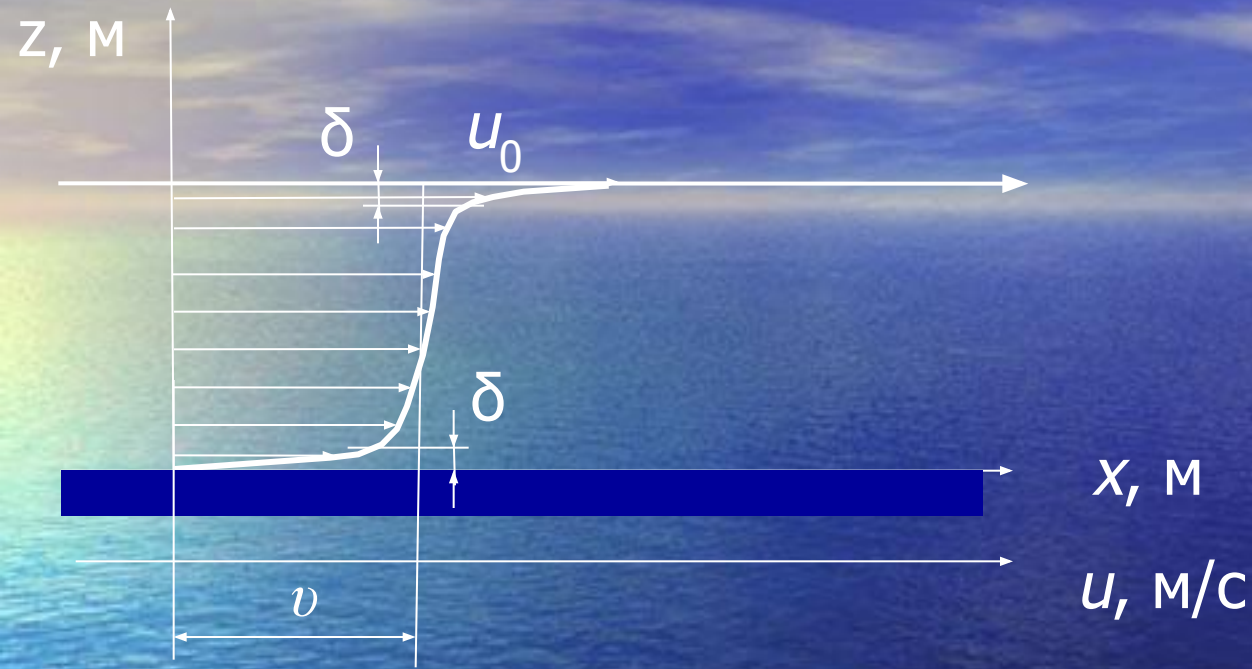
$$-\rho \overline{u'_x u'_y} = \mu_T \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}.$$



**Схема механизма возникновения
турбулентной вязкости**

$$\tau_T dS = \rho \overline{u'_y} \left[\left(\bar{u}_x + \frac{l'}{2} \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right) - \left(\bar{u}_x - \frac{l'}{2} \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right) \right] dS.$$

Турбулентное безнапорное течение Куэтта

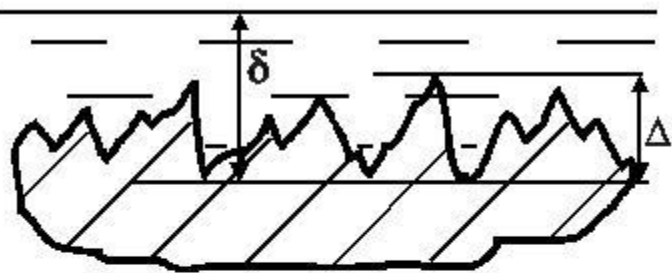


Наличие пульсационного перемешивания жидкости приводит к выравниванию скоростей в средней части потока

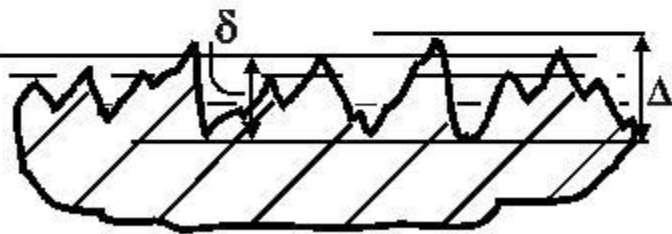
С целью получения аналитических выражений для профиля скоростей поток представляется в виде:

ламинарного пристенного слоя толщиной δ , в котором предполагается отсутствие турбулентности, и

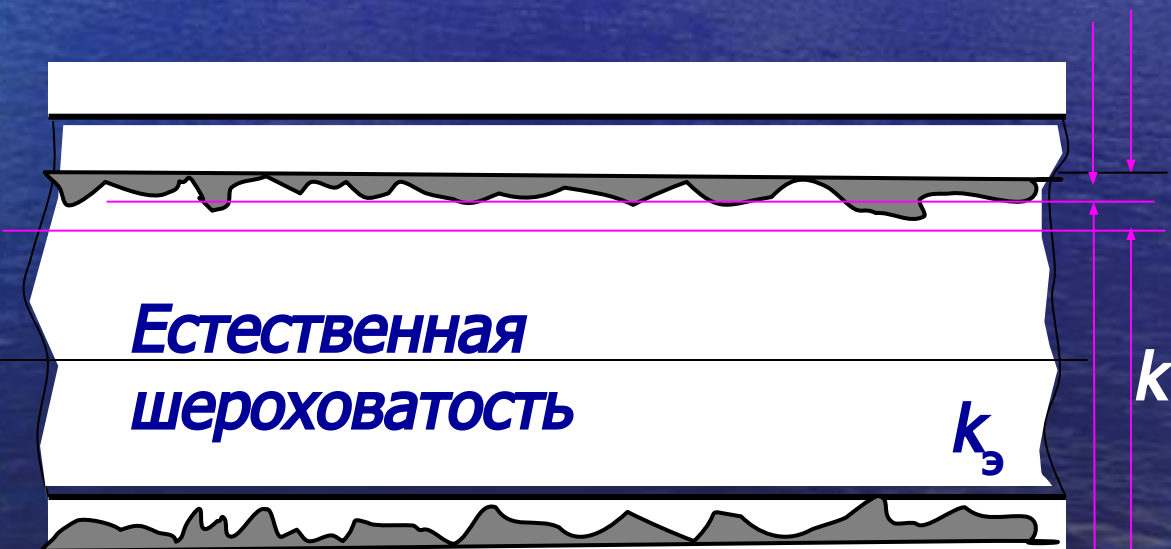
турбулентного ядра, в котором вязкость жидкости $= 0$. Если $\delta > \Delta$, то каналы называются гидравлически гладкими, если $\delta < \Delta$, то каналы – гидравлически шероховатые, где Δ – высота микронеровностей на поверхности канала.



гидравлически гладкая труба



гидравлически шероховатая труба



При установившемся течении Куэтта:

$$\frac{d\bar{u}_x}{dt} = 0; \quad f_x = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\sigma}_x - \rho \bar{u}'_x \bar{u}'_x) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\tau}_{xy} - \rho \bar{u}'_x \bar{u}'_y) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} - \rho \overline{u'_x u'_z} \right) = 0 \Rightarrow \mu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} - \rho \overline{u'_x u'_z} = C_{\text{ш}} \Rightarrow \tau - \tau_0 = \tau$$

Профиль скоростей в ламинарном слое.

Поскольку в нем отсутствует турбулентность, т. е. $\overline{\rho u'_x u'_z} = 0$,

то

$$\mu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = \tau_0$$

Граничные условия: при $z = 0$ $\bar{u}_x = 0$

Интегрируя, получим

$$\bar{u}_x = \frac{\tau_0 z}{\mu} \Rightarrow \frac{\bar{u}_x}{u_*} = \frac{u_* z}{\nu}$$

Профиль скоростей в турбулентном ядре потока. Приняв $\mu = 0$, т. е. предположив, что вязкостные напряжения в потоке малы по сравнению с турбулентными $\tau_\mu = 0$, получим

$$-\rho \overline{u'_x u'_z} = \tau_\theta = \tau \quad \text{первое допущение о постоянстве } \tau$$

для решения данной задачи необходимо иметь одну дополнительную зависимость, связывающую турбулентное напряжение τ_τ с уже имеющимися параметрами течения. Одной из первых моделей, устанавливающих такую связь является модель Прандтля (1929 г.)

Если ввести понятие турбулентной вязкости ν_τ , то

$$\tau_\tau = \rho \nu_\tau \frac{d\bar{u}_x}{dz} \quad a)$$

то исходя из аналогии с вязкостью газа можно записать

$$\nu_T = l u_*, \quad b)$$

где l — длина пути перемешивания, т. е. пути, при прохождении которого жидкостная частица теряет индивидуальность, смешиваясь с остальным потоком; u_* — среднее значение пульсационной скорости, называемой динамической скоростью

Согласно гипотезе Прандтля

$$l = \alpha z, \quad c) \quad \text{второе допущение о прямой пропорциональности}$$

где α — коэффициент пропорциональности, $\alpha < 1$.

$$u_* = \left(-\overline{u'_x u'_z} \right)^{1/2}$$

Поскольку в ядре потока

$$-\overline{u'_x u'_z} = \tau_T / \rho = \tau_0 / \rho, \text{ то } \Rightarrow u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho} \quad d)$$

Подставляя $d)$, $c)$, $b)$ в $a)$ получим

$$u_*^2 = \alpha z u_* \frac{d\bar{u}_x}{dz}$$

После интегрирования будем иметь

$$\bar{u}_x = \frac{u_*}{\alpha} \ln z + C \quad e)$$

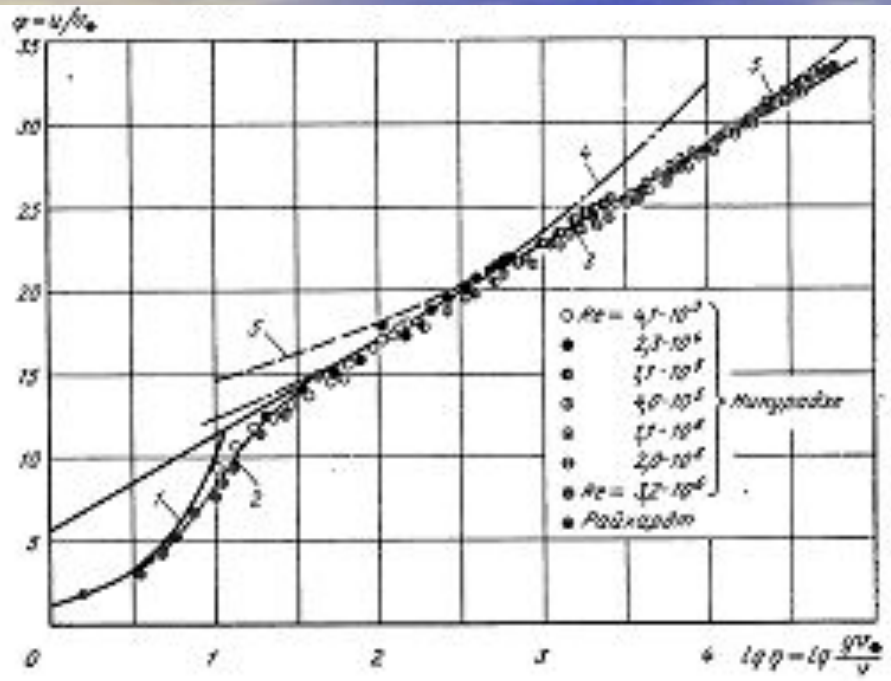
Постоянная C определяется из условия равенства скоростей на границе ламинарного слоя и ядра потока. При $z = \delta$

$$C = \frac{u_*^2}{\nu} \delta - \frac{u_*}{\alpha} \ln \delta$$

Тогда

$$\frac{\bar{u}_x}{u_*} = \frac{u_* \delta}{\nu} + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{z}{\delta}$$

