Лекция № 7

МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Волна – процесс распространения возмущений некоторой физической величины в пространстве.

Механическая волна – процесс распространения возмущений в среде.

Волновой процесс – сложная модель движения частиц среды, которые не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице передается лишь состояние колебательного движения и его энергия и импульс.

Упругость – свойство протяженной среды восстанавливать свою форму и объём (твёрдые среды) после прекращения действия внешних сил или других воздействий, вызывающих её деформирование. Среда, обладающая такими свойствами – **упругая среда**.

Волновая поверхность – геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

Волновое поле – область среды, приведенная в возмущенное состояние распространяющейся волной.

Волновой фронт – *геометрическое место точек, до которых к данному моменту времени дошло возмущение* (или *граница, отделяющая волновое поле от невозмущенной области*). Его форма определяет вид волны:

- **плоская**,
- **цилиндрическая**,
- **сферическая** и т.д.

Виды механических волн

По своей мерности волны подразделяют на **одномерные волны** (волны в стержнях, струнах и т.п.); **поверхностные волны**, возникающие на границах раздела сред (волны на поверхности водоема) и **пространственные волны**, распространяющиеся в любой неограниченной среде.

По направлению возмущения различают **продольные** и **поперечные** волны.

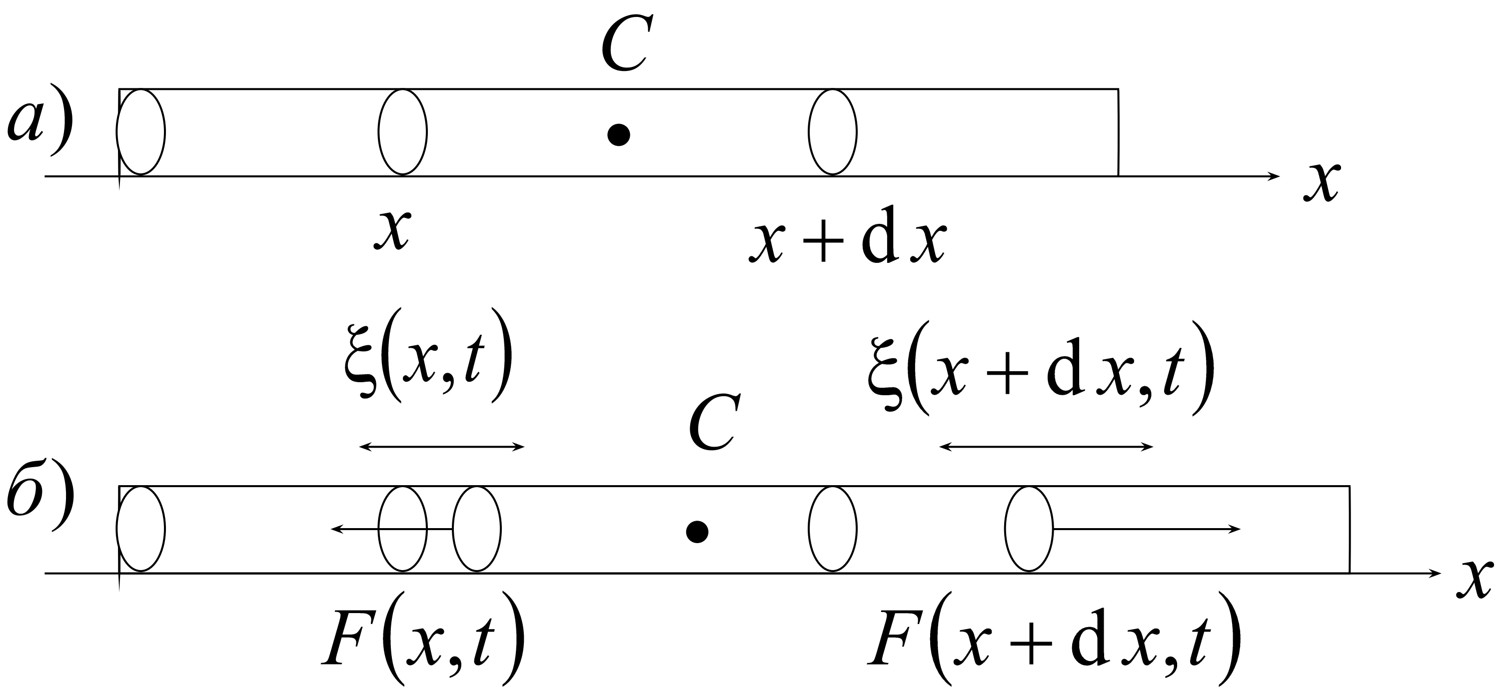
В **продольных волнах** возмущение направлено по направлению распространения волны (в жидких, твердых, газообразных средах). В **поперечных волнах** возмущение направлено перпендикулярно направлению распространения волны. К поперечным можно отнести поверхностные волны.

