

**Окружность и круг в задачах
повышенного уровня сложности
по планиметрии в КИМ на ЕГЭ
по математике**

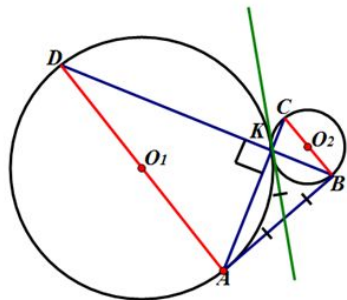
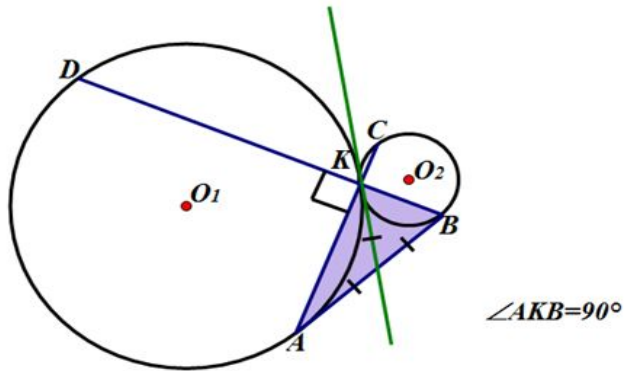
Задание 16

Демонстрационный вариант ЕГЭ 2018

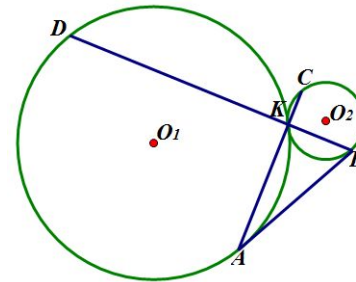
Две окружности касаются внешним образом в точке К. Прямая АВ касается первой окружности в точке А, а второй – в точке В. Прямая ВК пересекает первую окружность в точке D, прямая АК пересекает вторую окружность в точке С.

- а) Докажите, что прямые AD и ВС параллельны.
 б) Найдите площадь треугольника АВК, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение. а)



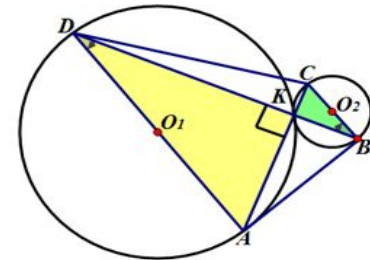
AD – диаметр $\Rightarrow AD \perp AB$,
 BC – диаметр $\Rightarrow BC \perp AB$, $\Rightarrow AD \parallel BC$.



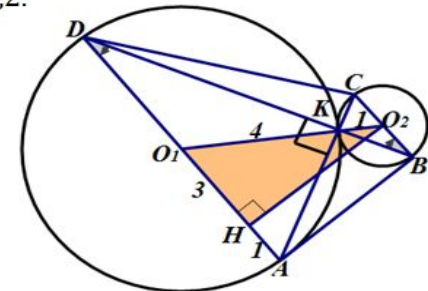
- б) AK – общая высота $\triangle AKD \sim \triangle BKC$
 $\triangle ABD$ и $\triangle AKB$ (по двум углам)

$$\frac{AD}{BC} = \frac{4}{1} \quad \frac{S_{ADK}}{S_{BKC}} = \left(\frac{AD}{BC}\right)^2 = 16. \quad \text{Пусть } S_{BKC} = S.$$

$$\begin{aligned} S_{ADK} &= 16S \\ S_{AKB} &= 4S \\ S_{ABCD} &= 25S \end{aligned}$$



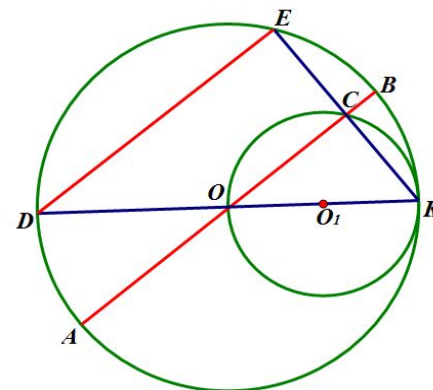
$$\begin{aligned} O_2H &= AB = 4. \\ S_{ABCD} &= \frac{AD + BC}{2} \cdot AB \\ S_{ABCD} &= 20 = 25S, \\ S_{ABK} &= 4S = 3,2. \end{aligned}$$



Ответ. 3,2

Задача 1

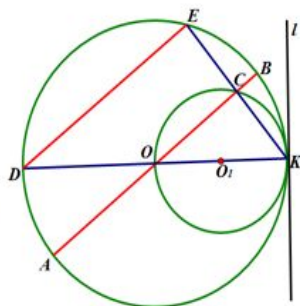
Две окружности касаются внутренним образом в точке К, причем меньшая окружность проходит через центр О большей окружности. Диаметр АВ большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке С, отличной от К. Лучи КО и КС вторично пересекают большую окружность в точках D и E соответственно. Точка В лежит на дуге EK большей окружности, не содержащей точку D. а) Докажите, что прямые DE и АВ параллельны. б) Известно, что $\sin \angle KOB = \frac{\sqrt{15}}{8}$. Прямые DB и EK пересекаются в точке L. Найдите отношение EL:LK.



а)

l - общая касательная, $OK \perp l$, $O_1K \perp l \Rightarrow$
 D, O, O_1, K лежат на одной прямой.

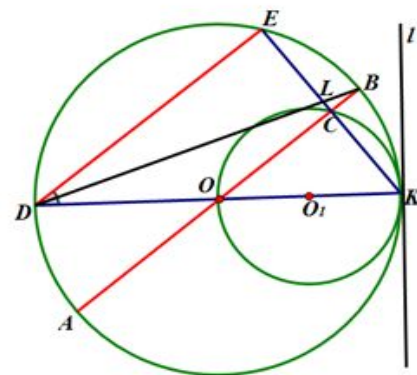
$\angle DEK = \angle OCK = 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow DE \parallel AB$.