Универсальный
профиль
распределения
скоростей



1 — $\frac{\bar{u}_x}{u_*} = \frac{u_* z}{\nu}$

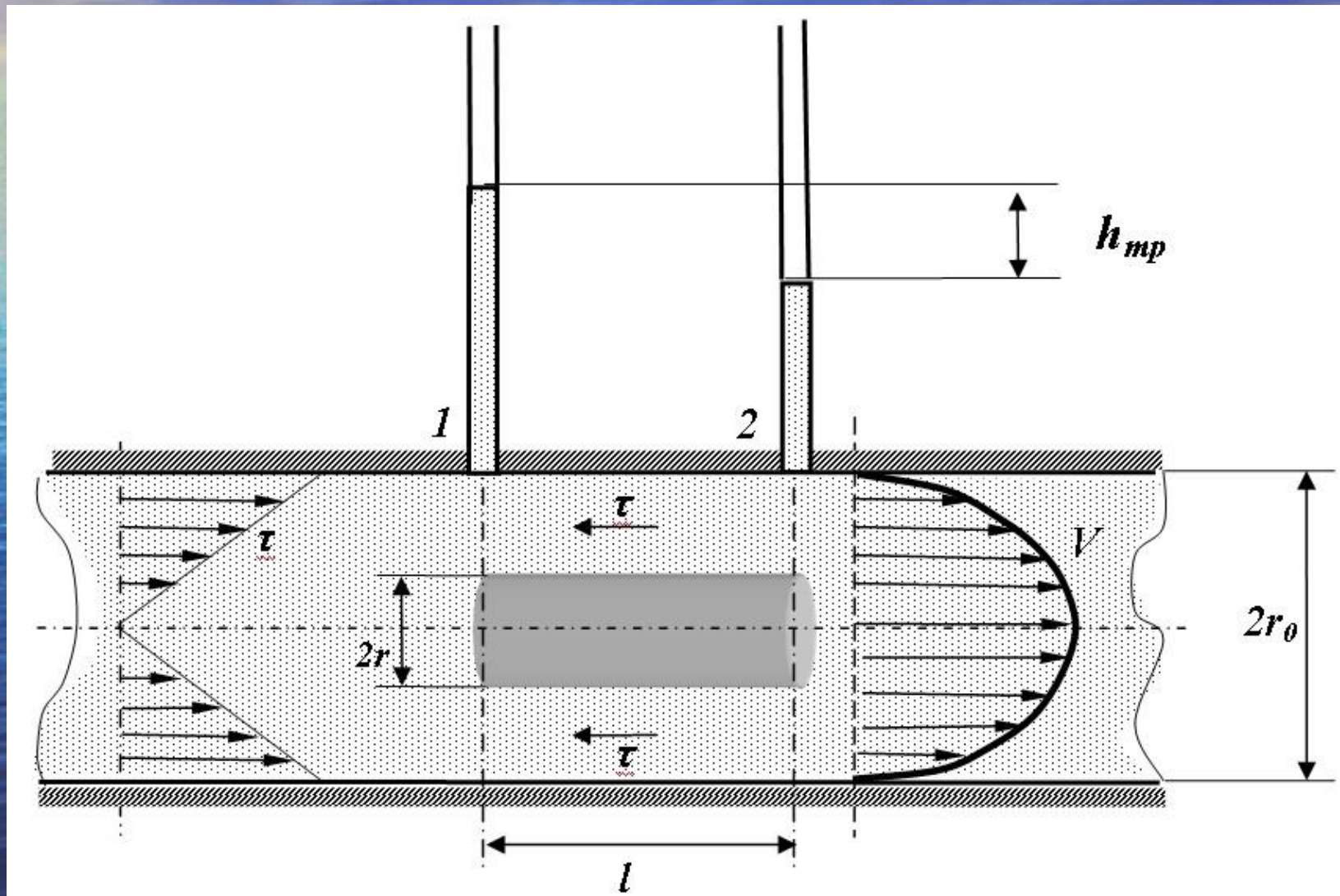
3 — $\frac{\bar{u}_x}{u_*} = 5,5 + 2,5 \ln \frac{u_* z}{\nu}$

4, 5 — $\frac{\bar{u}_x}{u_*} = C \left(\frac{u_* z}{\nu} \right)^n$ $\left(\begin{array}{l} 4 - C = 8,74; n = 1/7 \\ 5 - C = 11,5; n = 1/10 \end{array} \right)$

Точные измерения профиля осредненных скоростей в потоке позволили найти $\alpha = 0,4$; $u_* \delta / \nu = 11,6$. С учетом этого получим

$$\frac{\bar{u}_x}{u_*} = 5,5 + 2,5 \ln \frac{u_* z}{\nu}$$

Следует отметить, что ни одно из рассмотренных допущений не согласуется с реальностью. Так, например, рассматривая графическую интерпретацию ламинарного течения в трубе будем иметь



Равномерное движение цилиндрического элемента жидкости радиусом r и длиной L возможно, если

$$\Delta p = \frac{2L}{r} \tau$$

а равномерное движение всей жидкости в трубе длиной L и радиусом R при

$$\Delta p = \frac{2L}{R} \tau_0 \quad f)$$

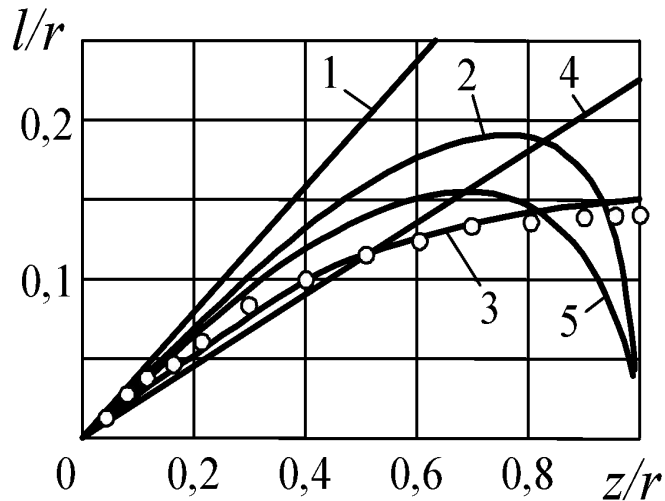
Поскольку $\Delta p = \text{const}$, то

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{R} \Rightarrow (r = R - z) \Rightarrow \tau = \tau_0 \left(1 - \frac{z}{R}\right)$$

Кроме этого из уравнения $f)$ с учетом ф – лы Дарси-Вейсбаха следует

$$\tau_0 = \lambda \frac{\rho v^2}{8} \Rightarrow u_* = v \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \quad g)$$

В соответствии с результатами экспериментов, длина пути перемешивания ℓ достигает максимума на оси трубы.



1 – гипотеза Прандтля; 2 – гипотеза Кармана; 3 – кривая Альтшуля; 4 – кривая Конакова; 5 – кривая Саткевича

Сопротивление гидравлически гладких и шероховатых труб при турбулентном режиме течения жидкости

Для расчета падения давления по длине горизонтальной трубы применяется уравнение Дарси—Вейсбаха, в котором неизвестными величинами являются средняя скорость v и коэффициент гидравлического трения λ .

Алгоритм определения этих величин

Воспользовавшись универсальным профилем скоростей находят среднюю скорость

$$\frac{v}{u_*} = 1,75 + 2,5 \ln \frac{u_* r_0}{v},$$

а далее из уравнения $g)$ после преобразований

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \left(\text{Re} \sqrt{\lambda} \right) - 0,8 \Rightarrow \lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}} \quad \text{формула Блазиуса}$$

Гидравлически гладкие трубы характеризуются неравенством

$$\Delta < \delta \text{ или } \frac{u_* \Delta}{v} < \frac{u_* \delta}{v} = 11,6. \quad , \text{ что соответствует условию}$$

$$\text{Re} < 20 \frac{d}{\Delta}$$

Гидравлически шероховатые трубы характеризуются неравенством $\Delta > \delta$ или $\frac{u_* \Delta}{\nu} > 11,6$, которое можно представить в виде $Re > 500 \frac{d}{\Delta}$

В этом случае постоянную интегрирования C в уравнении е) находят из условия:

при $z = \Delta$ $\bar{u}_x = \frac{u_*^2 \Delta}{\nu} = 11,6 u_*$, что дает

$$\frac{\bar{u}_x}{u_*} = C_1 + 2,5 \ln \frac{z}{\Delta}$$

Определив среднюю скорость потока V , получим

$$\frac{V}{u_*} = C_2 + 2,5 \ln \frac{r_0}{\Delta}$$

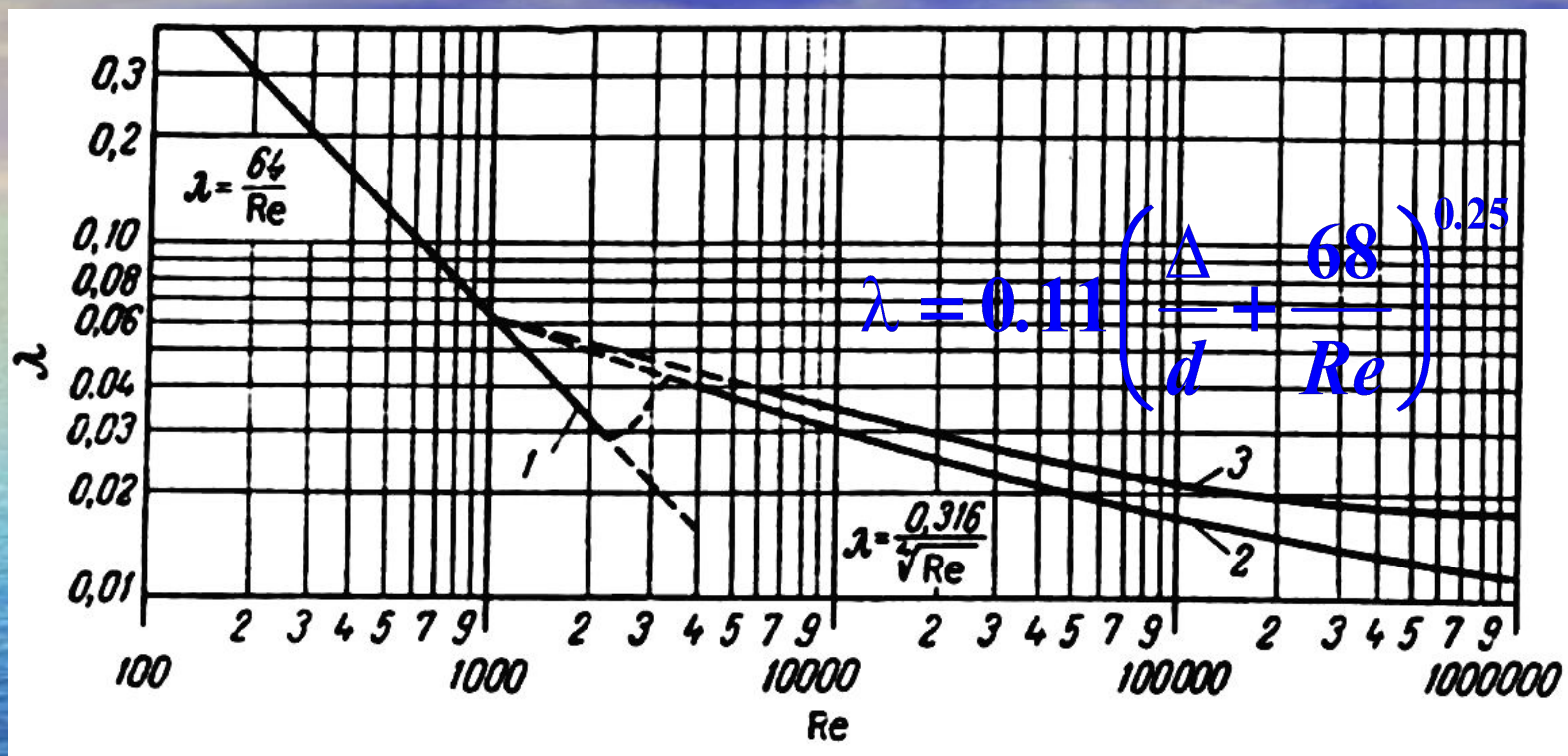
А далее с учетом уравнения g) будем иметь

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = C_3 + 2,5 \ln \frac{r_0}{\Delta}$$

Это уравнение хорошо аппроксимируется более простым

$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} \right)^{0,25} \quad \text{формула Шифринсона}$$