Упругие волны – процесс распространения механических возмущений в упругой среде (частный случай мех. волн).

Основное св-во всех **упругих волн – перенос энергии без переноса массы**.

Упругие волны в стержнях. Волновое уравнение

Вдоль упругого стержня распространяется упругая волна. $\xi(x, t)$ – смещение частицы стержня в момент времени t



Основное ур-е динамики для элемента dx:

$$\rho S\,\mathrm{d}x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=F(x+\mathrm{d}x,t)-F(x,t) \qquad (7.1)$$

Здесь ρ – плотность материала, S – площадь поперечного сечения стержня,

$\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ – ускорение элемента.

Представим

$$F(x+\mathrm{d}x,t)-F(x,t)\approx\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x \qquad (7.2)$$

Напряжение в стержне

$$\sigma(x,t) = \frac{F(x,t)}{S} \tag{7.3}$$

Подставим (7.2) и (7.3) в (7.1):

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \tag{7.4}$$

Относительное удлинение элемента определяет величину деформации

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{7.5}$$

С учетом (7.5)

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,\varepsilon}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \qquad (7.6)$$

Подставив (7.6) в (7.4), получим **волновое уравнение**

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\upsilon^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \qquad (7.7)$$

В (7.7) **скорость упругих волн** в стержне

$$\upsilon=\sqrt{\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\,\sigma}{\mathrm{d}\,\varepsilon}} \qquad (7.8)$$

В случае линейно упругого материала стержня, подчиняющегося закону Гука $\sigma = E\varepsilon$, *скорость продольных упругих волн в линейно-упругой среде*

$$\upsilon = \sqrt{E/\rho} \qquad (7.9)$$

Волновое уравнение, описывающее распространение возмущения в неограниченной среде

$$\Delta\xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \qquad (7.10)$$

где $\xi(x, y, z)$ – смещение частиц среды, Δ – оператор Лапласа.

В прямоугольной декартовой системе координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Скорость распространения поперечных упругих волн в неограниченной изотропной среде

$$\upsilon = \sqrt{G/\rho}$$

где G – модуль сдвига среды, ρ – плотность среды.

Плоская гармоническая волна, длина волны, фазовая скорость

Если на торце полубесконечного стержня действует источник гармонических колебаний $\xi = A\cos\omega t$, то по стержню будет распространяться **гармоническая волна**: *прямая волна*

$$\xi = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = A\cos\frac{\omega}{\upsilon}\left(\upsilon t - x\right) \quad (7.11)$$

и обратная волна

$$\xi' = A\cos\omega\left(t + \frac{x}{\upsilon}\right) = A\cos\frac{\omega}{\upsilon}\left(\upsilon t + x\right) \quad (7.12)$$

Фазы волн $\Phi = \omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$ и $\Phi' = \omega\left(t + \frac{x}{\upsilon}\right)$