б) $AB \perp EK \Rightarrow EC = CK \Rightarrow$
 $\Rightarrow \cup KB = \cup BE$

DB – биссектриса $\angle EDK$.

$$\begin{aligned} \frac{EL}{LK} &= \frac{DE}{DK} = \cos \angle EDK = \\ &= \cos \angle BOK \quad (AE \parallel AB) = \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 \angle BOK} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{15}{64}} = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$



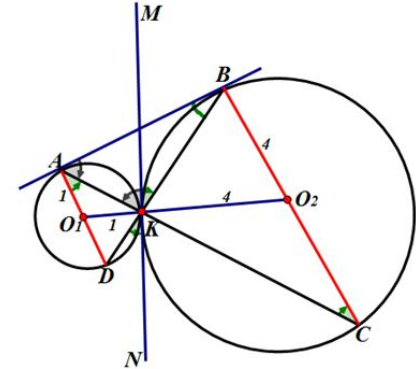
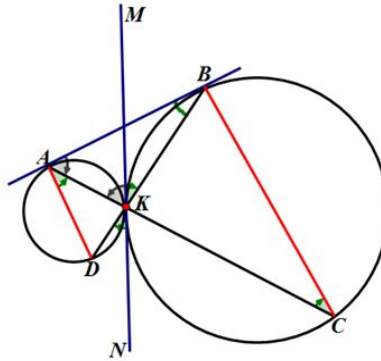
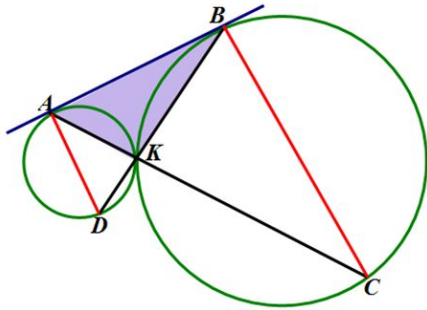
Ответ. $\frac{7}{8}$

Задача 2

Две окружности касаются внешним образом в точке К. Прямая АВ касается первой окружности в точке А, а второй – в точке В. Прямая ВК пересекает первую окружность в точке D, прямая АК пересекает вторую окружность в точке С.

а) Докажите, что прямые AD и ВС параллельны.

б) Найдите площадь треугольника АКВ, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.



$$\triangle SKO_1 \sim \triangle O_1TO_2$$

$$\frac{SK}{TO_2} = \frac{O_1K}{O_1O_2} \quad \frac{SK}{3} = \frac{1}{5}$$

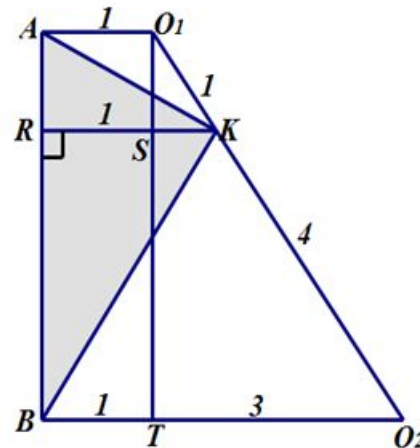
$$SK = \frac{3}{5} \quad RK = \frac{8}{5}$$

$$AB = O_1T = \sqrt{O_1O_2^2 - TO_2^2}$$

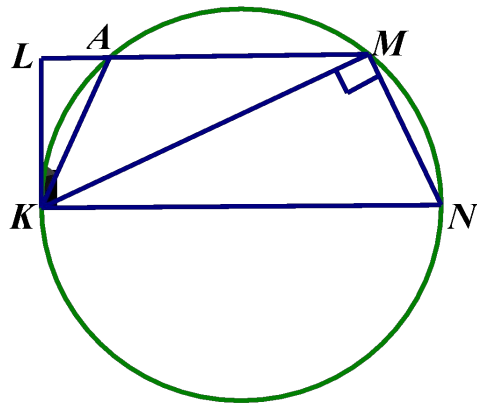
$$AB = 4$$

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} AB \cdot RK$$

$$S_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5} = 3,2$$



Задача 3 (задание 16 ЕГЭ 2017)

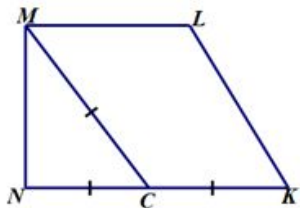


Рассмотрим два случая:

1. $\angle MNK = 90^\circ$.

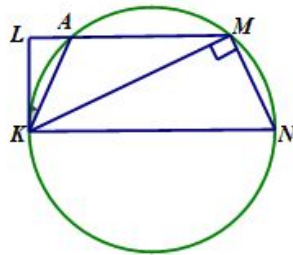
$MC = NC$,

что невозможно
(катет не равен
гипотенузе).



2. $\angle LKN = 90^\circ$.

KN - диаметр,
следовательно, KL -
касательная,
 AK - хорда.



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН
www.legionr.ru

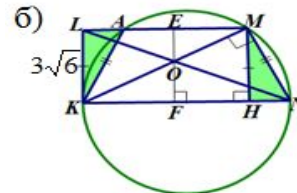
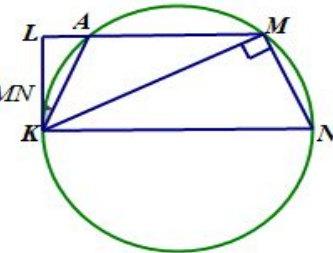
В прямоугольной трапеции $KLMN$ с основаниями KN и LM ($KN > LM$) окружность, построенная на большем основании как на диаметре, пересекает меньшее основание в точках A и M .

а) Докажите, что угол AKL равен углу MKN .

б) Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника KLO , если $KL = 3$, $LM = 6LA$.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } \angle AKL &= \frac{1}{2} \cup AK, \angle MKN = \frac{1}{2} \cup MN \\ \cup AK &= \cup MN \\ \angle AKL &= \angle MKN. \end{aligned}$$



$$\frac{AL}{LK} = \frac{LK}{LM} \quad \frac{AL}{3\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6AL}$$

$$6AL^2 = 6 \cdot 9, AL = 3, LM = 18,$$

$$\triangle AKL \sim \triangle MHN \Rightarrow AL = HN$$

$$KN = KH + HM =$$

$$\triangle ALK \sim \triangle LKM, LM = 6LA$$

$$= LM + LA = 18 + 3 = 21.$$

$$S_{LOK} = S_{LKM} - S_{LOM}$$

$$S_{LKM} = \frac{1}{2} LK \cdot LM = \frac{3\sqrt{6}}{2} \cdot 18 = 27\sqrt{6}$$

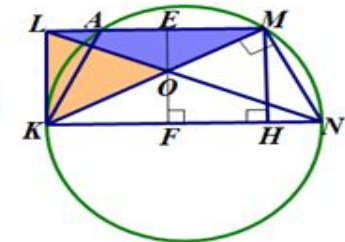
$$S_{LOM} = \frac{1}{2} LM \cdot OE = 9 \cdot OE$$

$$\triangle LOM \sim \triangle KON$$

$$\frac{LM}{NK} = \frac{OE}{OF} \quad \frac{LM}{NK} = \frac{OE}{EF - OE}$$

$$\frac{18}{21} = \frac{OE}{3\sqrt{6} - OE} \quad \frac{OE}{3\sqrt{6} - OE} = \frac{6}{7}$$

$$OE = \frac{18\sqrt{6}}{13}$$



$$S_{LOM} = 9 \cdot \frac{18\sqrt{6}}{13} = \frac{162\sqrt{6}}{13}$$

$$S_{LOK} = 27\sqrt{6} - \frac{9 \cdot 18\sqrt{6}}{13} =$$

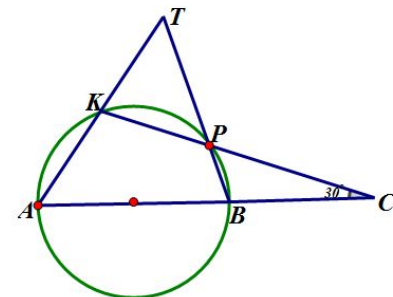
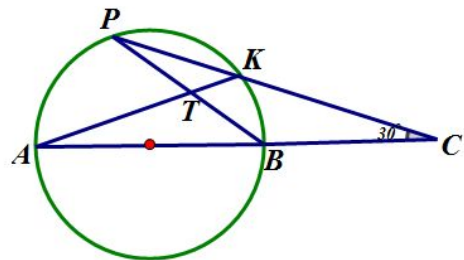
$$= 9\sqrt{6} \left(3 - \frac{18}{13} \right) =$$

$$= \frac{9 \cdot 21\sqrt{6}}{13} = \frac{189\sqrt{6}}{13}$$

Задача 4

Дана окружность. Продолжения диаметра АВ и хорды РК пересекаются под углом 30° в точке С. Известно, что $CB:AB=1:4$; АК пересекает ВР в точке Т.

а) Докажите, что $AP:AT=3:4$, б) Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках А, В, Р и К, если радиус окружности равен 4.



Решение. а)

1. Проведем $OE \perp PC$,

$$KE=EP, OE=\frac{3}{2}t,$$

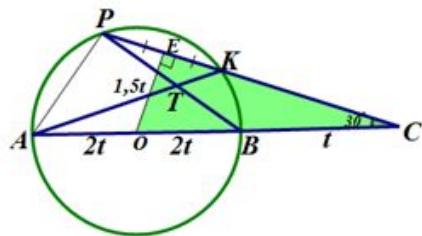
$$EC=OC \cdot \cos C = \frac{3\sqrt{3}}{2}t.$$

$$2. PE=\frac{\sqrt{7}}{2}t (\triangle POE); \quad PK = \sqrt{7}t.$$

3. $\triangle ATB \sim \triangle KTR$ ($\angle ATB = \angle KTR$ как вертикальные, $\angle PKT = \angle ABT$ как вписанные, опирающиеся

на одну дугу. $\frac{AB}{KP} = \frac{AT}{PT}$; $PT = \frac{AT\sqrt{7}}{4}$.

$$4. AP^2 = AT^2 - PT^2 = \frac{9AT^2}{16}, AP = \frac{3AT}{4}; \frac{AP}{AT} = \frac{3}{4}$$

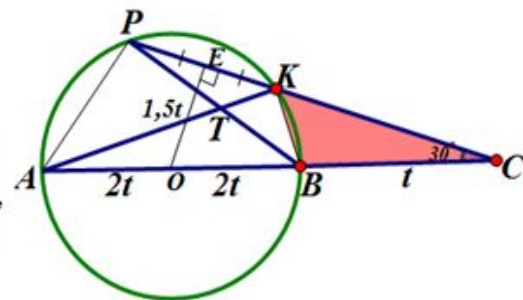


$$AO=4, t=2$$

$$AC=10, BC=2,$$

$$PC=3\sqrt{3} + \sqrt{7},$$

$$KC=3\sqrt{3} - \sqrt{7}$$



$$S_{APKB} = S_{APC} - S_{BKC}$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot PC \cdot \sin 30^\circ - \frac{1}{2} BC \cdot KC \cdot \sin 30^\circ =$$

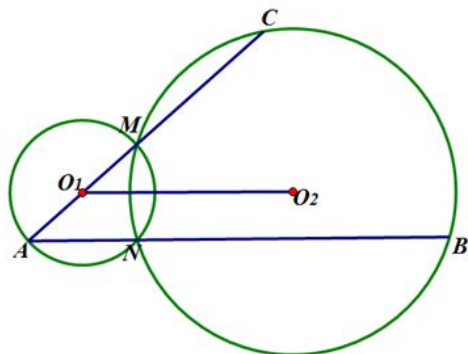
$$= 6\sqrt{3} + 3\sqrt{7}.$$

Задача 5

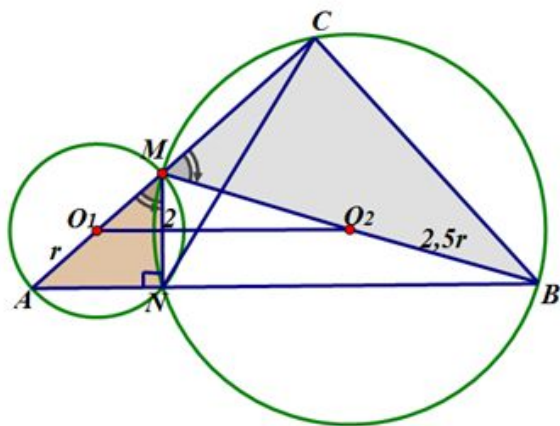
Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и N , причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой MN . Продолжение диаметра AM первой окружности и хорды AN этой же окружности пересекают вторую окружность в точках C и B соответственно.