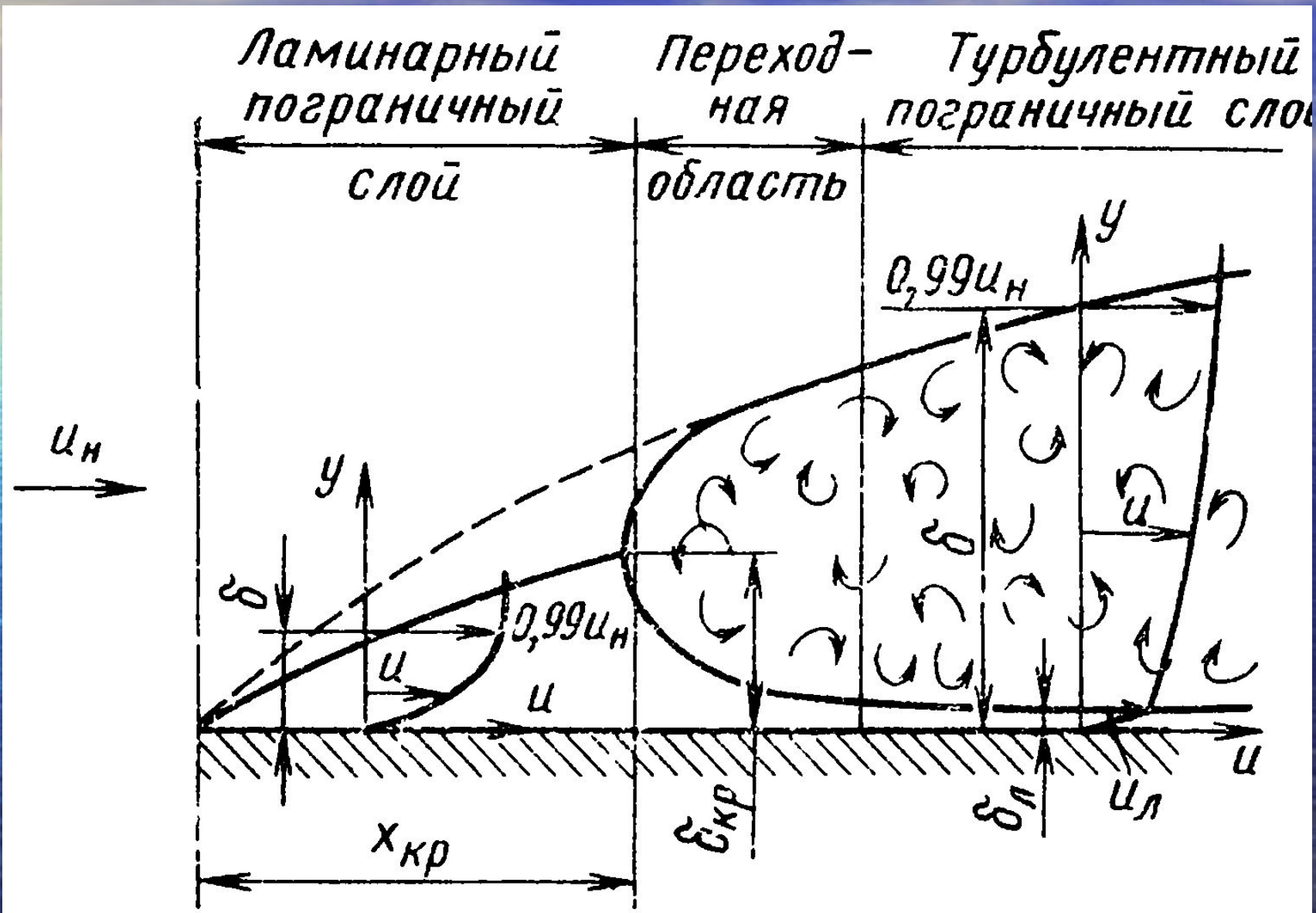
$$\lambda = 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25} \quad \text{формула Альтшуля}$$



Зависимость λ от критерия Re :

1 – гладкие и шероховатые трубы; 2 – гладкие трубы; 3 – шероховатые трубы

Уравнения пограничного слоя



Тонкий пристенный слой переменной толщины δ , формирующийся при обтекании плоской пластины с заостренной передней кромкой набегающим равномерным потоком вязкой жидкости, называют пограничным слоем. В этом слое жидкость заторможена за счет вязкостных сил трения, а скорость изменяется от нуля на стенке до значения, близкого к скорости набегающего потока U .

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$$

На внешней границе очевидно, что $u_x = U$

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = C, \text{ т.е. } \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{dU}{dx}$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

Интегральное соотношение пограничного слоя

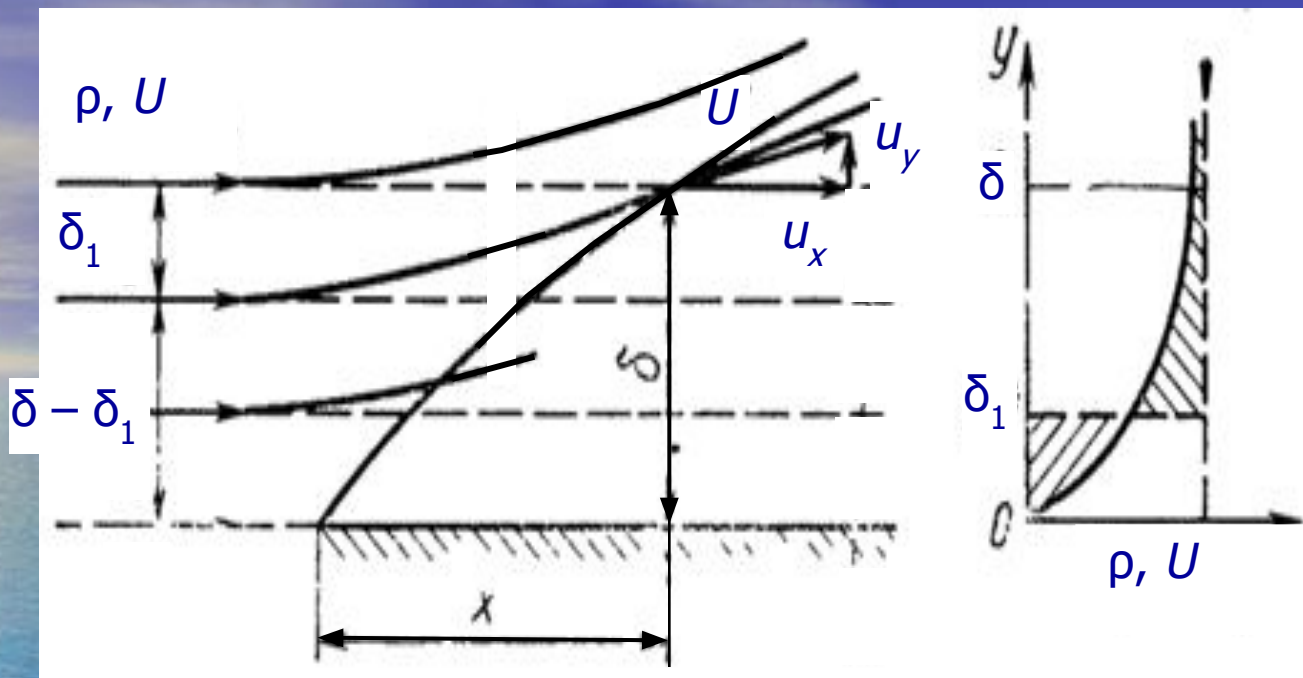
$$\frac{d}{dx} \left(U^2 \delta_2 \right) + U \delta_1 \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}$$

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u_x}{U} \left(1 - \frac{u_x}{U} \right) dy$$

толщина потери импульса

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u_x}{U} \right) dy$$

толщина вытеснения, определяющая насколько смещаются линии тока основного потока из-за уменьшения скоростей в пограничном слое или иначе это толщина слоя, в каждом сечении которого расход невозмущенного потока $\delta_1 U$ равен расходу, вытесненному из пограничного слоя к соответствующему сечению



$$u_x \gg u_y \Rightarrow \partial p / \partial y = 0$$

При $U=\text{const}$ и ширине пластины B будем иметь

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U^2} \Rightarrow \rho U^2 \delta_{2p} = \int_0^l \tau_0 dx \Rightarrow \rho U^2 \delta_2 B = F$$

ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

одномерными называют потоки, в которых гидродинамические величины (скорость, давление) зависят только от одной геометрической координаты. Если реальные потоки жидкости в каналах различной формы характеризовать средней расходной скоростью и давлением на оси потока, то такой поток можно считать одномерным

Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = \frac{\alpha_0}{g} \int_l \frac{\partial p}{\partial t} dt + z_2 + \frac{v_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_w$$

$$h_w = \frac{1}{\rho g Q} \int_V \rho c_p \frac{dT}{dt} dV = \frac{1}{\rho g Q} \int_V \mu D dV$$

$$h_w = h_{mc} + h_l; h_{mc} = \xi \frac{v^2}{2g}; h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}; d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}.$$

Уравнение Бернулли для сети с насосом

Если выполняется условие

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} < z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

то для обеспечения подачи жидкости необходимо сообщить ей энергию внешним источником, или насосом.

Удельная энергия, сообщаемая жидкости насосом, называется полезным напором и обозначается H , м. Уравнение баланса энергий в этом случае имеет вид

$$H + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w$$

Это уравнение позволяет для заданной схемы трубопроводов рассчитывать H , а следовательно, подобрать насос. Поскольку слагаемые

$$\alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} - \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + h_w = f(Q),$$

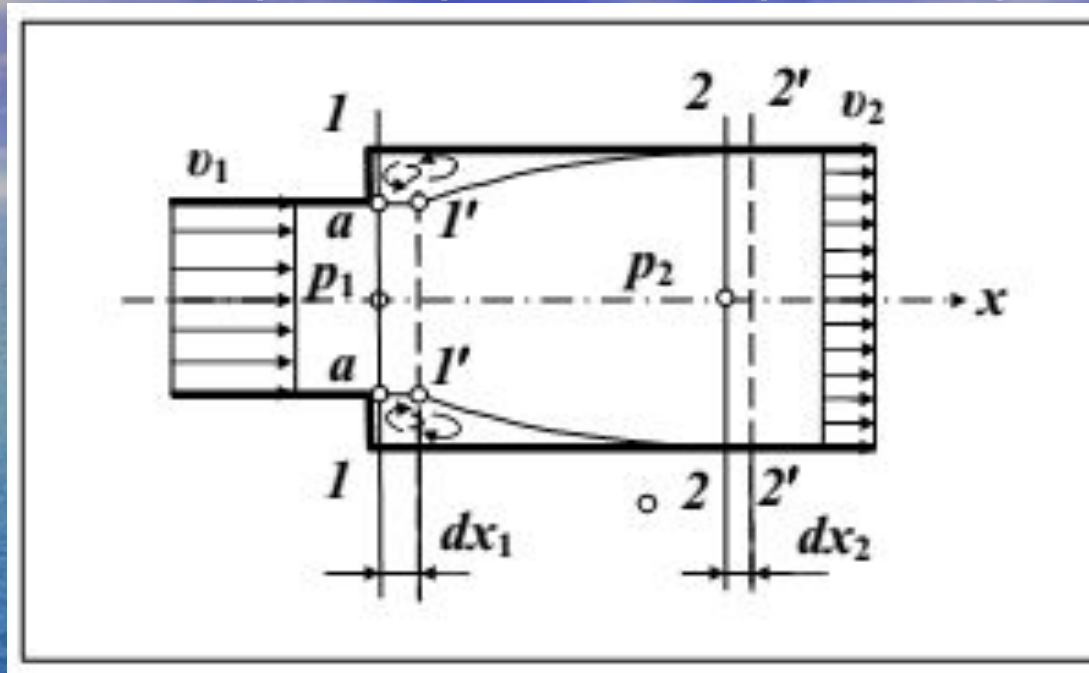
то

$$H_Q = z_{\text{вТ}} - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + f(Q) = H + \frac{v^2}{2g}$$

Уравнение
характеристики
сети

Виды местных сопротивлений

Внезапное расширение. Теорема Борда - Карно



Расчетная схема к определению потерь при внезапном расширении

Из уравнения Бернулли следует

$$h_{в\ p} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}$$

Выигрыш в давлении определим, воспользовавшись теоремой об изменении количества движения жидкости

$$\frac{dK_x}{dt} = R_{px} \Rightarrow \frac{dK_x}{dt} = \rho Q (v_2 - v_1); \Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$

$$R_{px} = (p_1 - p_2) S_2.$$

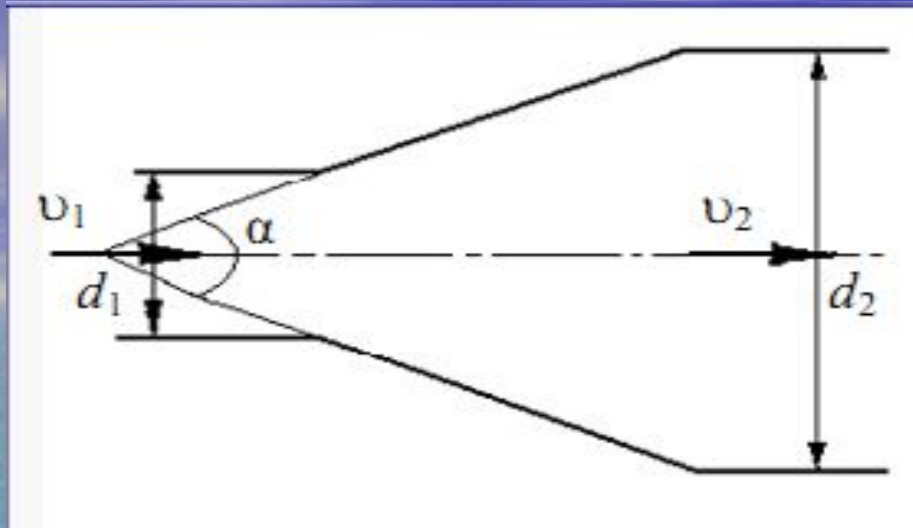
Тогда

$$h_{вп} = \frac{(v_2 - v_1)^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

С учетом уравнения неразрывности $v_1 S_1 = v_2 S_2$, получим

$$\zeta_1 = \left(\frac{S_1}{S_2} - 1 \right)^2 \quad \zeta_2 = \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right)^2$$