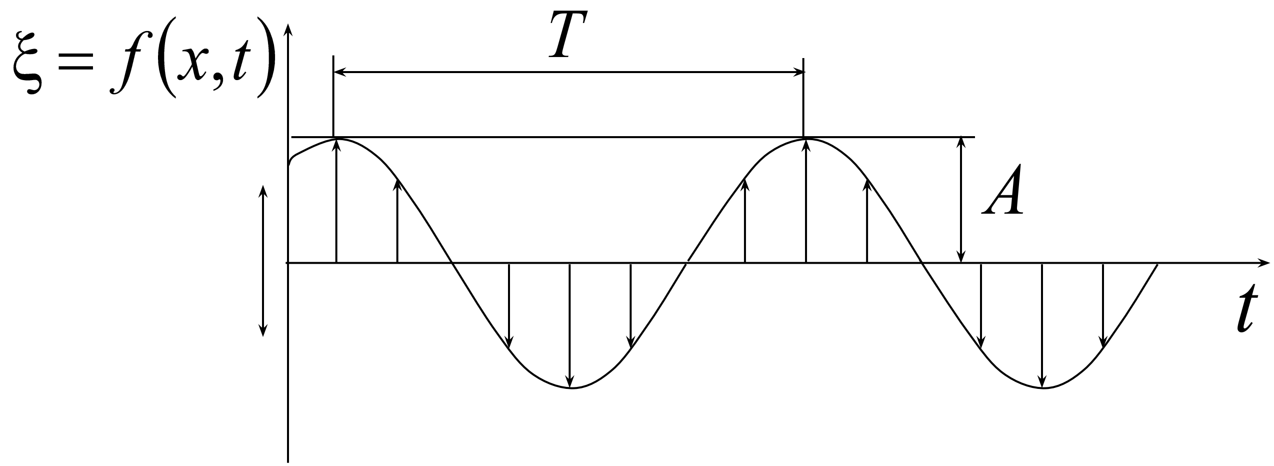
Гармонические волны *создают такое волновое движение в данной точке, которое можно рассматривать как гармонические колебания частиц среды.*

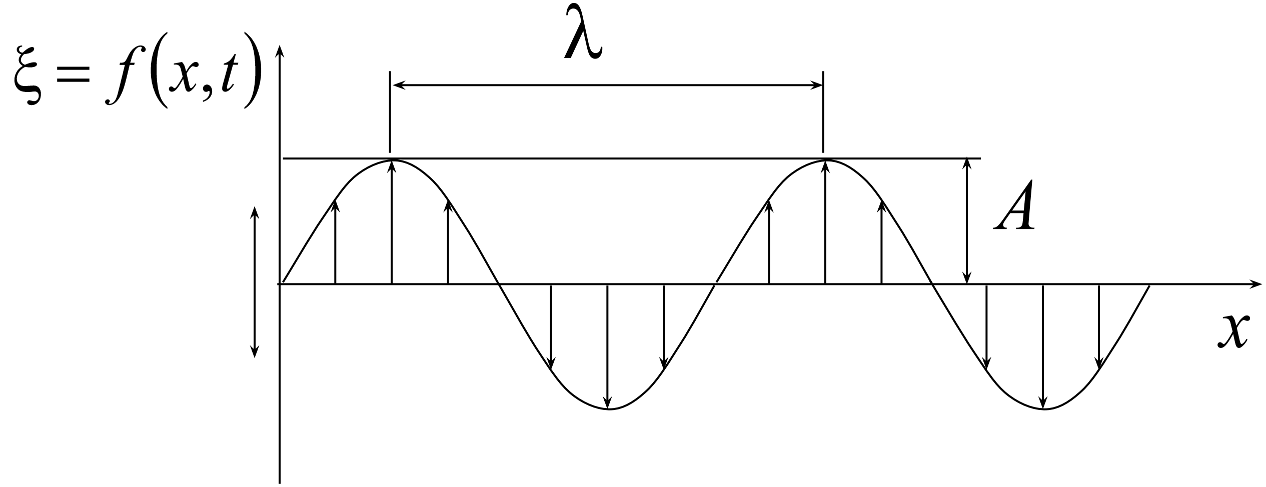
Длина волны – *расстояние между двумя ближайшими точками среды, колеблющимися в одинаковой фазе*

$$\lambda = \frac{\upsilon}{\nu} = \upsilon T, \qquad (7.13)$$

где $\nu = \omega/(2\pi)$ – частота колебаний, $T=1/\nu$ – период колебаний.