а) Докажите, что треугольники ANC и O_1MO_2 подобны;

б) Найдите MC , если $\angle CMB = \angle NMA$, а радиус второй окружности в 2,5 раза больше радиуса первой и $MN=2$.



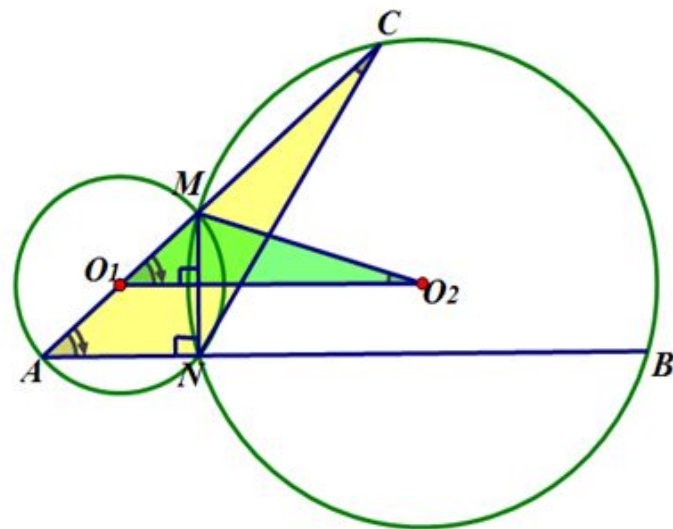
б)



$$\frac{MC}{MN} = \frac{MB}{AM} \quad \frac{MC}{2} = \frac{5r}{2r} \quad MC=5$$

Решение.

а)

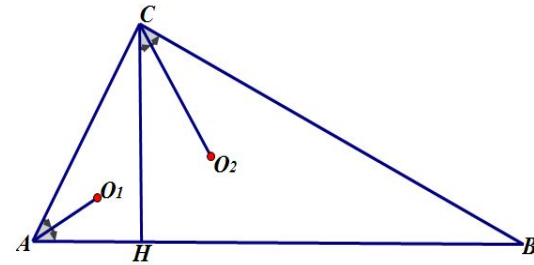


Задача 6

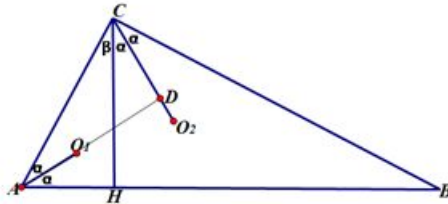
В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CH . В треугольники ACH и BCH вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, касающиеся отрезка CH в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что прямые AO_1 и CO_2 перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырехугольника MO_1NO_2 , если $AC=7$, $BC=24$.



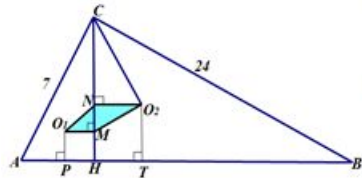
а)



б) O_1NO_2M – трапеция. $S_{O_1NO_2M} = \frac{O_1M + O_2N}{2} \cdot MN$

Пусть $O_1M = r_1$, $O_2N = r_2$

$S_{O_1NO_2M} = \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot (r_1 - r_2)$



$$AC \cdot BC = CH \cdot AB$$

$$AB = 25, CH = \frac{7 \cdot 24}{25}$$

$$AH = \frac{49}{25}, BH = \frac{576}{25}$$

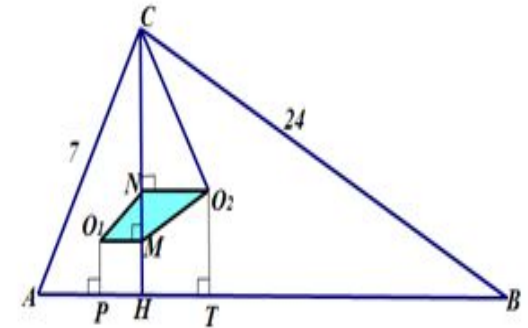
$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

$$r_1 = \frac{\frac{49}{25} + \frac{7 \cdot 24}{25} - 7}{2} = \frac{7}{2 \cdot 25} (7 + 24 - 25) = \frac{21}{25};$$

$$r_2 = \frac{\frac{576}{25} + \frac{7 \cdot 24}{25} - 24}{2} = \frac{24}{2 \cdot 25} (7 + 24 - 25) = \frac{72}{25};$$

$$S_{O_1NO_2M} = \frac{\frac{72}{25} + \frac{21}{25}}{2} \cdot \left(\frac{72}{25} - \frac{21}{25} \right) = \frac{51 \cdot 93}{2 \cdot 625} = \frac{4743}{1250}$$

Ответ. $\frac{4743}{1250}$

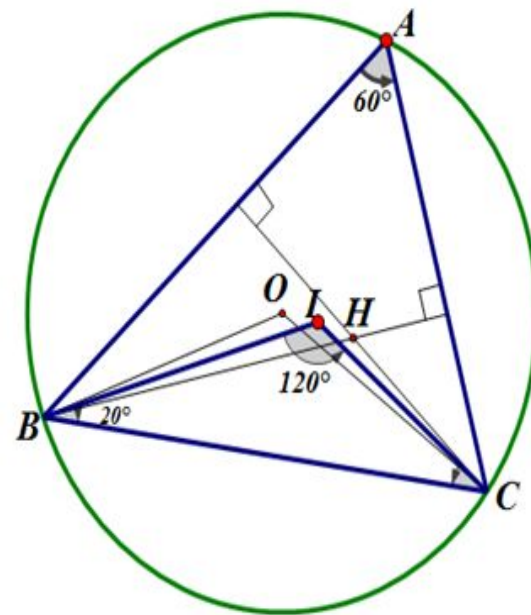
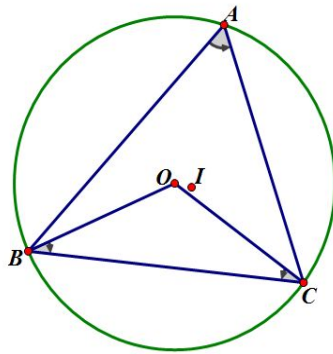


Задача 7

Точка O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , I – центр вписанной в него окружности, H – точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$, угол $ABC = 50^\circ$.

