

Устойчивость сжатых конструкций

Равновесие называют **устойчивым**, если при любом малом отклонении от положения равновесия тело возвращается в исходное положение по устранении причины, вызвавшей это отклонение (рис. а)



Равновесие называют **неустойчивым**,
если при любом малом отклонении от
положения равновесия тело не возвращается
в исходное положение, а все дальше
отклоняется от него (рис. б)



При безразличном равновесии тело, будучи отклонено, остается в равновесии и в новом положении (в)



Для задач механики абсолютно твердого тела характерно, что **вид равновесия не зависит от значений действующих на тело сил** (в рассматриваемом примере не зависит от веса шарика)

В сопротивлении материалов, т.е. в механике деформируемого тела, основным является установление зависимости вида равновесия от сил, действующих на элемент конструкции

Рассмотрим сравнительно длинный и тонкий прямолинейный стержень, нагруженный центрально приложенной сжимающей силой.

Если приложить к стержню поперечную нагрузку, т. е. слегка изогнуть его, то при малых значениях сжимающей силы после снятия поперечной нагрузки стержень вернется в прямолинейное состояние.

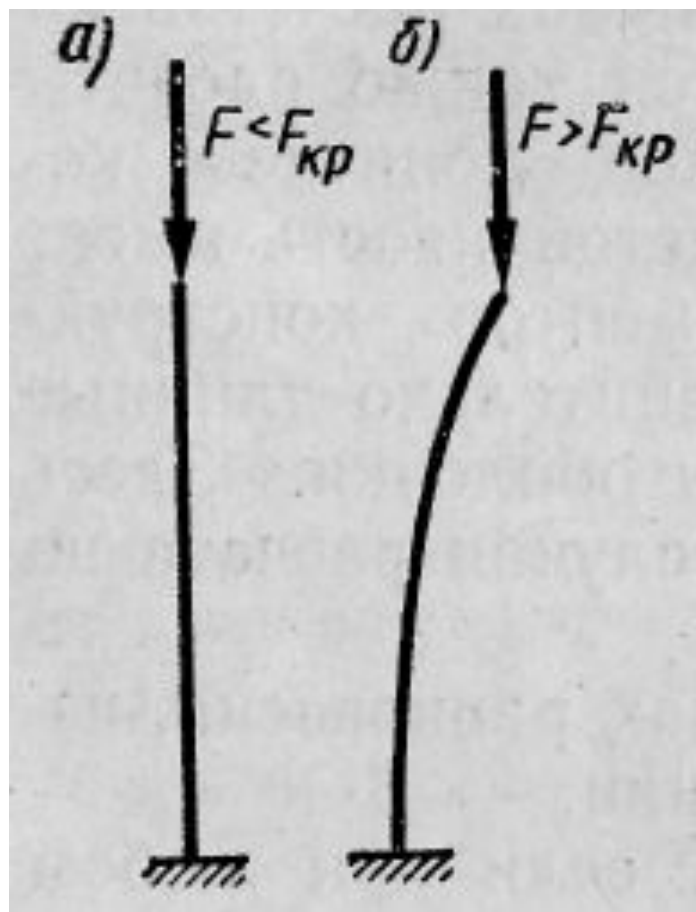
Это значит, что прямолинейная форма равновесия оси стержня устойчива.

При большем значении сжимающей силы слегка изогнутый поперечной нагрузкой стержень после ее устранения медленнее, как бы «неохотнее» возвращается в прямолинейное состояние.

Но все же прямолинейная форма равновесия еще устойчива.

Наконец, при некотором значении сжимающей силы прямолинейная форма равновесия оси стержня становится неустойчивой и возникает новая устойчивая форма равновесия - криволинейная. Происходит выпучивание стержня (рис. б).

Изгиб стержня, связанный с потерей устойчивости прямолинейной формы его равновесия, называют *продольным изгибом*.