Монохроматическая волна – гармоническая волна, распространяющаяся с постоянной амплитудой A и частотой ω





Решение ур-я (7.7) – ур-е **плоской монохроматической волны**, распространяющейся вдоль оси x

$$\xi(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \varphi\right], \qquad (7.14)$$

где A = const, ω = const, φ – начальная фаза. Далее считаем φ=0. Уравнение прямой волны

$$\xi(x,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{\upsilon}x\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi\nu}{\upsilon}x\right)$$

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - \mathrm{k}\,x)\ ,$$

где $\mathrm{k} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – **волновое число**

Тогда **фаза волны**

$$\Phi = \omega t - \mathrm{k}\, x \tag{7.15}$$

Откуда

$$x = \frac{1}{\mathrm{k}}\left(\omega t - \Phi\right)$$

Фазовая скорость – скорость распространения фазы

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\omega}{\mathrm{k}} = 2\pi\nu\frac{\lambda}{2\pi} = \lambda\nu = \upsilon \tag{7.16}$$

Сферические волны

Самостоятельно

Продольная волна является сферической, если

$$\xi(r,t)=\frac{1}{r}f_1(\upsilon t-r)+\frac{1}{r}f_2(\upsilon t+r) \quad (7.17)$$

где f_1 и f_2 относятся к расходящимся и сходящимся сферическим волнам соответственно. Если в центре волны расположен источник гармонических колебаний $\xi = A\cos\omega t$, то *уравнение расходящейся гармонической волны*:

$$\xi(r,t)=\frac{A}{r}\cos(\omega t-\mathrm{k}\,r)$$

Объемная плотность энергии волны

Плоская волна распространяется в упругой среде, плотность которой ρ

$$\xi = A\cos(\omega t - \mathrm{k}\,x) \qquad (7.18)$$

Скорость

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -A\omega\sin(\omega t - \mathrm{k}\,x) \qquad (7.19)$$

и деформация

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = A\mathrm{k}\sin(\omega t - \mathrm{k}\,x) \qquad (7.20)$$

всех частиц в пределах выделенного объема ΔV одинаковы.

Кинетическая ΔE_k и потенциальная ΔE_p энергии частиц объема ΔV:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\rho u^2 \Delta V \tag{7.21}$$

$$\Delta E_p = \frac{E\varepsilon^2}{2}\Delta V = \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 \varepsilon^2 \Delta V \tag{7.22}$$

где $\upsilon = \sqrt{E/\rho}$

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \frac{1}{2}\rho\left[u^2 + \upsilon^2\varepsilon^2\right]\Delta V \tag{7.23}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right]\Delta V$$

или с учетом (7.19), (7.20) и (7.16) выражение (7.23) примет вид

$$\Delta E = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)\Delta V \qquad (7.24)$$

Объемная плотность энергии

$$w = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} \qquad (7.25)$$

Согласно (7.24) и (7.25) **объемная плотность энергии** упругой волны

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) \qquad (7.26)$$

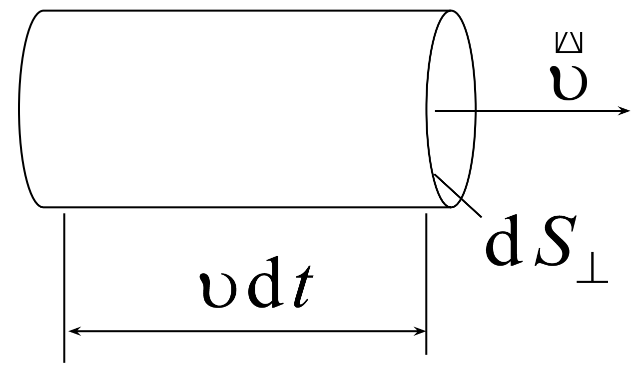
Среднее значение плотности энергии за период

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 \qquad (7.27)$$

Выражение (7.27) показывает, что *волна переносит энергию*; все частицы среды получают энергию в результате распространения волны.