Постепенное расширение

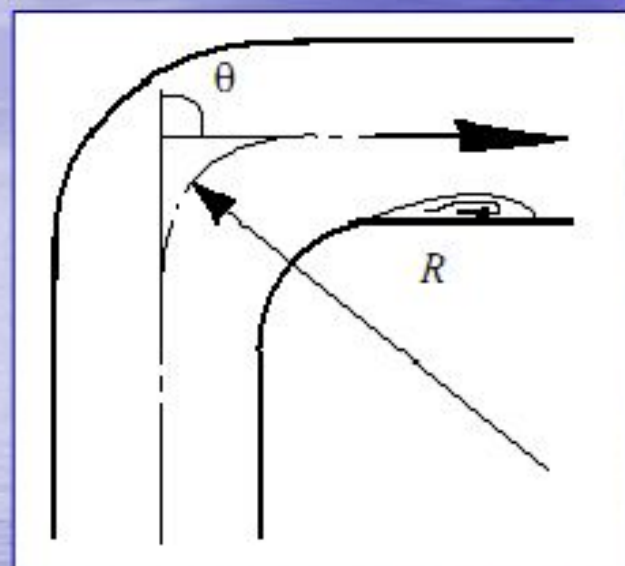


Потерю напора в диффузоре можно условно рассматривать как сумму потерь на трение и расширение. При небольших углах α возрастают потери по длине, а сопротивление на расширение становится минимальным. При больших углах α наоборот: возрастает сопротивление на расширение. Коэффициент сопротивления диффузора можно определить по следующей формуле

$$\xi_{\text{диф}} = \frac{\lambda}{8 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

$$h_{\text{диф}} = \xi_{\text{диф}} \frac{v_1^2}{2g}$$

Поворот трубы (колесо)

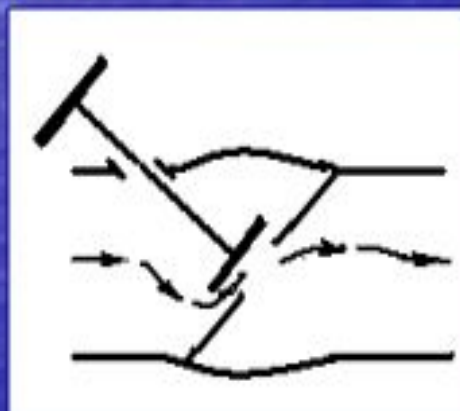


Величина коэффициента местного сопротивления зависит от угла поворота θ , радиуса поворота R , формы поперечного сечения и приводится в справочниках. Для круглого сечения трубы при $\theta = 90^\circ$ коэффициент сопротивления можно определить по формуле

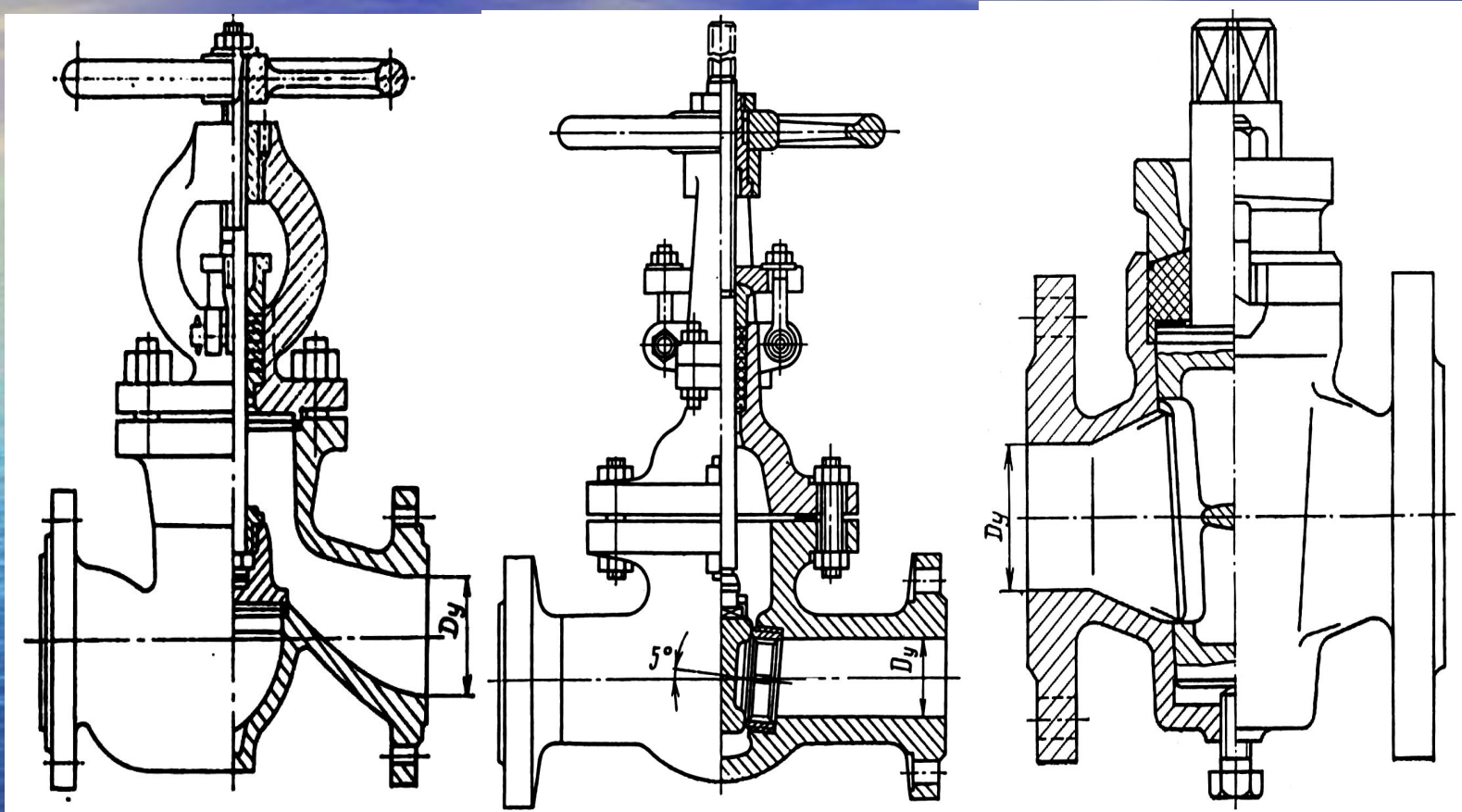
$$\xi_{\text{кол}} = 0,05 + 0,2 \frac{d}{R}$$

Другие виды местных сопротивлений

Для ориентировочных расчетов можно пользоваться следующими коэффициентами местного сопротивления:

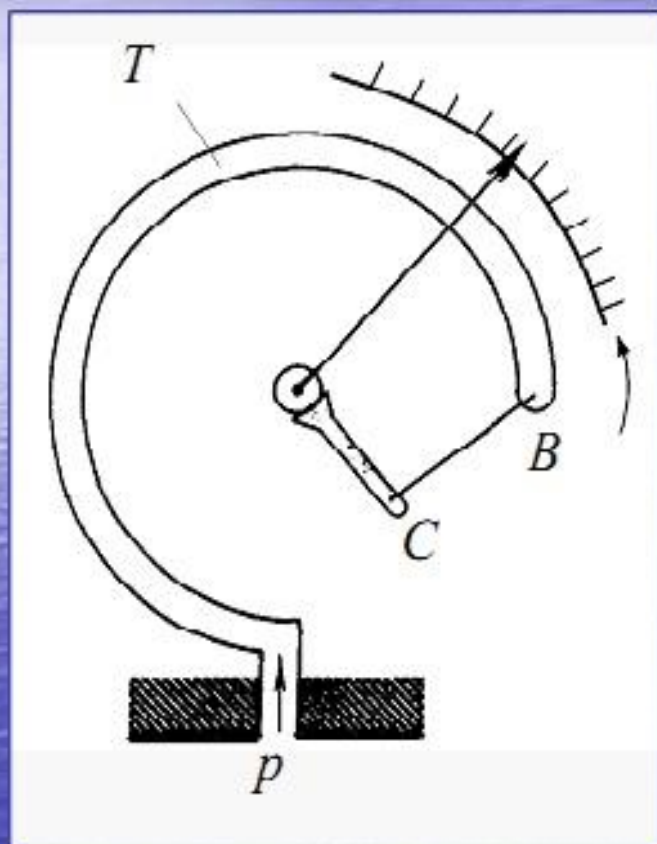


- задвижка при полном открытии – 0,15;
- вход в трубу при острых кромках – 0,5;
- вентиль с косым затвором при полном открытии (рис. 4.18) – 3;
- симметричный тройник – 1,5.



Измерительные приборы, используемые при проведении экспериментальных работ

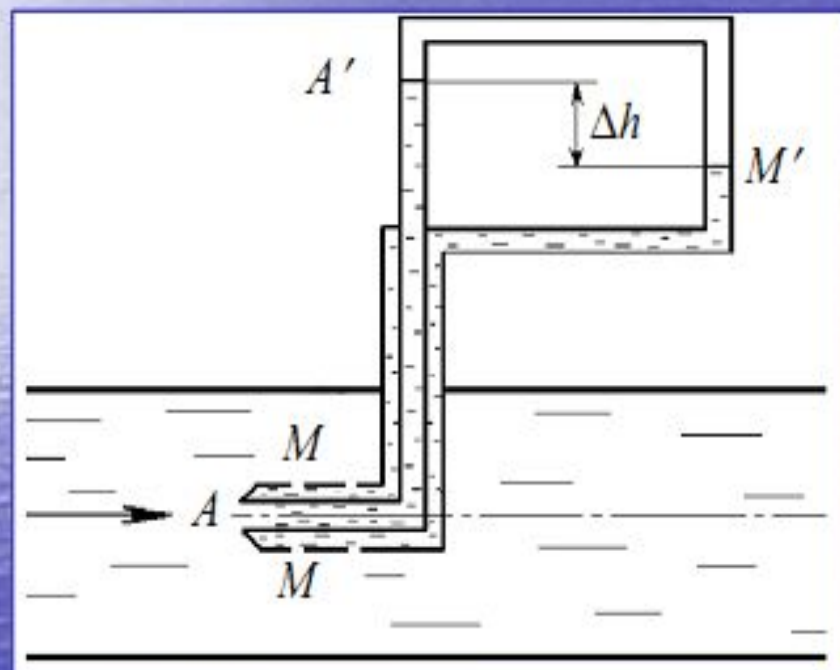
2. Механические манометры.



Манометр состоит из согнутой металлической трубки **T**, один конец которой соединен с резервуаром, в котором измеряется давление. Конец трубки **B** соединен с рычагом **BC**, который поворачивает стрелку. При повороте стрелки она указывает величину давления. При избыточном давлении в трубке **T** свободный ее конец **B** начинает распрямляться и приводит в движение стрелку, которая показывает величину давления. Такие манометры отличаются прочностью.

5. Трубка Пито–Прандтля.

Трубка Пито–Прандтля позволяет одновременно определить величину динамического и статического давления в определенной точке потока.



Разность давления в точках A' и M' будет

$$\Delta p = \rho g h$$

Разность давления Δp зависит от динамического давления на входе в трубку Пито–Прандтля, что следует из уравнения Бернулли для точек A и M :

$$p_M = p_A + \frac{\rho v^2}{2}$$

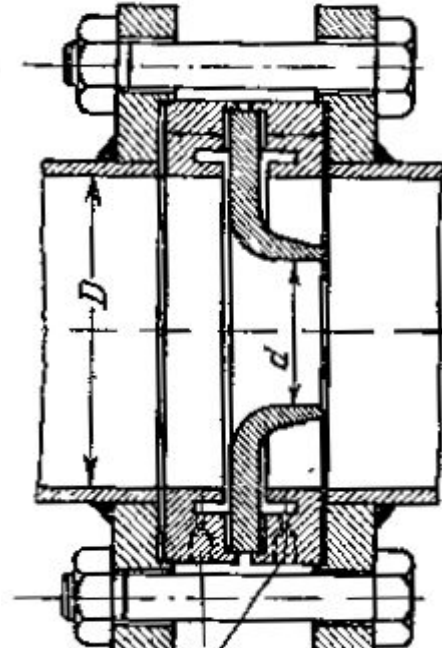
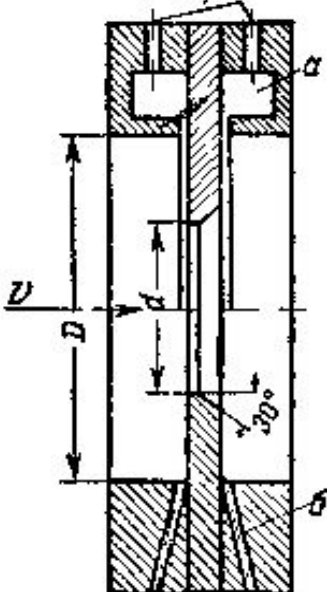
где v – скорость потока на входе в трубку Пито–Прандтля. Таким образом,