Определение:
*то наибольшее значение
центрально
приложенной
сжимающей силы,
до которого
прямолинейная форма
равновесия стержня
устойчива,
называется
критическим*

Если при силе,
незначительно большей критической,
стержень не разрушается в буквальном
смысле слова,
то конструкция все же выходит из строя в
результате возникновения больших
перемещений.

Поэтому

***с точки зрения практических расчетов
критическая сила
должна рассматриваться как
разрушающая нагрузка***

*Расчет на устойчивость
должен обеспечить работу
элемента конструкции при
первоначальной форме его
упругого равновесия,
т.е. при нагрузках,
меньших критических*

Условие устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня может быть представлено так:

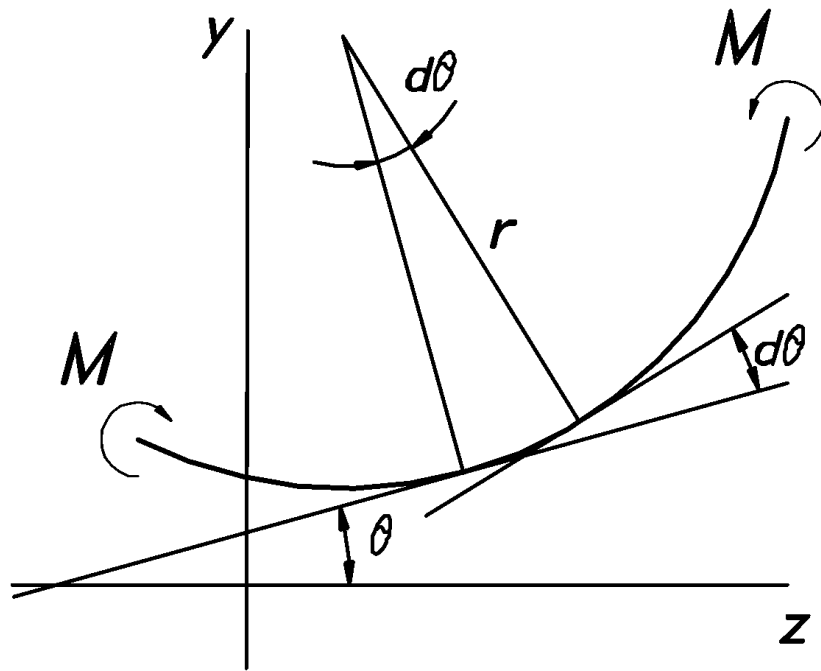
$$[F] = F_{кр} / [n_y]$$

где $[F]$ - допускаемое значение силы, сжимающей стержень;

$F_{кр}$ — критическое значение сжимающей силы для рассчитываемого стержня;

n_y — заданный (требуемый) коэффициент запаса устойчивости

Дифференциальное уравнение упругой линии балки



Форма упругой линии бруса определяется при помощи выражения

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ_x}$$

где r – радиус кривизны
 M – изгибающий момент
 E – модуль упругости

J_x – осевой момент инерции сечения

Учитывая, что

$$\frac{1}{r} = \frac{\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}} \approx \ddot{y}$$

получаем дифференциальные
уравнение упругой линии

$$\dot{y} = M / (EJ_x)$$

Формула Эйлера

- Рассмотрим вопрос о критической силе сжатого стержня, оба конца которого закреплены шарнирно.