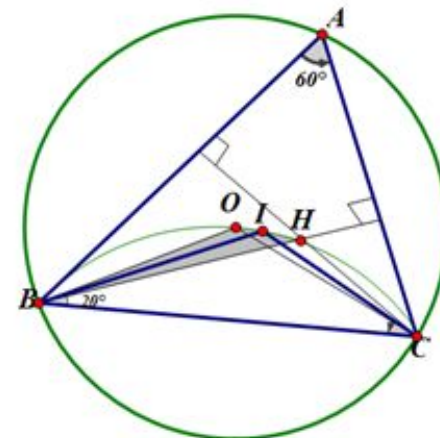
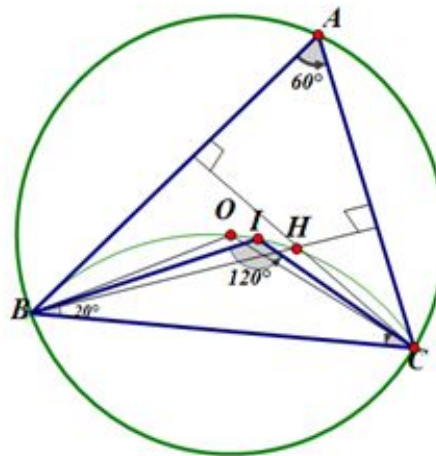
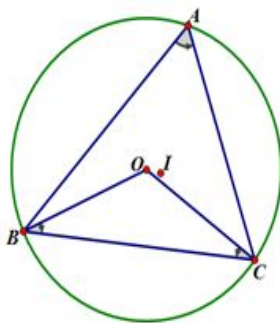
а) Докажите, что точка H лежит на окружности, описанной около треугольника BOC .

б) Найдите $\angle OIH$.



Решение.

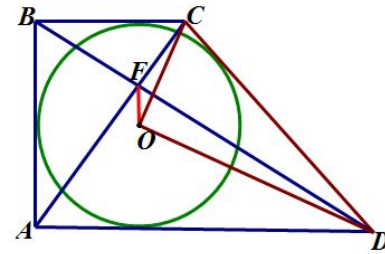
- $\angle BOC = 2\angle A$,
 $\angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) =$
 $= 180^\circ - \angle A \Rightarrow 2\angle A = 180^\circ - \angle A$
 $\angle A = 60^\circ, \angle BOC = 120^\circ$
 $\angle A = 60^\circ, \angle B = 50^\circ \Rightarrow \angle C = 70^\circ$.
- $\triangle BOC$: $\angle OBC = \angle OCB = 30^\circ \Rightarrow$
 $\angle ABO = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$
 $\angle ACO = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$



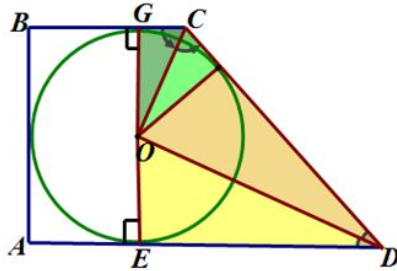
$$\angle OIH + \angle OBH = 180^\circ, \angle OBH = 10^\circ \Rightarrow \angle OIH = 170^\circ$$

Задача 8 В прямоугольную трапецию ABCD с большим основанием AD и прямыми углами A и B вписана окружность с центром в точке O.

- а) Докажите, что $CO^2 + OD^2 = CD^2$; б) Найдите расстояние от точки O до точки пересечения диагоналей трапеции, если высота трапеции равна 2 и $\angle ADC = 60^\circ$.



а)



$$FM = \frac{ab}{b+a} \quad FM = \frac{(1+\frac{1}{\sqrt{3}})(1+\sqrt{3})}{(1+\frac{1}{\sqrt{3}})+(1+\sqrt{3})} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}(2+\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3})} = 1$$

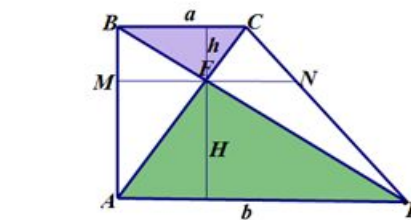
$$BC = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$AD = 1 + \sqrt{3}$$

$$FO = H - R \quad R = 1$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{2-H}{H} \quad H = \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$FO = H - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} - 1 = 2 - \sqrt{3}$$



$$\triangle AFD \sim \triangle BFC$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{FD}{BF} = \frac{AD}{BC} = \frac{b}{a} = \frac{H}{h}$$

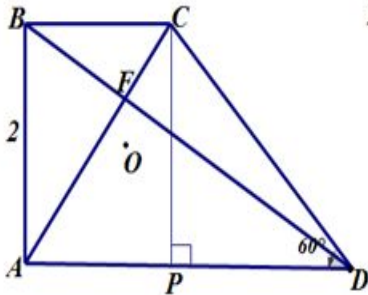
б)

$$AB + CD = BC + AD$$

$$2 + \frac{4}{\sqrt{3}} = 2BC + PD$$

$$2 + \frac{4}{\sqrt{3}} = 2BC + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$BC = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Рассмотрим $\triangle CDP$:

$$\frac{CP}{CD} = \cos 30^\circ \quad \frac{2}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

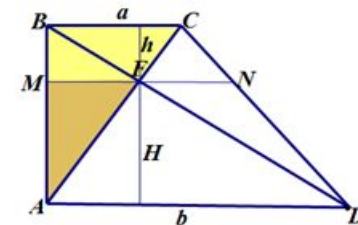
$$CD = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad PD = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$AD = AP + PD = BC + PD = 1 + \frac{3}{\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle AFM$$

$$\frac{BC}{FM} = \frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AM} = \frac{H+h}{H}$$

$$\frac{H+h}{H} = \frac{1+\frac{h}{H}}{1} = 1 + \frac{a}{b} = \frac{b+a}{b}$$



$$\frac{BC}{FM} = \frac{b+a}{b} \quad FM = \frac{ab}{b+a}$$

$$FM = \frac{ab}{b+a}$$

$$BC = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$AD = 1 + \sqrt{3}$$

$$FM = \frac{(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})(1 + \sqrt{3})}{(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}) + (1 + \sqrt{3})} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{\sqrt{3}(2 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3})} = 1$$