Вектор Умова – вектор плотности потока энергии

Плотность потока энергии – *поток энергии через единичную площадку* $\mathrm{d}S_{\perp}$, *перпендикулярную к направлению переноса энергии*



$$j = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}S_{\perp}\,\mathrm{d}t}, \qquad [j] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\,\text{с}}$$

Бегущая волна переносит с собой энергию. За время $\mathrm{d}t$ волна распространится на расстояние $\upsilon\mathrm{d}t$. За $\mathrm{d}t$ через малую площадку $\mathrm{d}S_{\perp}$, перпендикулярную скорости волны пройдут только те возмущения, которые находятся в объеме $\mathrm{d}V = \upsilon \mathrm{d}t \mathrm{d}S_{\perp}$, перенеся с собой заключенную в нём энергию:

$$\mathrm{d}E = w\mathrm{d}V = w\mathrm{d}S_{\perp}\upsilon\mathrm{d}t = j\mathrm{d}S_{\perp}\mathrm{d}t,$$

где $j = w\upsilon$

Для определения направления плотности потока энергии вводят **вектор Умова**

$$\vec{j} = w\vec{\upsilon} \qquad (7.28)$$

$\vec{\upsilon}$ – вектор скорости, нормальной к волновой поверхности в данном месте.

Поток энергии сквозь поверхность S равен потоку вектора $\vec{j}$ сквозь эту поверхность.

Поток энергии Ф через произвольную поверхность S:

$$\Phi = \int_S \vec{j}\, \mathrm{d}\vec{S} = \int_S j_n \, \mathrm{d}S$$

где j_n – проекция вектора Умова на нормаль к поверхности.

Среднее во времени значение плотности потока энергии называется **интенсивностью волны**

$$I = \langle j \rangle = \langle w \rangle \upsilon$$

Единица интенсивности в СИ – ватт на квадратный метр (Вт/м^2)

Когерентные волны.
Интерференция волн. Стоячая волна

Когерентные волны – *монохроматические волны одинаковой частоты. У таких волн разность фаз* $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ *не меняется во времени* ($\Delta\Phi = \mathrm{const}$).

Интерференция волн – *результат суперпозиции когерентных волн. В зависимости от* $\Delta\Phi$ *в пространстве происходит устойчивое во времени взаимное усиление или ослабление волн, т.е. происходит перераспределении энергии в* *пространстве; возникает устойчивая картина распределения амплитуды результирующего колебания с характерным чередованием максимумов и минимумов*.

Стоячая волна – частный случай интерференции волн, результат сложения двух гармонических волн с одинаковыми амплитудами и частотами, распространяющихся вдоль оси x в противоположных направлениях. Например, *наложение прямой и обратной волны*. При $\varphi = 0$ ур-я этих волн:

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - \mathrm{k}\,x) \qquad \xi_2 = A\cos(\omega t + \mathrm{k}\,x)$$

Ур-е стоячей волны

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos kx \cos\omega t = A_{ст} \cos\omega t, \quad (7.29)$$