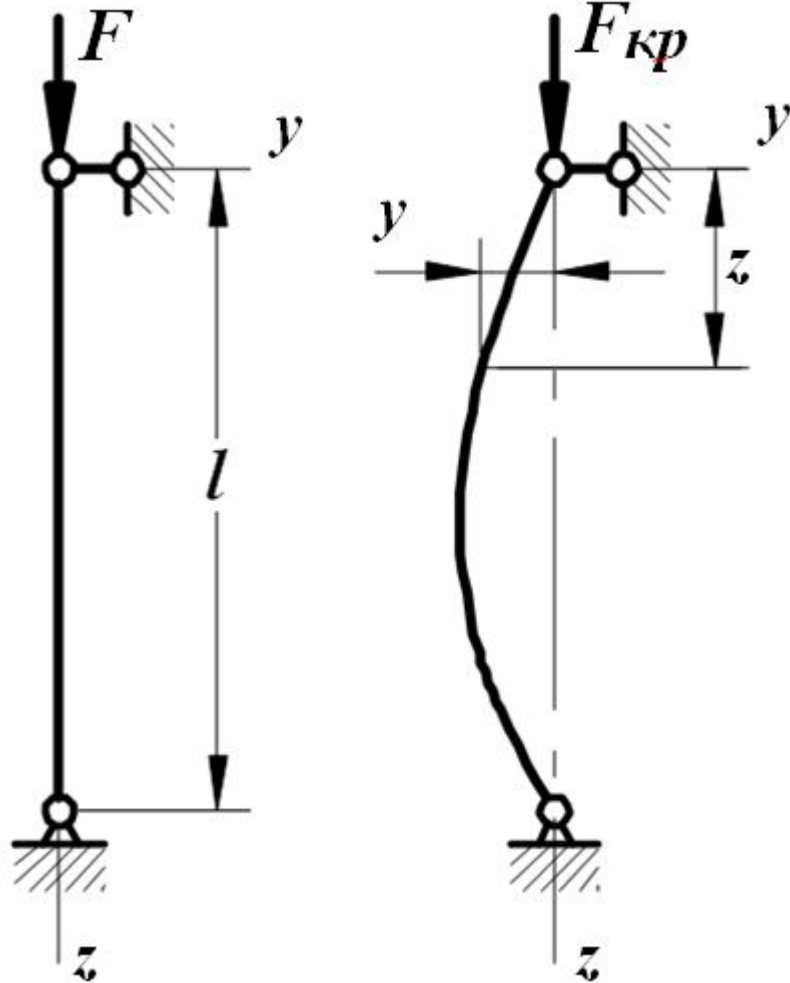
Пусть стержень находится в несколько изогнутом состоянии. Допустим, что потеря устойчивости происходит при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала стержня $\sigma_{пц}$

- При этом условии справедливо дифференциальное уравнение упругой линии

$$y'' = M / (EJ_x)$$

Формула Эйлера

$$\ddot{y} = -\frac{F \cdot y}{EJ_x}$$



В результате решения этого дифференциального уравнения и использования граничных условий, определяемых способами закрепления концов стержня, получается выражение для критической силы, называемое **формулой Эйлера**:

$$k^2 = F / (EJ_{\min})$$

$$\ddot{y} + k^2 y = 0$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$y = A \sin kz + B \cos kz$$

где A и B — постоянные интегрирования

Значения A и B определяются из граничных условий.

При $z=0; y=0$.