$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{2}$$

откуда получаем

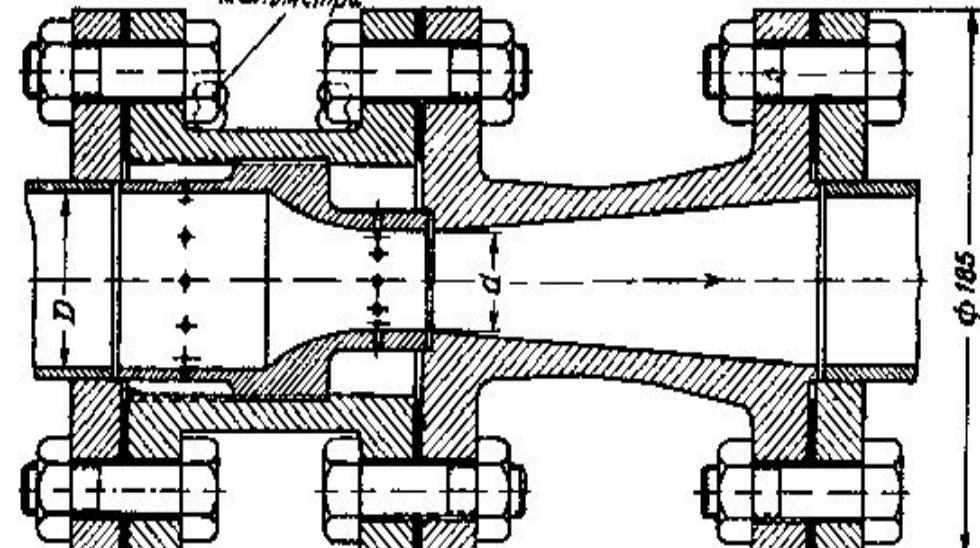
$$v = \sqrt{2gh}.$$

Присоединение
дифференциального
манометра

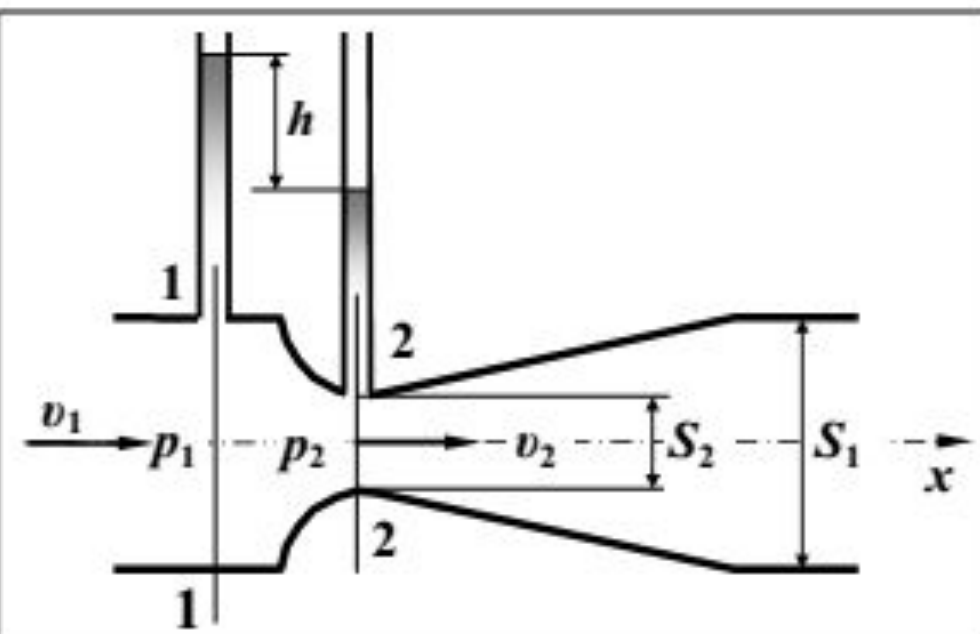


Место
присоединения дифференциала
манометра

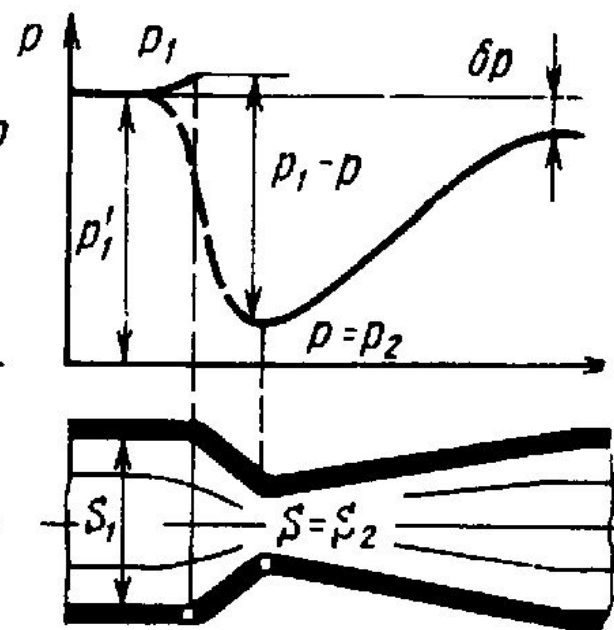
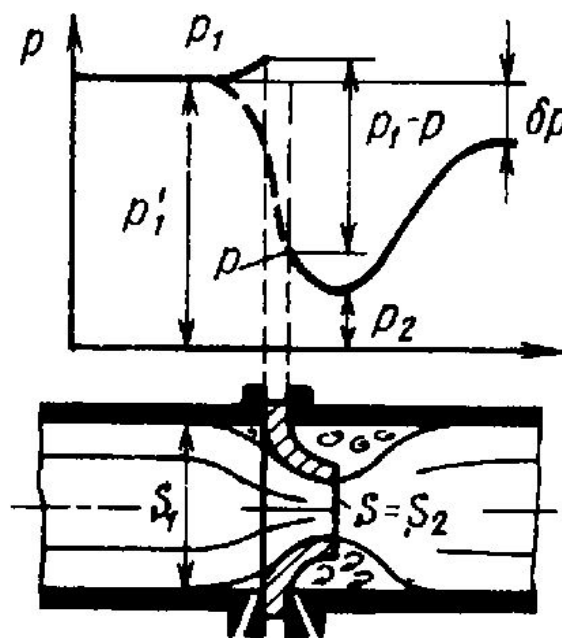
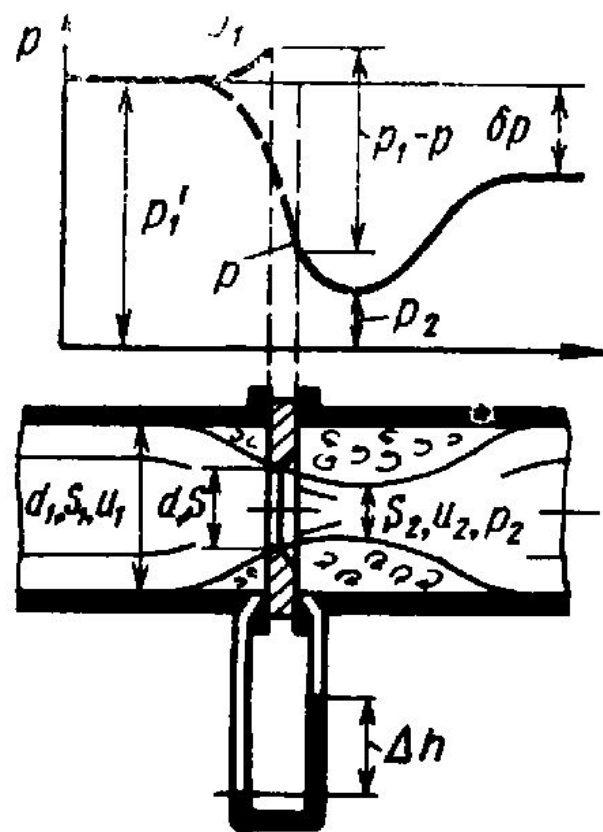
Присоединение
дифференциального
манометра



Фиг. 16-3. Расходомерная труба Вентури.



$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{(\alpha_2 + \zeta) \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2 - \alpha_1}}$$



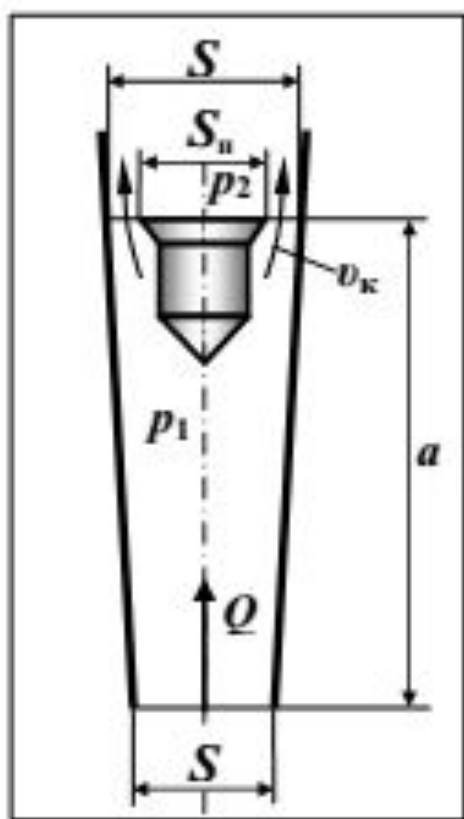


Рисунок 7.12 – Ротаметр

Ротаметр (рис. 7.12) – это расходомер, выполненный из стеклянной конической трубки, внутри которой находится поплавок. При расходе жидкости Q поплавок устанавливается по высоте a . Установим вид зависимости $Q = f(a)$. Запишем условие равновесия вертикальных составляющих сил, действующих на поплавок

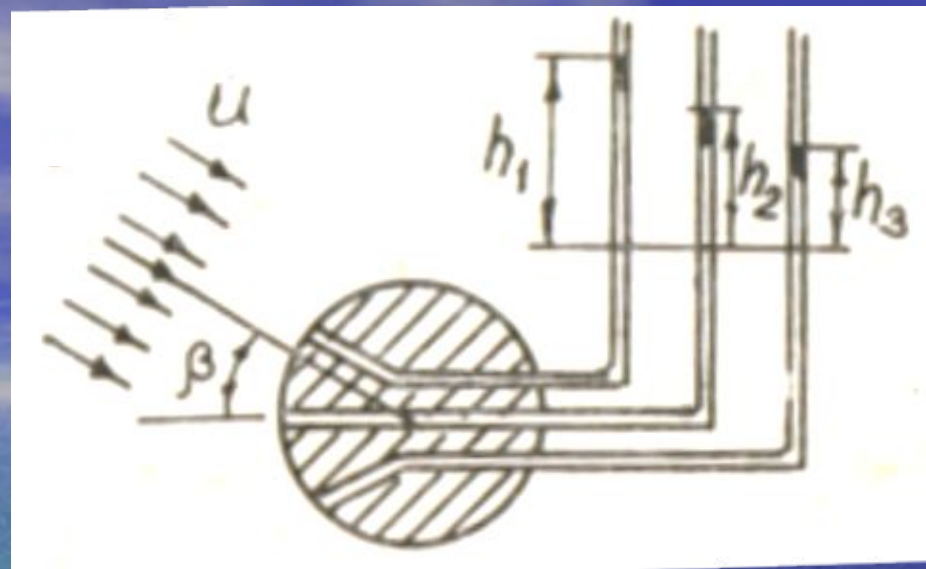
$$-\rho_{\text{п}} g V_{\text{п}} + \rho_{\text{ж}} g V_{\text{п}} + (p_1 - p_2) S_{\text{п}} = 0$$

где $V_{\text{п}}$ – объем поплавка; $\rho_{\text{п}}$ – плотность материала поплавка; $S_{\text{п}}$ – площадь сечения поплавка.

Поскольку величины двух первых слагаемых не зависят от расхода, то для прибора $p_1 - p_2 = \text{const}$. Следовательно, гидравлические потери, возникающие при обтекании поплавка,

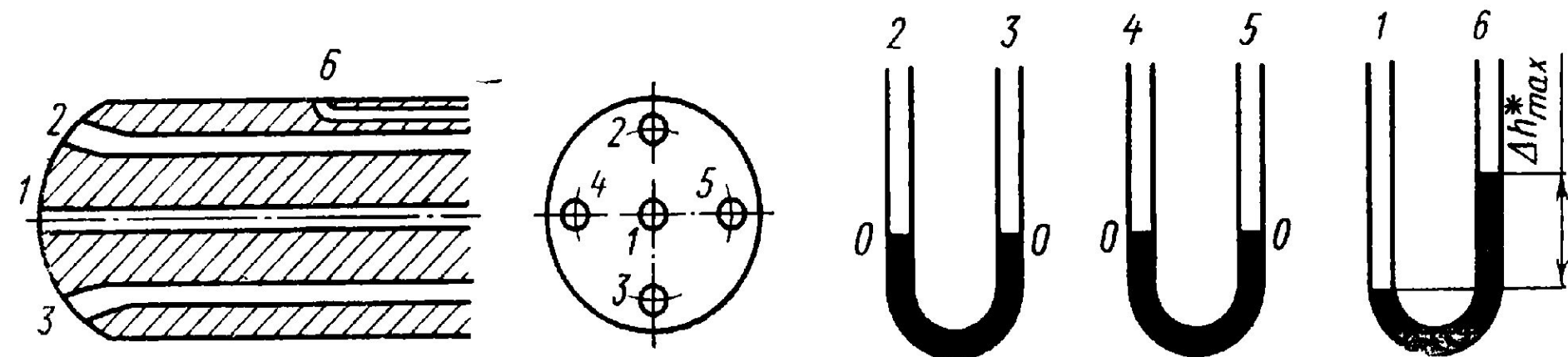
$$h_w = \frac{p_k - p_2}{\rho g} = \zeta \frac{v_k^2}{2g}$$

Поскольку площадь кольцевого канала $S_k = S - S_{\text{п}}$, то скорость жидкости $v_k = Q/(S - S_{\text{п}}) = \text{const}$. При выполнении условия $S = S_0 + ka$ (k – коэффициент пропорциональности) окончательно получим $Q = v_k(S_0 - S_{\text{п}} + ka)$.