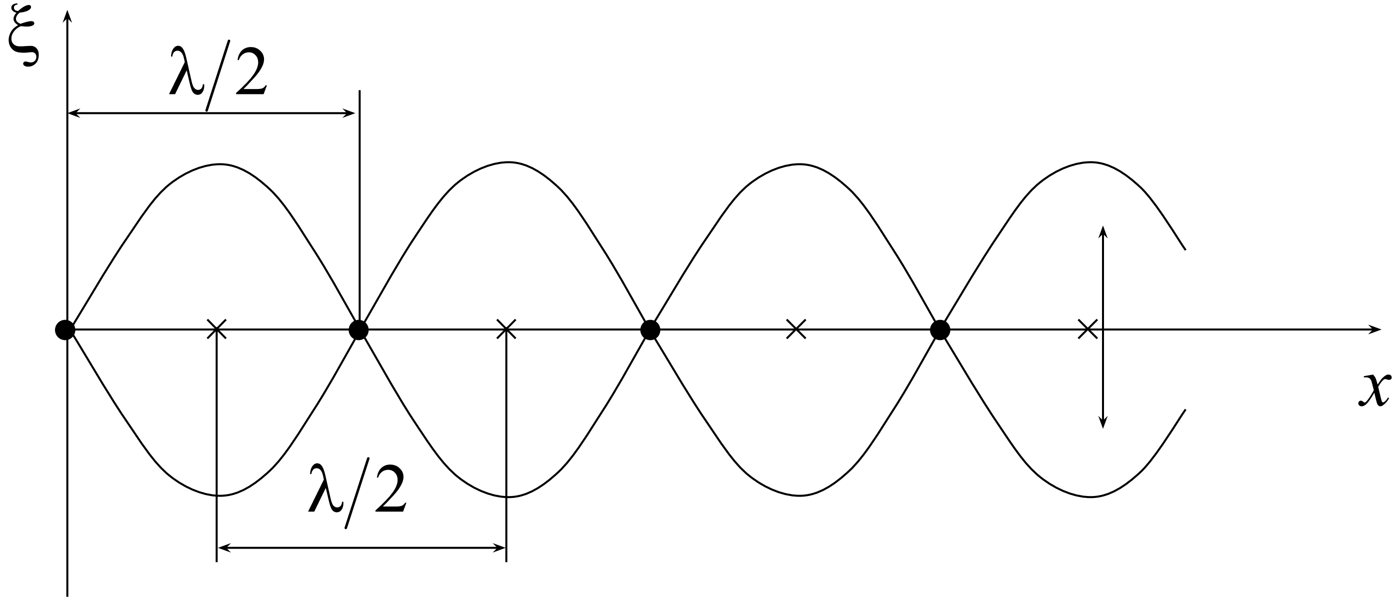
где $A_{ст} = 2A\cos kx$ – амплитуда стоячей волны.

$$A_{ст}^{max} = 2A \qquad \text{при} \qquad |\cos kx| = 1$$

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda}x = \pi n, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Откуда координаты точек, в которых расположены **пучности** стоячей волны (амплитуда колебаний в них максимальна):

$$x_n = n\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



• – узлы

× – пучности

$$A_{\text{ст}}^{\min} = 0 \qquad \text{при} \qquad \cos(\mathrm{k}\,x) = 0$$

$$\mathrm{k}\,x = \frac{2\pi}{\lambda}x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Узлы стоячей волны, амплитуда колебаний в которых минимальна, имеют координаты:

$$x_n = (2n+1)\frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Расстояние между двумя ближайшими узлами (и пучностями)

$$\Delta = x_{n+1} - x_n = \lambda/2$$

$$\Delta = \lambda/2$$

Между двумя соседними узлами все точки среды колеблются синфазно, при переходе же через узел фаза изменяется на π.