Тогда

$$y = A \sin kz$$

при $z = l; y = 0$

$$0 = A \sin kl$$

$$\sin kl = 0$$

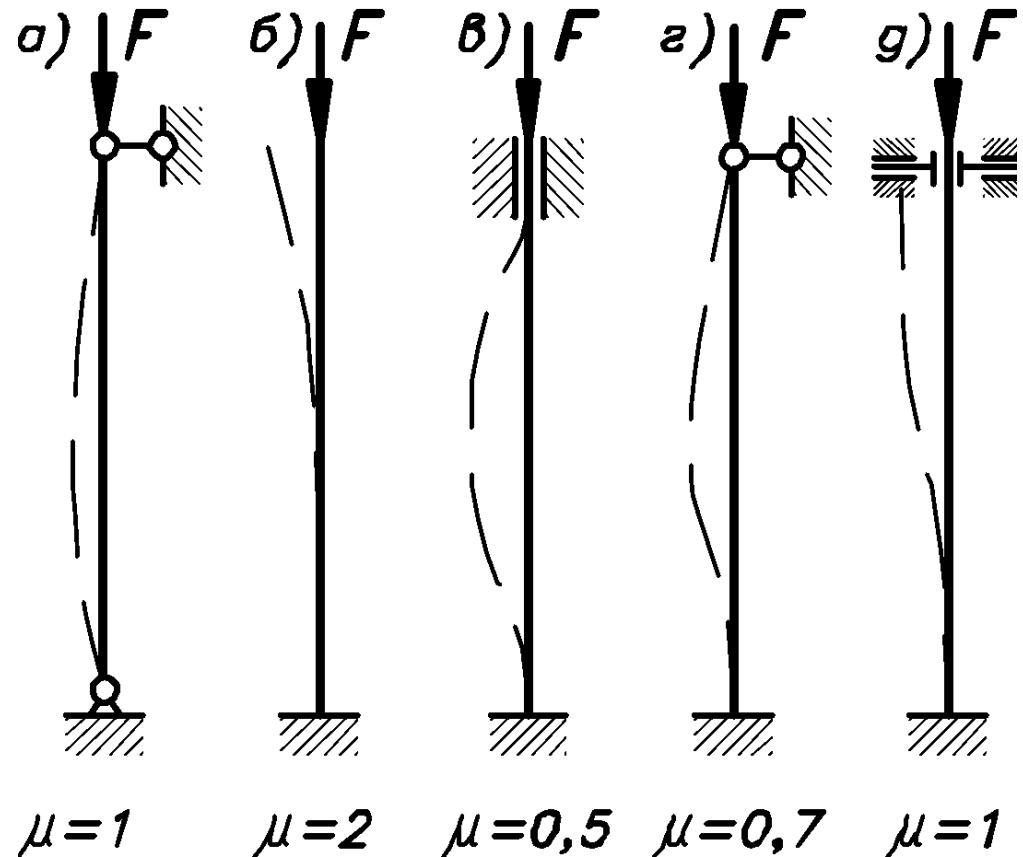
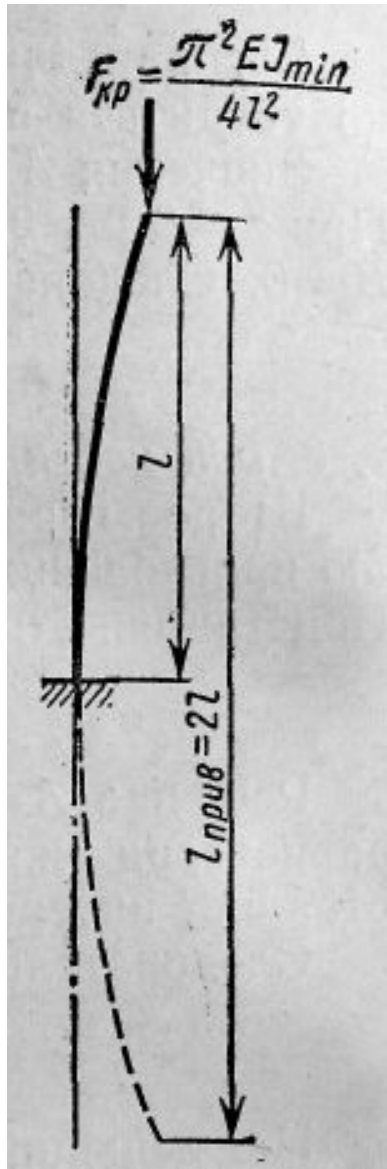
$$k_{кр} l = \pi \quad \text{или} \quad k_{кр}^2 = \pi^2 / l^2$$

$$\pi^2 / l^2 = F_{кр} / (EJ_{\min})$$

$$F_{кр} = \pi^2 EJ_{\min} / l^2$$

Пример шарнирного закрепления обоих концов стержня, когда его изогнутая ось при потере устойчивости представляет собой одну полуволну синусоиды, принято называть *основным случаем продольного изгиба*