плоский зонд

Измерив перепады уровней $h_2—h_1$ и $h_2—h_3$, каждый из которых зависит от значения скорости u и угла β набегающего потока, получаем возможность нахождения u и β



Истечение жидкости

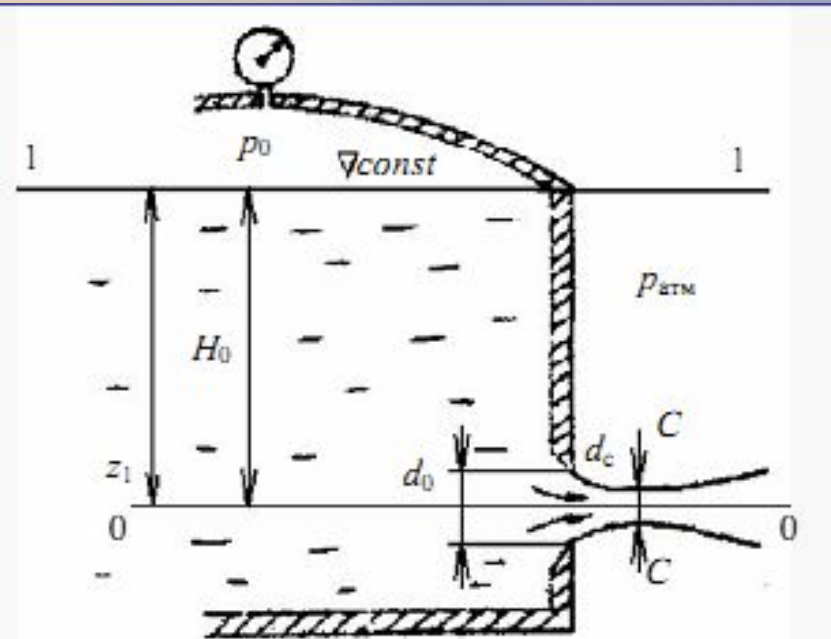
При истечении жидкости через отверстие или насадки из сосуда под давлением p_0 для расчета скоростей и расходов используются зависимости

$$v = \varphi \sqrt{2gH}; \Rightarrow \varphi = v/v_T;$$

$$Q = \mu S_{\theta} \sqrt{2gH}; \Rightarrow \mu = Q/Q$$

Истечение жидкостей из отверстия в тонкой стенке

Отверстием в тонкой стенке называется отверстие, толщина стенок которого составляет не более $\frac{1}{4}$ диаметра.



Степень сжатия струи оценивается коэффициентом сжатия струи

$$\varepsilon = S_c / S_0.$$

Уравнение Бернулли для сечений 1 – 1 и C – C запишется в виде

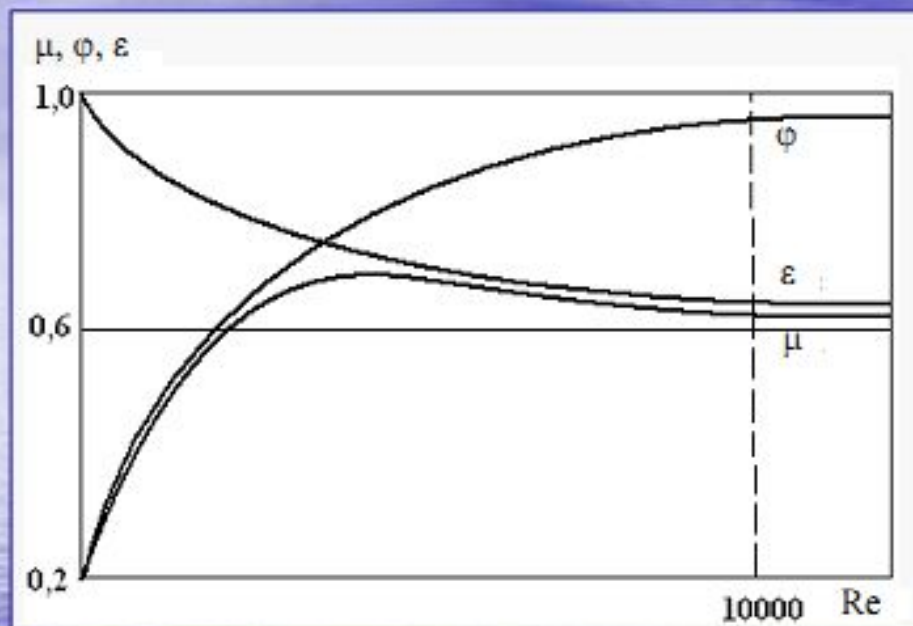
$$H_0 + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_c}{\rho g} + \frac{\alpha v_c^2}{2g} + \xi_o \frac{v_c^2}{2g}$$

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \xi_o}} \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{2gH}$$

$$\varphi = 1 / \sqrt{\alpha + \xi}$$

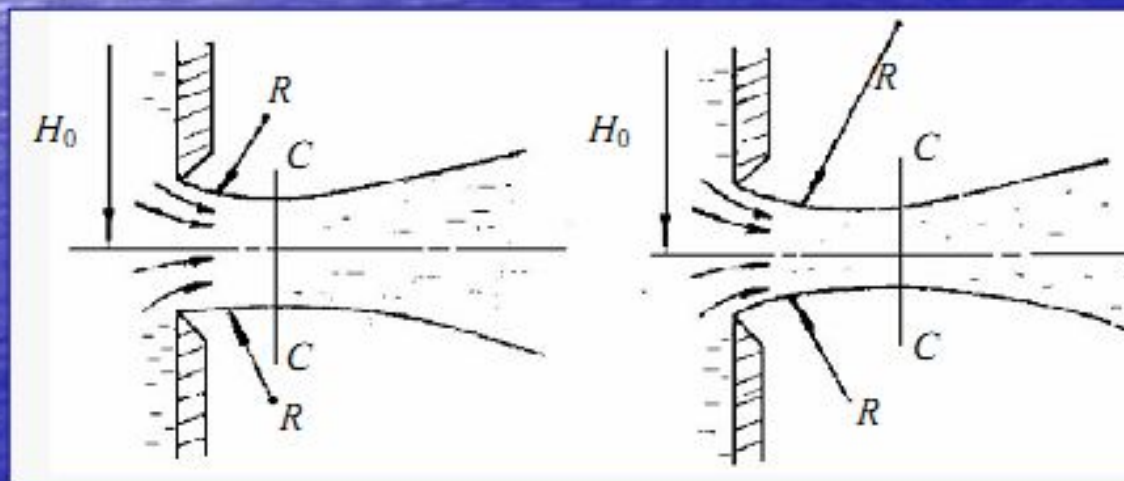
Поскольку $Q = v_c S = S_0 \varepsilon \varphi \sqrt{2gH}$, то $\mu = \varphi \varepsilon$.

Зависимость коэффициентов истечения от числа Рейнольдса



При истечении вязких жидкостей (например, дизельного топлива через форсунки) или при истечении с небольшими скоростями маловязких жидкостей (при малых числах Рейнольдса) будет проявляться зависимость величин коэффициентов истечения μ , ϕ , ϵ от Re

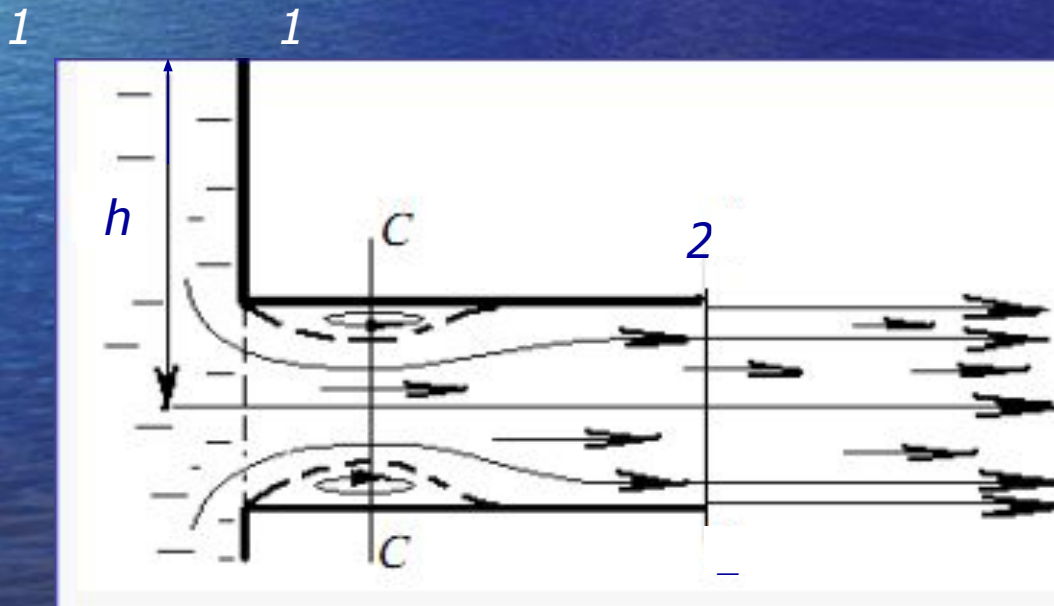
Коэффициент сжатия уменьшается вследствие увеличения радиусов кривизны поверхности струи на её участке от кромки до сжатого сечения $C-C$. При $Re \rightarrow \infty$ значения коэффициентов ϕ и ϵ приближаются к значениям, соответствующим истечению идеальной жидкости ($\phi = 1$, $\epsilon = 0,6$).



Экспериментально установлено, что при турбулентном режиме истечения $\phi = 0,62 - 0,64$; $\mu = 0,60 - 0,62$; при ламинарном μ и ϕ существенно зависят от Re .

Истечение жидкости через цилиндрический насадок

Насадком называется короткая труба длиной от 3 до 5 его диаметров, присоединенная к отверстию. При расчете насадков потерями напора по длине обычно пренебрегают.



При входе жидкости в патрубок в сечении $C - C$ происходит сжатие струи до величины S_c . Далее следует расширение потока до величины S_0 . В уравнении Бернулли, записанном для сечений 1 и 2, $z_1 = h$; $z_2 = 0$; $v_1 = 0$; $p_1 = p_0$; $p_2 = p_0$; $h_w = h_c + h_{в.р} + h_f$, где

$$h_c = \zeta_c g_c^2 \quad (2) \quad h_{в.р} = \frac{(v_2 - v_c)^2}{2g}$$

Для коротких насадков h_f можно пренебречь. С учетом

$$v_c S_c = v_2 S_0, \quad S_c / S_0 = \varepsilon,$$

получим выражения для скорости и расхода. При этом

$$\varphi = 1 / \sqrt{\alpha + 1 / \varepsilon^2 + 1 / (1 - \varepsilon)^2}; \quad \mu = \varphi$$

Экспериментально найдено, что при турбулентном истечении $\mu=0,80 - 0,82$. Длина патрубков l принимается обычно равной 3—4 диаметра. Это обеспечивает завершение расширения потока внутри насадка. Если составить уравнение Бернулли для сечений c и 2 , то при $\alpha=1$ найдем

$$\frac{p_c - p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} < 0,$$

т. е. $p_c < p_2$.

Картина истечения между сечениями 1 и C аналогична картине истечения через отверстие, но в насадке жидкость истекает в область пониженного давления. Этим объясняется увеличение расхода Q по сравнению с отверстием.

Истечение жидкости через водослив прямоугольного сечения шириной B и опорожнение вертикального цилиндрического сосуда



При $S_0 \ll S$ течение можно считать установившимся. Пусть в момент времени t уровень жидкости равен H .