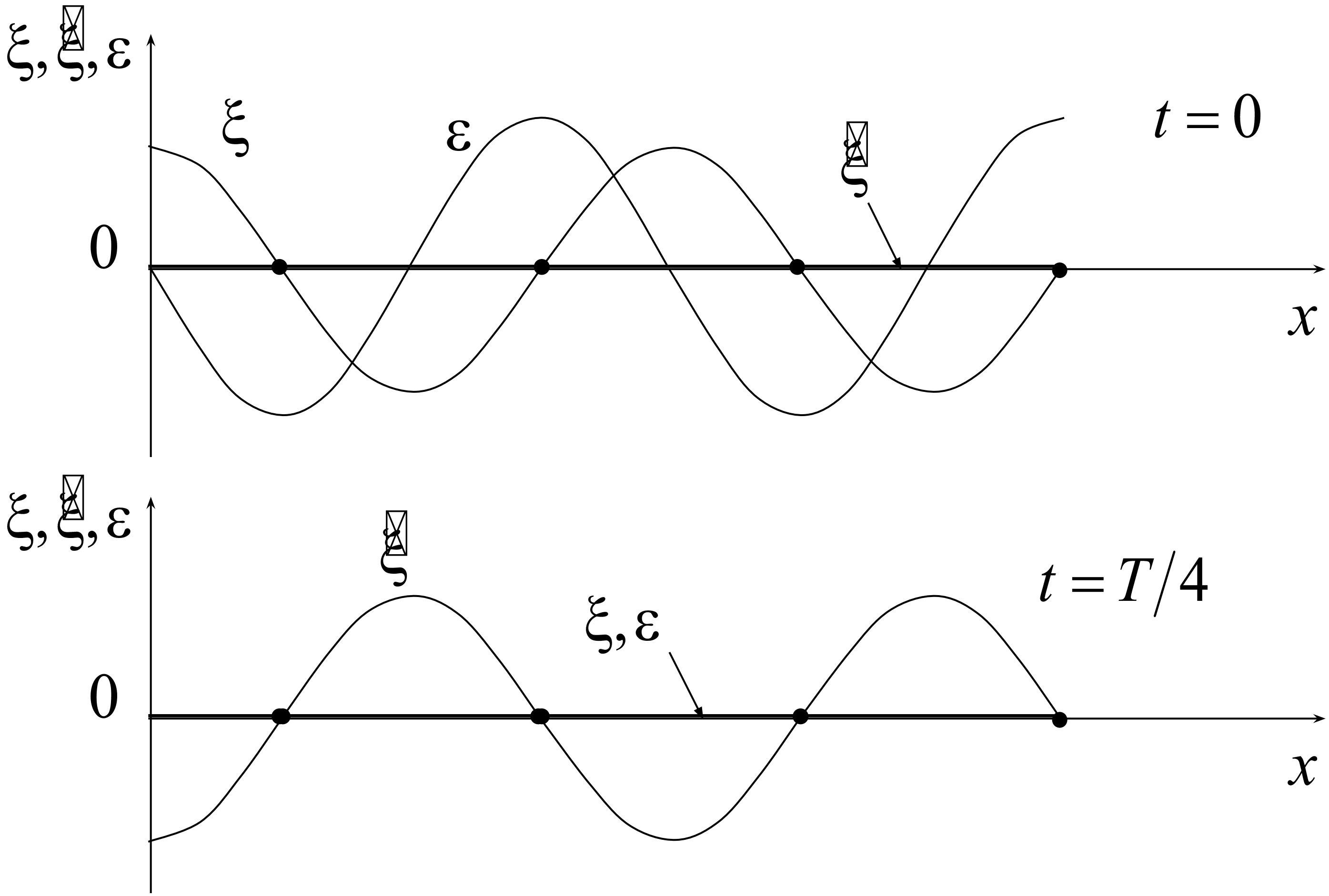
Узлы смещения как бы разделяют среду на автономные области, в которых гармонические колебания совершаются независимо.

В ***стоячей волне нет переноса возмущения вдоль оси*** *x, в отличие от бегущей волны. Отсюда – название волны. Формула стоячей волны (7.22) также является решением волнового уравнения (7.7)*

В стоячей волне

$$\dot{\xi} = -2A\omega \cos kx \sin \omega t$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2Ak \sin kx \cos \omega t$$



Это тоже стоячие волны, причем они сдвинуты относительно друг друга по фазе на $\pi/2$ как в пространстве, так и во времени.