Коэффициент приведения длины μ зависит от способов закрепления концов сжатого стержня



Приведенную длину стержня удобно выразить через фактическую длину и некоторый коэффициент μ , зависящий от способов

закрепления концов стержня:

$$l_{прив} = \mu l$$

$$F_{кр} = \pi^2 EJ_{\min} / l_{прив}^2$$

В общем случае формула Эйлера записывается в виде

$$F_{кр} = \pi^2 EJ_{\min} / (\mu l)^2$$

Критическое напряжение. Пределы применимости формулы Эйлера.

*Нормальное напряжение в поперечном сечении сжатого стержня, соответствующее критическому значению сжимающей силы, также называют **критическим***

$$\sigma_{кр} = F_{кр} / A$$

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E J_{\min} / [(\mu l)^2 A]$$

Геометрическую характеристику сечения

$$i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / A}$$

называют

***радиусом инерции сечения
относительно данной оси***

Таким образом,

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E i_{\min}^2 / (\mu l)^2$$

или

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / (\mu l / i_{\min})^2$$

Отношение приведенной длины стержня к минимальному радиусу инерции его поперечного сечения называют *гибкостью* стержня (или стойки).

Это весьма удобная безразмерная геометрическая характеристика сжатого стержня, показывающая его сопротивляемость потере устойчивости; она одновременно отражает и длину стержня и жесткость его поперечного сечения:

$$\lambda = \mu l / i_{\min}$$

Используя понятие гибкости λ стержня, получаем следующую окончательную формулу для критического напряжения:

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2$$

При выводе формулы Эйлера была использована зависимость между изгибающим моментом и кривизной оси стержня, полученная на основе закона Гука.

Отсюда следует, что, **формула Эйлера справедлива лишь в пределах применимости закона Гука, т. е. при условии, что критическое напряжение не превышает предела пропорциональности материала стержня:**

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$$

или

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{нц}$$

отсюда

$$\lambda \geq \pi \sqrt{E / \sigma_{нц}}$$

Величину, стоящую в правой части этого неравенства, обозначим

$\lambda_{пред}$

и назовем **предельной гибкостью**
(иногда говорят — граничная гибкость):

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{E / \sigma_{нц}}$$

В отличие от гибкости стержня, представляющей собой его геометрическую характеристику, предельная гибкость зависит только от физико-механических свойств материала стержня и не зависит от его размеров.

Предельная гибкость — величина постоянная для данного материала.

Пользуясь понятием предельной гибкости, удобно представить условие применимости формулы Эйлера в виде

$$\lambda \geq \lambda_{пред}$$

т.е. формула Эйлера применима лишь в тех случаях, когда ***гибкость рассчитываемого стержня***

больше или равна

предельной гибкости для материала, из которого он изготовлен

В качестве примера вычислим значение

$\lambda_{\text{пред}}$

для углеродистой стали 45,
имеющей модуль продольной упругости

$$E \approx 2,0 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

и предел пропорциональности

$$\sigma_{\text{пц}} = 270 \text{ МПа}$$

$$\lambda_{\text{пред}} = \pi \sqrt{E / \sigma_{\text{пц}}} = 3,14 \sqrt{2,0 \cdot 10^5 / 270} \approx 85.$$

В случае неприменимости формулы Эйлера критические напряжения определяются по эмпирическим формулам, составленным **Ф.С.Ясинским** на основе опытов, проведенных рядом исследователей. Для некоторых конструкционных материалов формула Ф.С.Ясинского (ее иногда называют формулой Тетмайера - Ясинского) имеет вид

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda,$$

т.е. зависимость критического напряжения от гибкости линейна

В зависимости от гибкости сжатые стержни условно делят на три категории:

1. **Стержни большой гибкости** ($\lambda \geq \lambda_{пред}$)

для которых расчет на устойчивость ведется по формуле Эйлера

и зависимость $\sigma_{кр}$ от λ — гиперболическая:

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2$$

так называемая
гипербола Эйлера

2. Стержни средней гибкости

$$(\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_{пред}),$$

рассчитываемые на устойчивость

по эмпирической формуле
Ф.С.Ясинского.