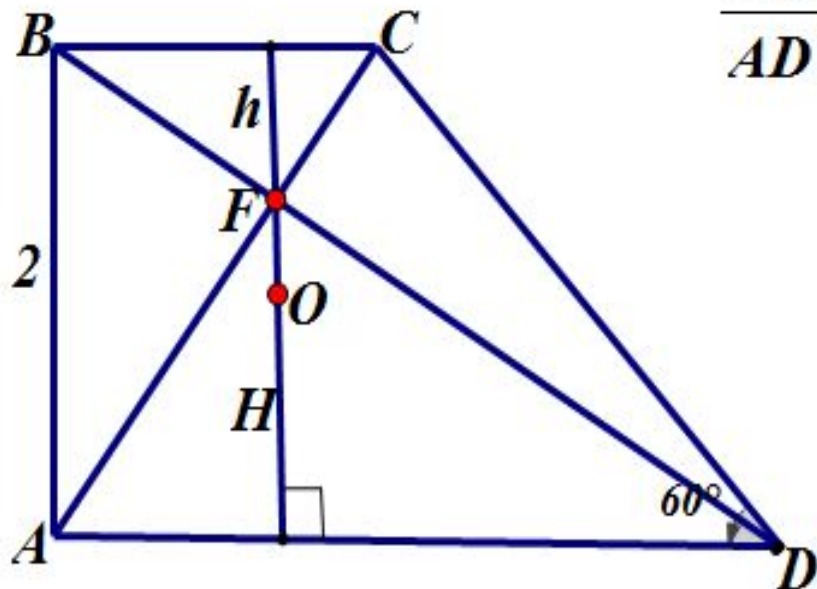
$$FO = H - R$$

$$R = 1$$

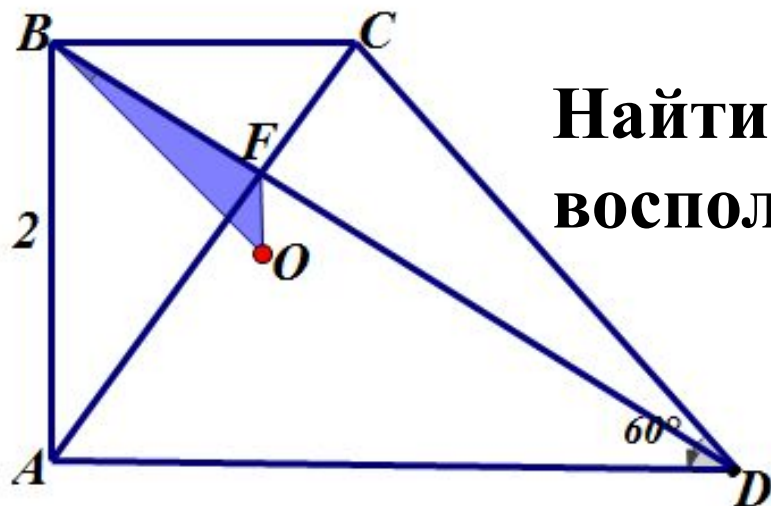
$$\frac{BC}{AD} = \frac{2-H}{H}$$

$$H = \frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

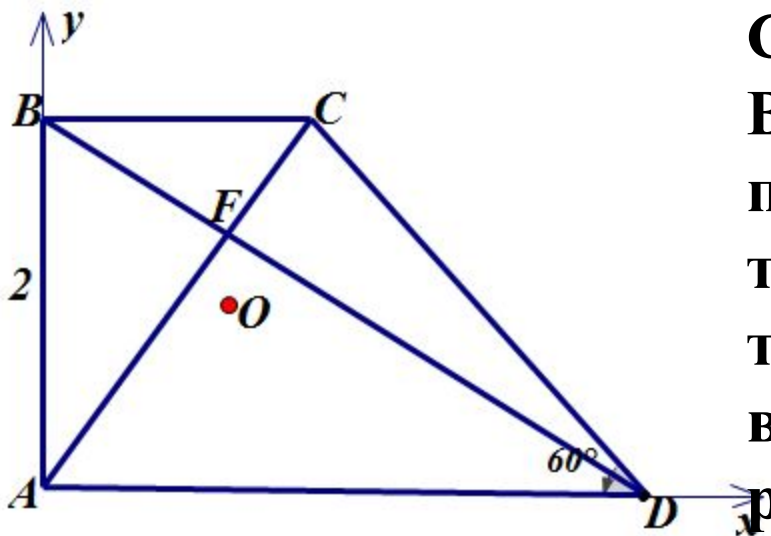
$$FO = H - 1 = \frac{2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} - 1 = 2 - \sqrt{3}$$



Идеи других способов

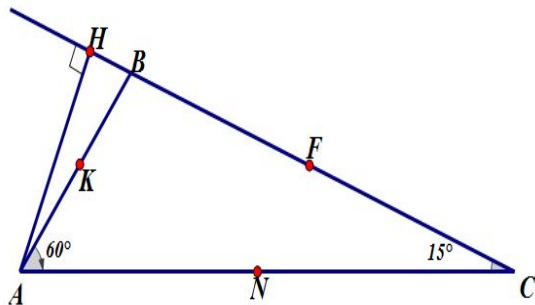


Найти BF , BO , $\cos \angle FBO$ и воспользоваться теоремой косинусов.

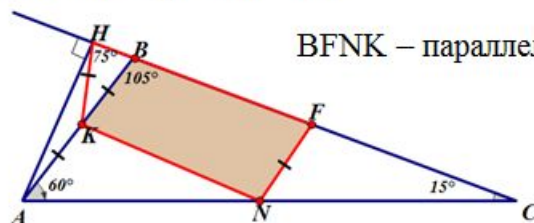


Составить уравнения прямых AC и BD , найти координаты их точки пересечения, убедиться в том, что точки O и F лежат на высоте трапеции, проходящей через центр вписанной окружности, а затем найти разность ординат точек F и O .