Расход в слое dz составит

$$dQ = \mu B \sqrt{2gz} dz$$

Проинтегрировав это выражение по z от 0 до H , после преобразований получим

$$Q = mBH^{1.5} \sqrt{2g}$$

где $m \approx 2/3\mu$

Тогда за dt вытечет объем

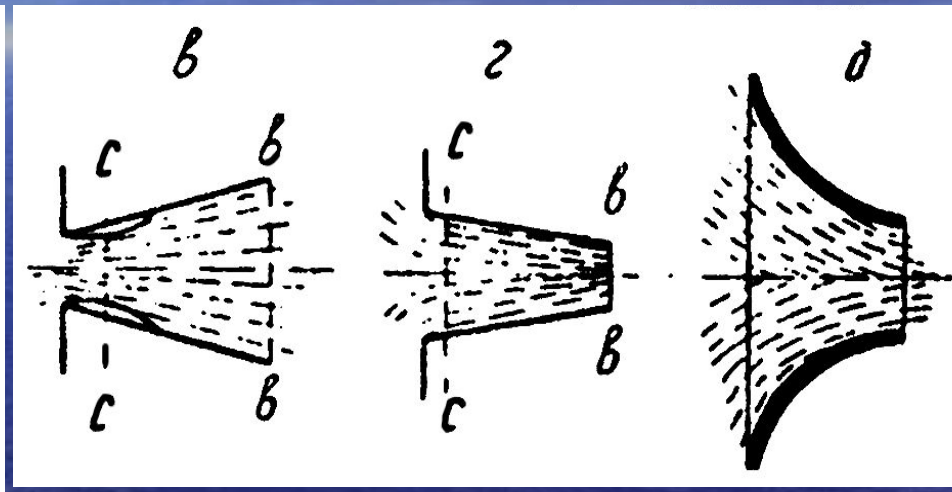
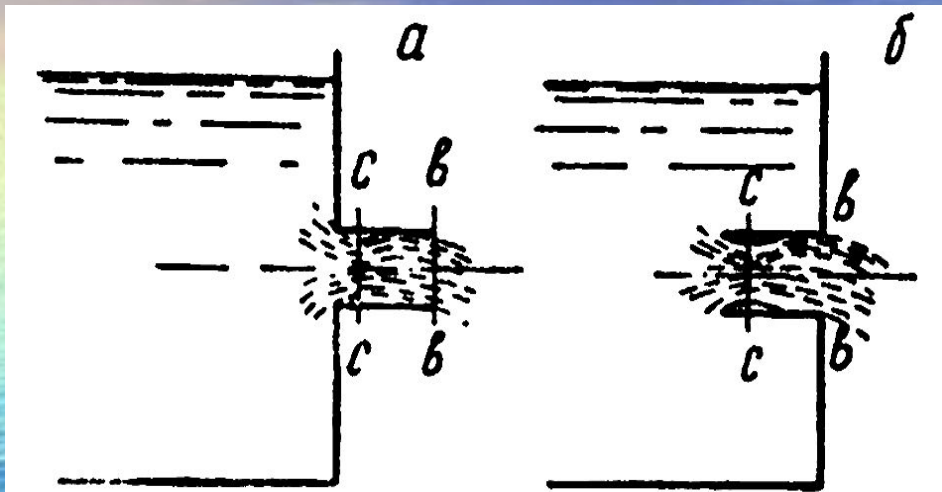
$$dV = Qdt = \mu S_0 \sqrt{2gH} dt$$

и уровень жидкости понизится

$$dH = -\frac{dV}{S} = -\mu \frac{S_0}{S} \sqrt{2gH} dt$$

$t = 2V_0/Q_0$, где $V_0 = SH_0$;

$$Q_0 = \mu S_0 \sqrt{2gH_0}$$



Расчет короткого трубопровода

Коротким считается трубопровод, в котором потери на местных сопротивлениях превышают 5% от общих потерь. К коротким относятся **системы водоснабжения, водоотведения, горячего водоснабжения внутри зданий**

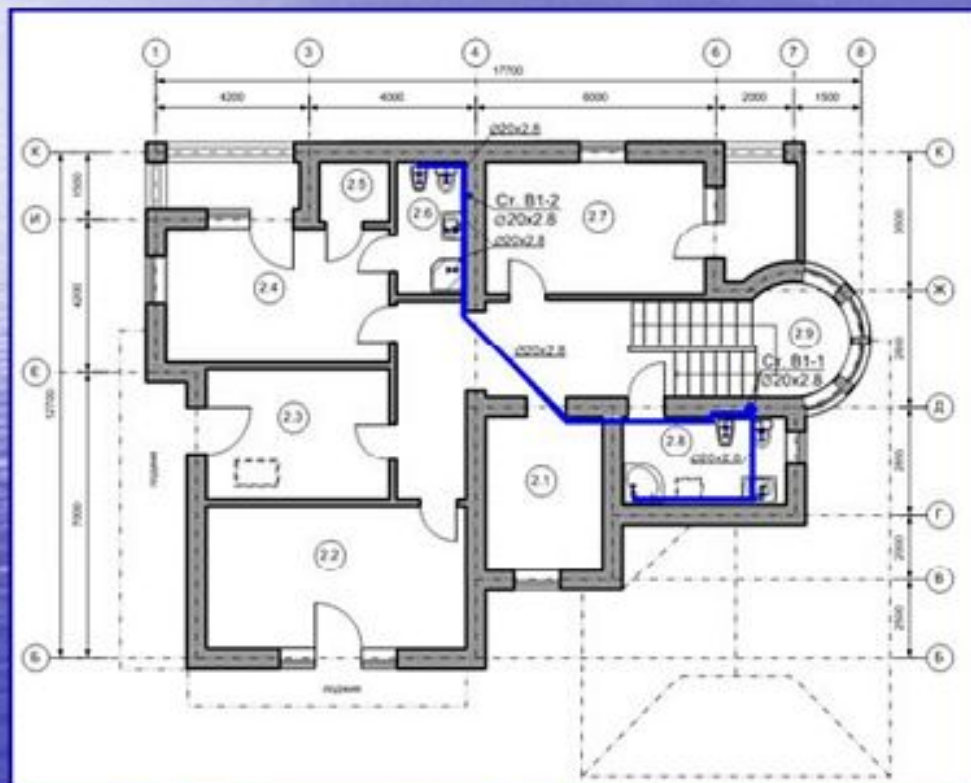


Схема водоснабжения этажа

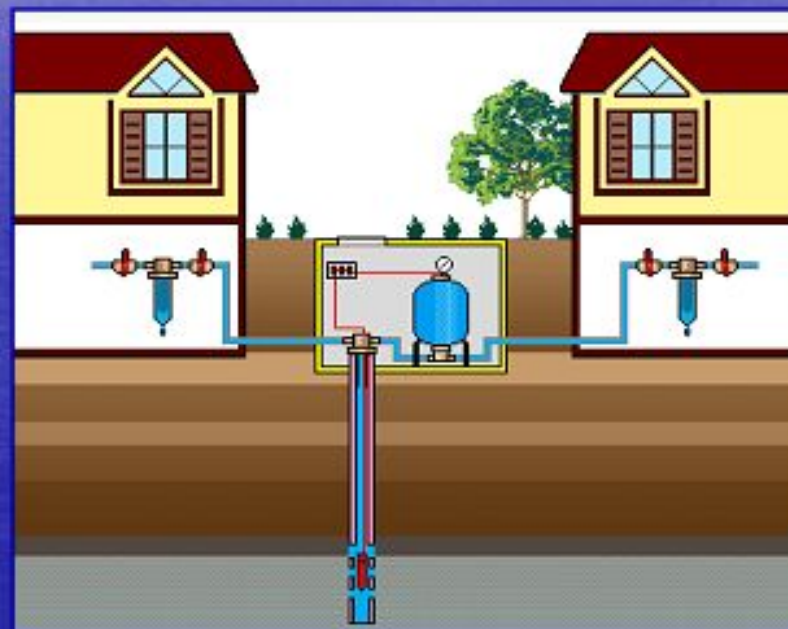


Схема водоснабжения коттеджей

Расчет короткого трубопровода

Расчет необходимо начать с определения формы записи уравнения Бернулли. Для расчета систем водоснабжения и водоотведения обычно применяется уравнение Бернулли в форме напоров:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_{1\text{cp}}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_{2\text{cp}}^2}{2g} + h_w$$

Расчет трубопровода фактически сводится к расчету потерь – местных и по длине. В коротком трубопроводе потери напора по длине определяются по формуле:

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{\text{cp}}^2}{2g}$$

При неизвестном расходе:

– для ламинарного режима коэффициент гидравлического трения определяется по формуле:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$$

– для турбулентного режима коэффициент гидравлического трения рассчитывается по формуле:

$$\lambda = 0,11 \cdot \left(\frac{k_z}{d} \right)^{0,25}$$

Расчет длинных трубопроводов

Понятие о простом и сложном напорных трубопроводах

При расчете длинных трубопроводов пренебрегают потерями напора на местных сопротивлениях, которые малы и обычно не превышают 5 % от общих потерь.

Преобразуем формулу Дарси, заменив скорость расходом, поделенным на площадь поперечного сечения трубы

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{\text{ср}}^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)^2} = A Q^2 l$$

$$A = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5}$$

– удельное сопротивление трубопровода

Величина

$$K = \sqrt{\frac{1}{A}}$$

называется *модулем расхода* и также приводится в справочниках. Тогда

$$h_{\text{дл}} = \frac{Q^2}{K^2} l$$

Расчет длинных трубопроводов

Понятие о простом и сложном напорных трубопроводах

При расчете длинных трубопроводов пренебрегают потерями напора на местных сопротивлениях, которые малы и обычно не превышают 5 % от общих потерь.

Преобразуем формулу Дарси, заменив скорость расходом, поделенным на площадь поперечного сечения трубы

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{\text{ср}}^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi d^2}{4} \right)^2} = A Q^2 l$$

$$A = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5}$$

– удельное сопротивление трубопровода

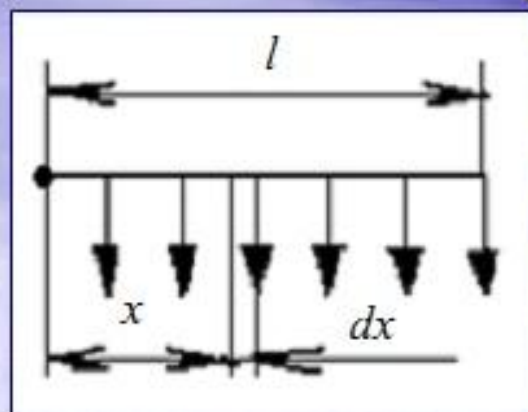
Величина

$$K = \sqrt{\frac{1}{A}}$$

называется *модулем расхода* и также приводится в справочниках. Тогда

$$h_{\text{дл}} = \frac{Q^2}{K^2} l$$

Расчет трубопроводов, соединенных последовательно и параллельно



Непрерывная раздача расхода по пути. К такой схеме приближается работа магистрали водопроводной сети вдоль улицы города при правильной планировке поперечных улиц. Возьмем элементарный участок dx на расстоянии x от начала трубопровода. Разбор расхода на 1 м длины — q . Расход через элементарный участок

$$Q_x = Q - qx$$

Потеря напора на этом участке

$$dh_{\text{дп}} = A Q_x^2 dx = A (Q - qx)^2 dx$$

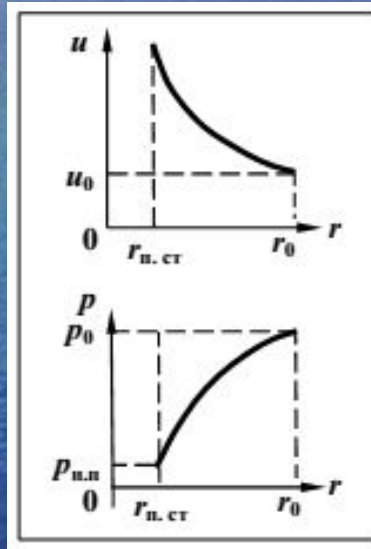
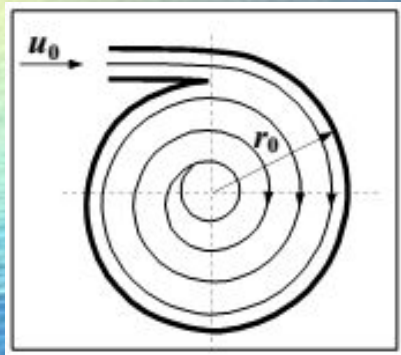
Потеря напора по всей длине трубопровода

$$h_{\text{дп}} = \int_0^l dh_{\text{дп}} = A \int_0^l (Q - qx)^2 dx = A \left(Q^2 l - Qql^2 + \frac{q^2 l^3}{3} \right) = A \left(Q^2 l - Q^2 l + \frac{Q^2 l}{3} \right) = A \frac{Q^2 l}{3}$$

Вывод: При равномерной раздаче потеря энергии в трубопроводе в три раза меньше, чем в случае транзитного расхода.