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda$$

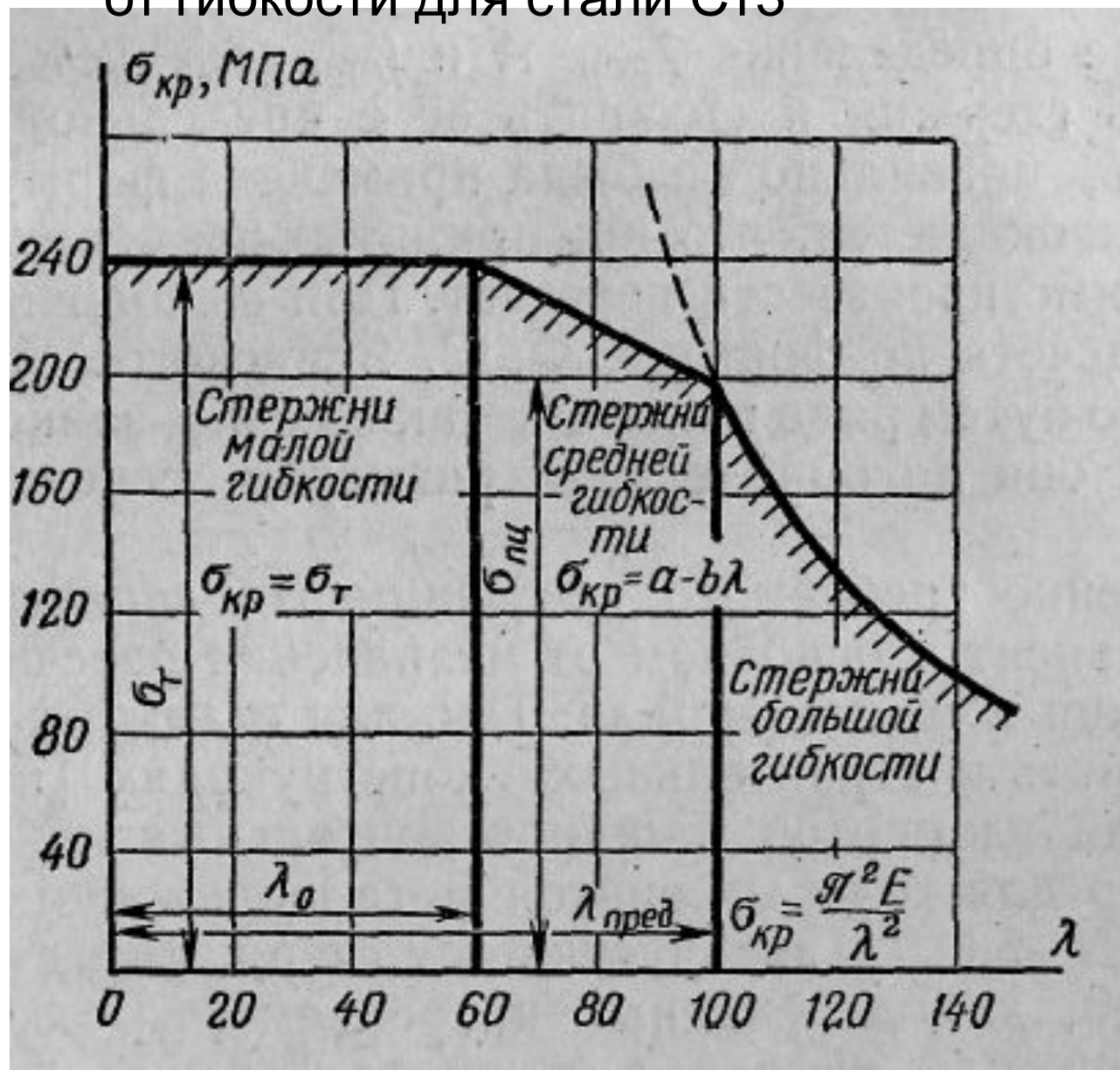
3. Стержни малой гибкости $(\lambda < \lambda_0)$,