Задача 9 В треугольнике ABC точки K, F, N - середины сторон AC, AB и BC соответственно. AH - высота треугольника ABC, $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle ACB = 15^\circ$. а) Докажите, что точки K, F, N и H лежат на одной окружности, б) Найдите FH, если $BC = 4\sqrt{3}$



Решение. а) $\angle ABC = 105^\circ$



BFNK – параллелограмм.

$$\angle KHB = \angle KBH = 75^\circ,$$

HFKN – равнобедренная трапеция, $\Rightarrow$

$$\angle HKN = \angle KNF = 105^\circ, \angle KHF = \angle NFH = 75^\circ,$$

тогда $\angle KHF + \angle KNF = \angle HKN + \angle NFH = 180^\circ$,

это означает, что **точки**

K, F, N и H лежат на одной окружности.

$$\text{б) } \frac{AB}{\sin 15^\circ} = \frac{BC}{\sin 60^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin(45^\circ - 30^\circ)} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}}$$

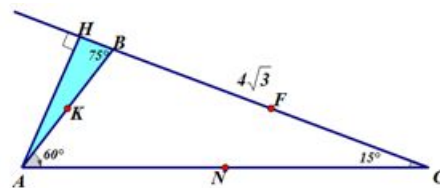
$$AB = 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$$BH = AB \cos 75^\circ \quad BH = 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \cos(45^\circ + 30^\circ)$$

$$BH = 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1) = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$FH = FB + BH = \frac{1}{2} BC + BH$$

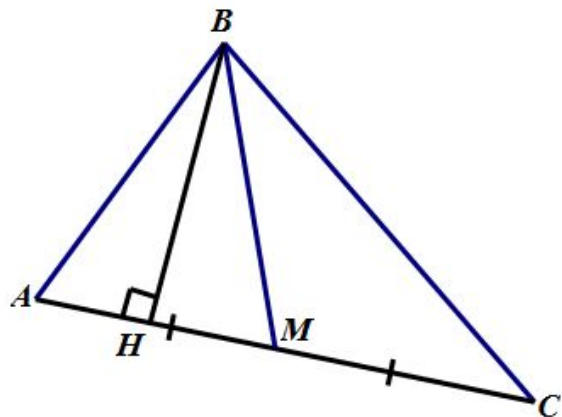
$$FH = 4$$



Ответ. 4

Задача 10

Доказать, что биссектриса угла разностороннего треугольника лежит между высотой и медианой, проведенными из той же вершины.

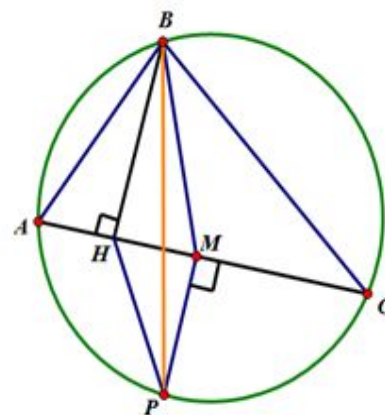


Решение.

Построим описанную окружность.

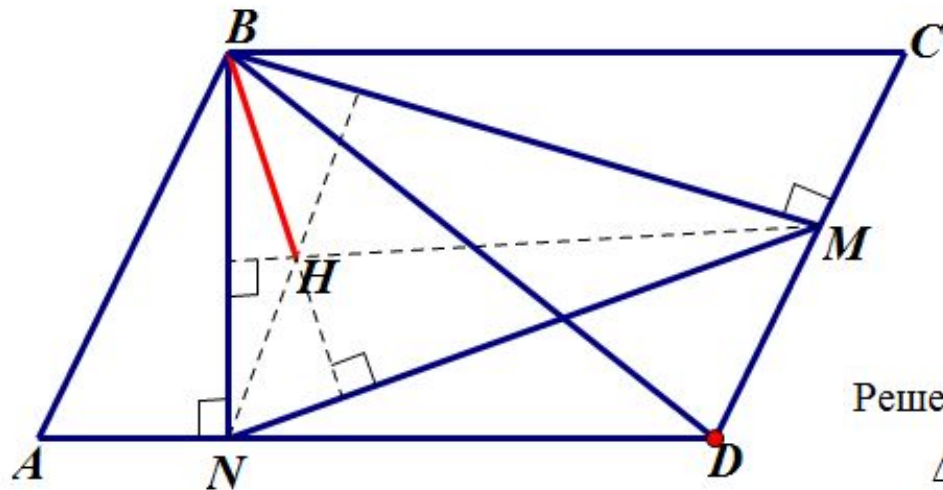
$AM = MC$, дуги AP и PC равны,

BP – диагональ трапеции $BHPM$.



Задача 11

В параллелограмме ABCD проведены высоты BN и BM. Известно, что $MN=15$, $BD=17$. Найти расстояние от точки B до точки H – точки пересечения высот треугольника BMN.



Решение.

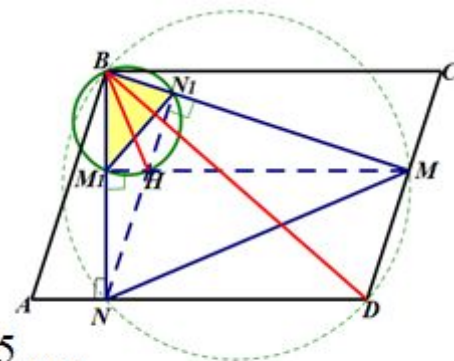
$$\triangle BMN \sim \triangle BM_1N_1$$

$$\frac{M_1N_1}{MN} = \frac{BH}{BD} = \cos B$$

$$\frac{M_1N_1}{15} = \frac{BH}{17} \Rightarrow \underline{M_1N_1 = \frac{15}{17}BH}$$

$$\underline{BH = \frac{M_1N_1}{\sin B}} \quad \sin B = \frac{15}{17} \quad \cos B = \frac{8}{17}$$