Поле скоростей и давлений в циклонном устройстве

В отличие от ранее рассмотренного относительного покоя, где вращение внутренним слоям жидкости передавалось за счет сил трения, в циклоне движение центральных слоев происходит за счет перемещения вращательно движущейся жидкости от периферии к центру



При движении жидкости в плоскости XU координата $z=\text{const}$ и полный дифференциал уравнения Бернулли можно записать в виде

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) = -u du \quad \text{a)}$$

Поскольку радиальная составляющая скорости $u_R \ll u$, то в уравнении движения Эйлера при проектировании его на радиальное направление можно пренебречь слагаемым du_R/dt . Учитывая, что

$$F|_r = \omega^2 r \quad \text{grad} p|_r = \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{получим} \quad \frac{\partial(p/\rho)}{\partial r} = \omega^2 r$$

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) = \omega^2 r dr \Rightarrow d\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{u^2}{r} dr \quad b)$$

Из равенства *a)* и *b)*, после интегрирования с начальным условием $u=u_0$ при $r=r_0$ получим $ru = r_0u_0 = C$, а также

$$p = p_0 - \frac{\rho u_0^2}{2} \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - 1 \right]$$

Вторичные токи в реальной жидкости

Вторичными называются течения, возникающие в поперечном сечении каналов из-за наличия вязкости жидкости. В качестве примера рассмотрим течение жидкости в цилиндрическом змеевике, выполненном из трубы диаметром d . В центре потока из-за наличия плавного поворота создается центробежное поле давлений и $p_A > p_B$. В жидкости, примыкающей к стенке, движение отсутствует, т. е. центробежное поле давлений возникнуть не может. Условие отсутствия движения жидкости в поперечном сечении — это равенство давлений при $r = \text{const}$, т. е. $p_A > p_C$; $p_B > p_D$.

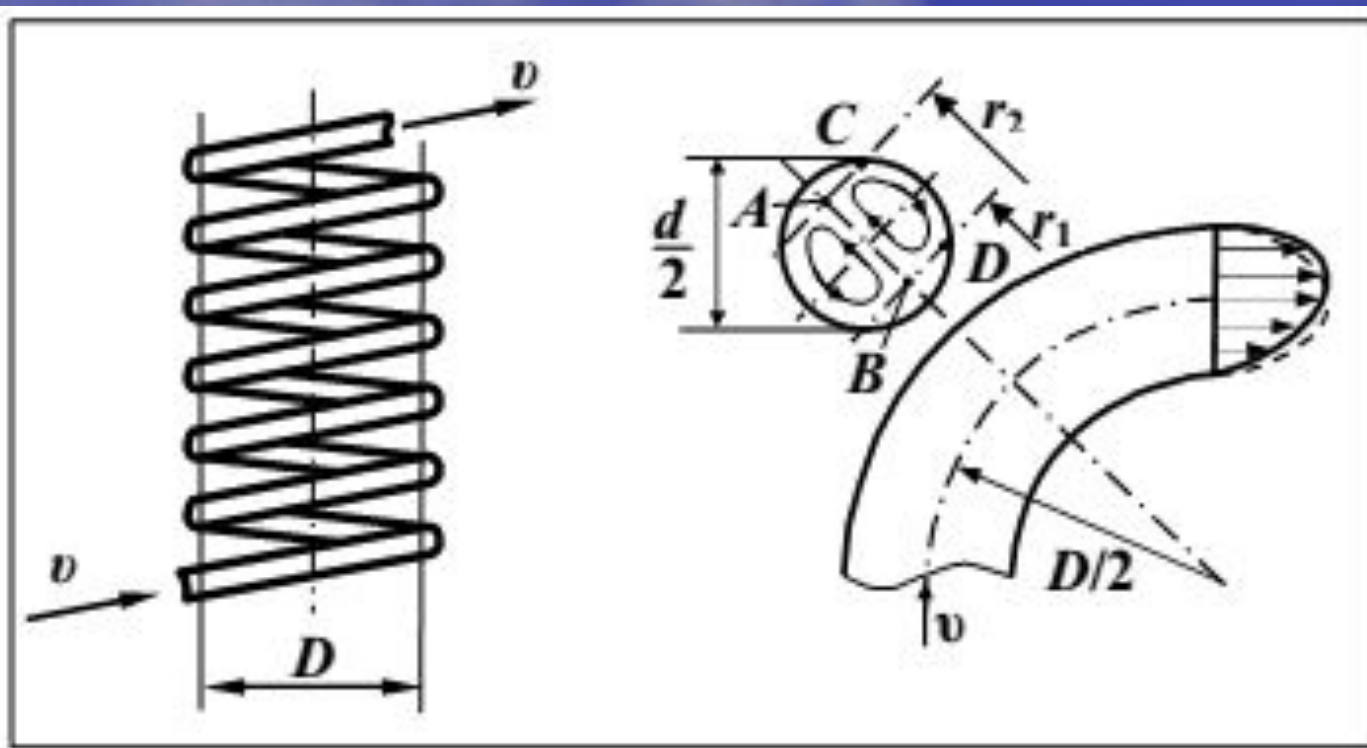


Рисунок 7.20 – Иллюстрация закономерностей течения жидкости в змеевике

Это условие в реальной жидкости невыполнимо, и вблизи стенки возникает движение, направленное к оси змеевика, в ядре потока — от оси змеевика. Вторичные токи вызывают деформацию профиля скоростей, смещение максимума скоростей. В результате изменяются как сопротивление канала так и характер смены режимов.



1 – для прямых труб; 2 – для змеевика

Рисунок 7.21 – Зависимость λ от Re

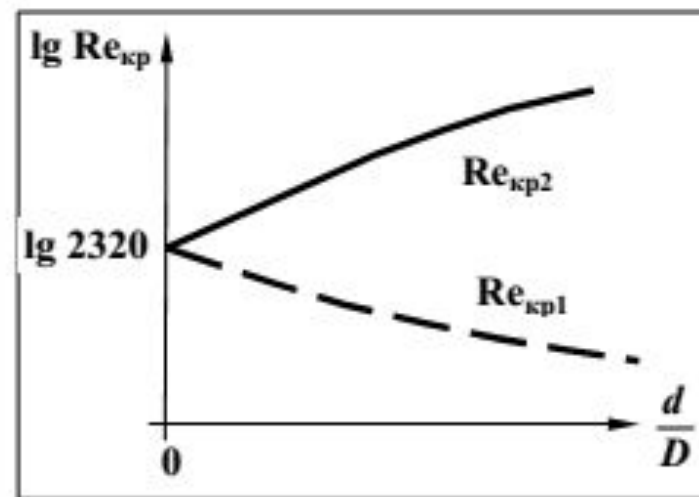
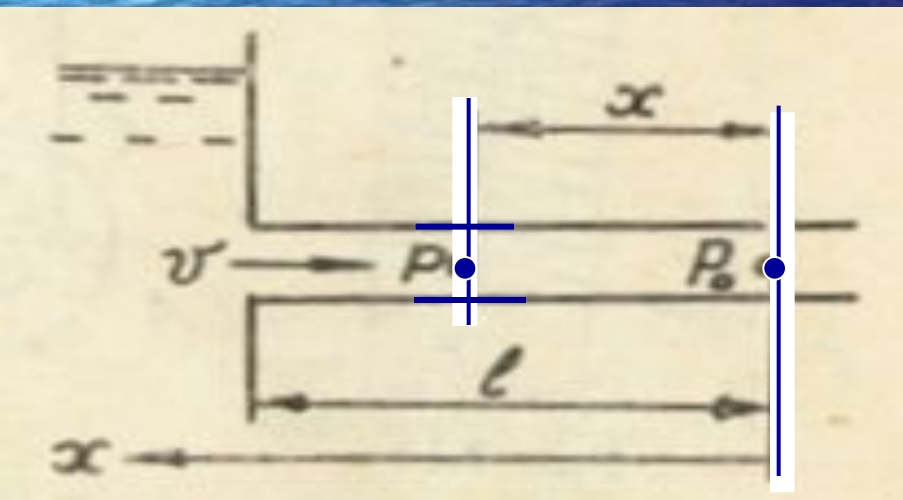


Рисунок 7.22 – Характер смены режимов

$$\lambda_{3M} = \lambda \left(1 + 3,54 d / D \right)$$

Гидравлический удар в трубах



Если внезапно остановить движущийся в трубе поток жидкости, то изменение количества движения вызовет возникновение избыточной силы давления жидкости на задвижку

Очевидно, что абсолютно несжимаемая жидкость вызвала бы бесконечное по величине давление при мгновенной остановке в недеформируемом трубопроводе. Однако в результате сжимаемости реальных жидкостей остановка жидкости в трубе даже при мгновенном закрытии заслонки происходит во времени, и волна давления распространяется в среде со скоростью, равной скорости звука c . Таким образом, остановка жидкости на участке длиной x произойдет за время $t = x/c$. При этом будем иметь $K = \rho S(l - x)v_0$

$$\left| \frac{dK}{dt} \right| = \frac{K_0 - K}{t} = \frac{\rho S x_0}{x/c} = \rho S c_0$$

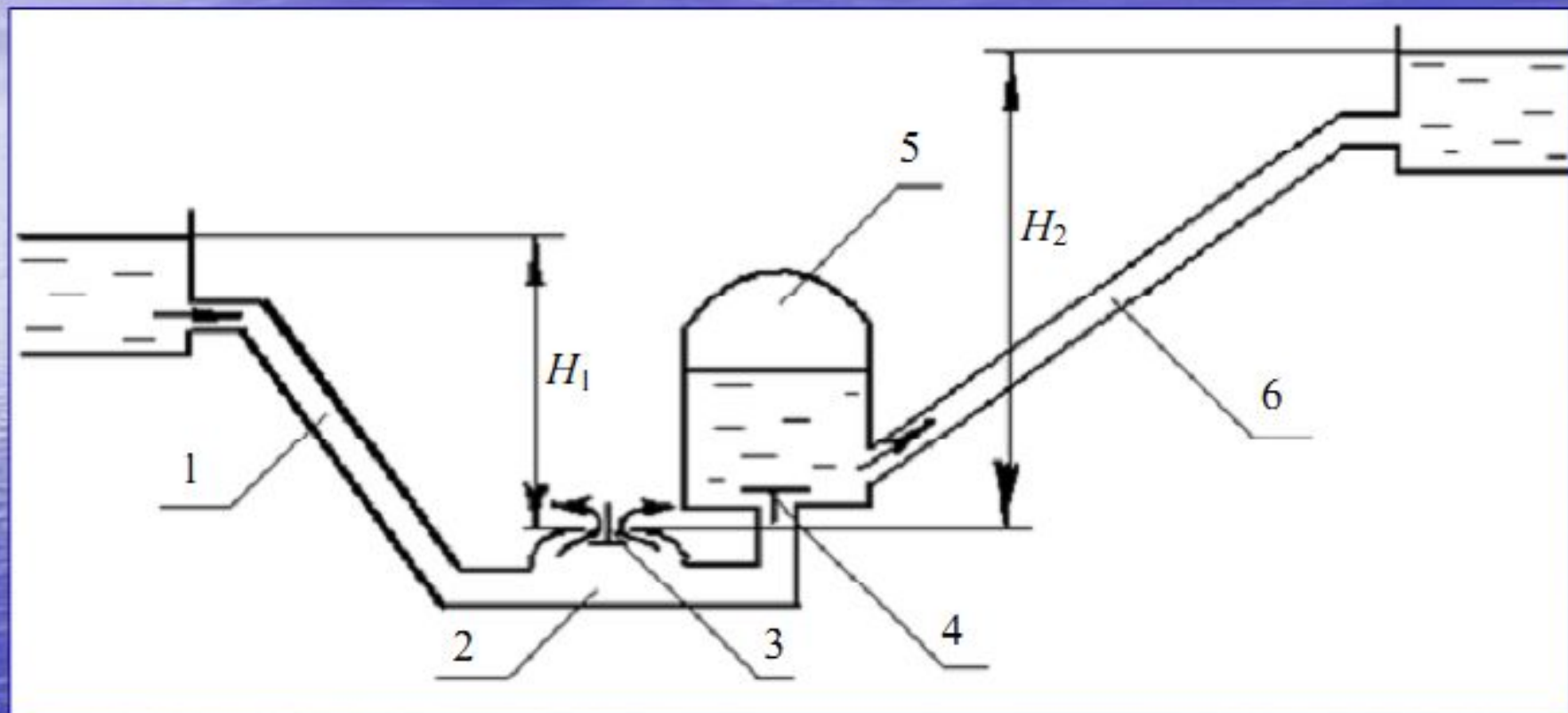
В результате изменения количества движения возникнет

$$R = (p_0 - p)S = \Delta p S \Rightarrow \Delta p = \rho c_0$$

Для воды $\Delta p = 10^3 \cdot 1,435 \cdot 10^3 \cdot 1 = 1,435 \cdot 10^6 = 14,4$ ати

Гидравлический таран

Гидравлический таран служит для подачи воды на небольшую высоту без использования насосов.



Таким образом, гидравлический таран затрачивает часть расхода на подъем воды по нагнетательному трубопроводу на высоту, которая может достигать **$10 H_1$** . Обычно теряется половина расхода.