рассчитываемые не на устойчивость,

а на прочность

Для них критическое напряжение
считается постоянным

Характер зависимости критического напряжения от гибкости для стали Ст3



Ясинский

Феликс Станиславович

1856 - 1899



- Окончил Петербургский институт инженеров путей сообщения. В 1890 г. был назначен начальником службы пути и ремонта зданий Николаевской (ныне Октябрьской) железной дороги. При составлении проектов усиления металлических мостов Ф.С. Ясинский столкнулся с проблемой устойчивости сжатых стержней и в период 1892 - 1896 гг. опубликовал в русских и иностранных технических журналах ряд статей и монографию по этой проблеме.

Расчет сжатых стержней на устойчивость
по коэффициентам продольного изгиба

***Расчет сжатых стержней на
устойчивость
можно по форме
привести к расчету на простое сжатие,
принимая в качестве допускаемого
некоторую часть от критического
напряжения:***

$$\sigma = F / A \leq [\sigma_y]$$

где $[\sigma_y] = \sigma_{кр} / [n_y]$

допускаемое напряжение при расчете на устойчивость.

Обычно $[\sigma_y]$ выражают через основное допускаемое напряжение на сжатие для данного материала:

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c]$$

Здесь $\varphi \leq 1,0$ — коэффициент понижения основного допускаемого напряжения на сжатие или коэффициент продольного изгиба;

$[\sigma_c]$ - основное допускаемое напряжение на сжатие, т. е. установлено без учета продольного изгиба:

$$[\sigma_{пред}] = \sigma_{пред} / [n]$$

Связь между коэффициентом φ , критическим напряжением $\sigma_{кр}$, предельным напряжением $\sigma_{пред}$ и коэффициентами запаса прочности $[n]$ и устойчивости $[n_y]$ устанавливается следующим образом:

$$[\sigma_y] = \varphi[\sigma_c] = \varphi\sigma_{пред} / [n] = \sigma_{кр} / [n_y]$$

или

$$\varphi = (\sigma_{кр} / \sigma_{пред}) ([n] / [n_y])$$

Значение коэффициента φ зависит от материала стержня и от его гибкости.

Для строительных конструкций значения этих коэффициентов включены в ***Строительные Нормы и Правила проектирования*** (СНиП).

При выполнении расчетов на устойчивость по коэффициентам φ расчетная зависимость имеет следующий вид:

$$\sigma = F / A \leq \varphi[\sigma_c]$$

Этот метод расчета универсален в том смысле, что он не связан с пределами применимости формулы Эйлера и может быть использован при всех значениях гибкости, для которых имеются табличные значения коэффициента φ .

Коэффициент запаса устойчивости в этом расчете в явном виде не фигурирует, он включен в величину φ .

Расчет сжатого стержня

по коэффициенту продольного изгиба φ
внешне совершенно подобен расчету
на простое сжатие, но фактически это
расчет на устойчивость,
гарантирующий работу стержня с
коэффициентом запаса устойчивости,
предусмотренным при составлении
таблиц φ

Для элементов машиностроительных конструкций в большинстве случаев приняты более высокие коэффициенты запаса и, кроме того, нет строгой регламентации величин допускаемых напряжений, поэтому не рекомендуется выполнять их расчет по коэффициентам φ .

Исключением являются элементы стальных конструкций подъемно-транспортных сооружений (ферм мостовых кранов и т. п.), для которых расчет по коэффициентам φ предписан соответствующими нормами