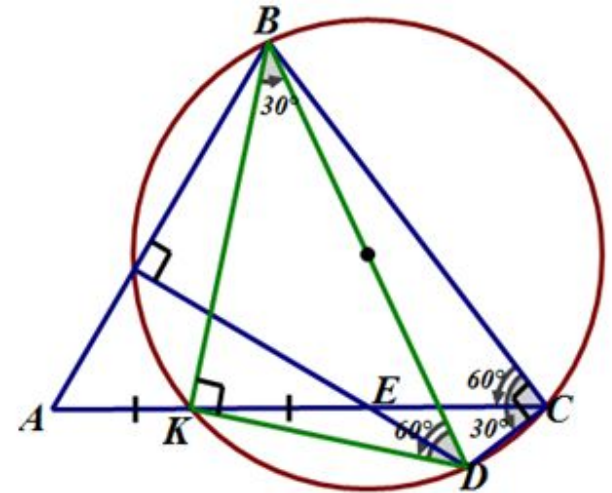
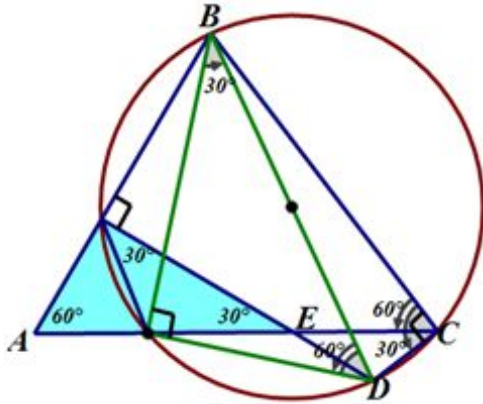
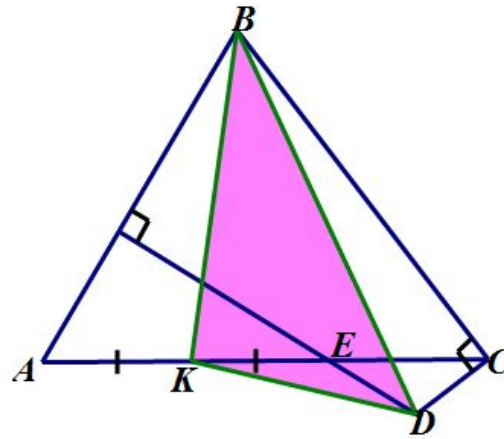
$$BH = 8$$



Ответ. 8

Задача 12.

Точка E лежит на стороне AC правильного треугольника ABC , K – середина отрезка AE . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно AB , и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно BC , пересекаются в точке D . Найдите углы треугольника BKD .



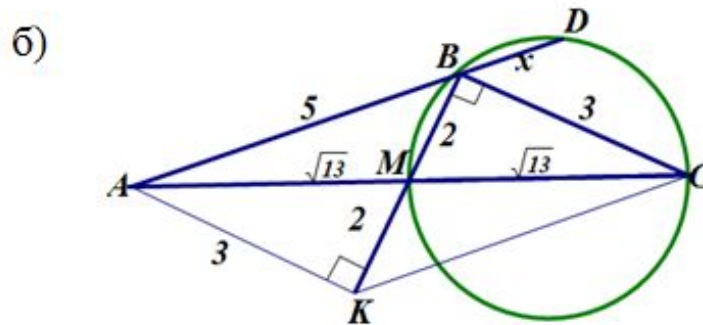
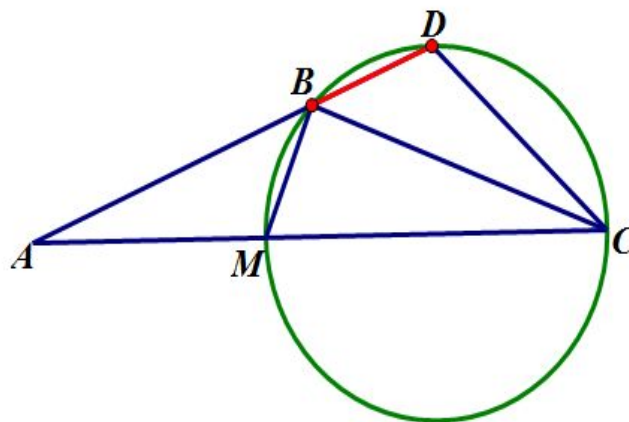
Задача 13

В треугольнике ABC точка M – середина AC.

а) Докажите, что длина отрезка BM больше полуразности, но меньше полусуммы длин сторон AB и BC.

б) Окружность проходит через точки B, C, M.

Найдите длину хорды этой окружности, лежащей на прямой AB, если известно, что $AB=5$, $BC=3$, $BM=2$.



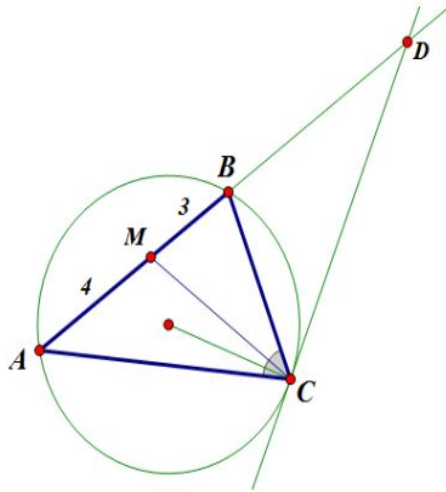
$$AB \cdot AD = AC \cdot AM$$

$$5 \cdot (5 + x) = 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}$$

$$x = 0,2$$

Задача.14

Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM=4$ и $MB=3$.
Касательная к описанной окружности $\triangle ABC$, проходящая через точку C , пересекает прямую AB в точке D . Найдите CD .



Решение.

$$\triangle ACD \sim \triangle BCD: \frac{BC}{AC} = \frac{x}{y}$$

По свойству биссектрисы
треугольника $\frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \quad x = \frac{3}{4}y$$

По свойству касательной

$$y^2 = \left(\frac{3}{4}y + 7\right) \cdot \frac{3}{4}y$$

$$y = \frac{9}{16}y + \frac{21}{4} \quad \frac{7}{16}y = \frac{21}{4} \quad \frac{y}{4} = 3$$

$$y = 12$$

Ответ. 12

