

Решение простейших тригонометрических уравнений

Чтобы успешно решать простейшие тригонометрические уравнения необходимо следующее:

- 1) уметь отмечать точки на числовой окружности;*
- 2) уметь определять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для точек числовой окружности;*
- 3) знать свойства основных тригонометрических функций;*
- 4) знать понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса и уметь отмечать их на числовой окружности.*

Простейшие тригонометрические
уравнения – это уравнения вида
 $\cos t = a$, $\sin t = a$, $\operatorname{tg} t = a$, $\operatorname{ctg} t = a$.

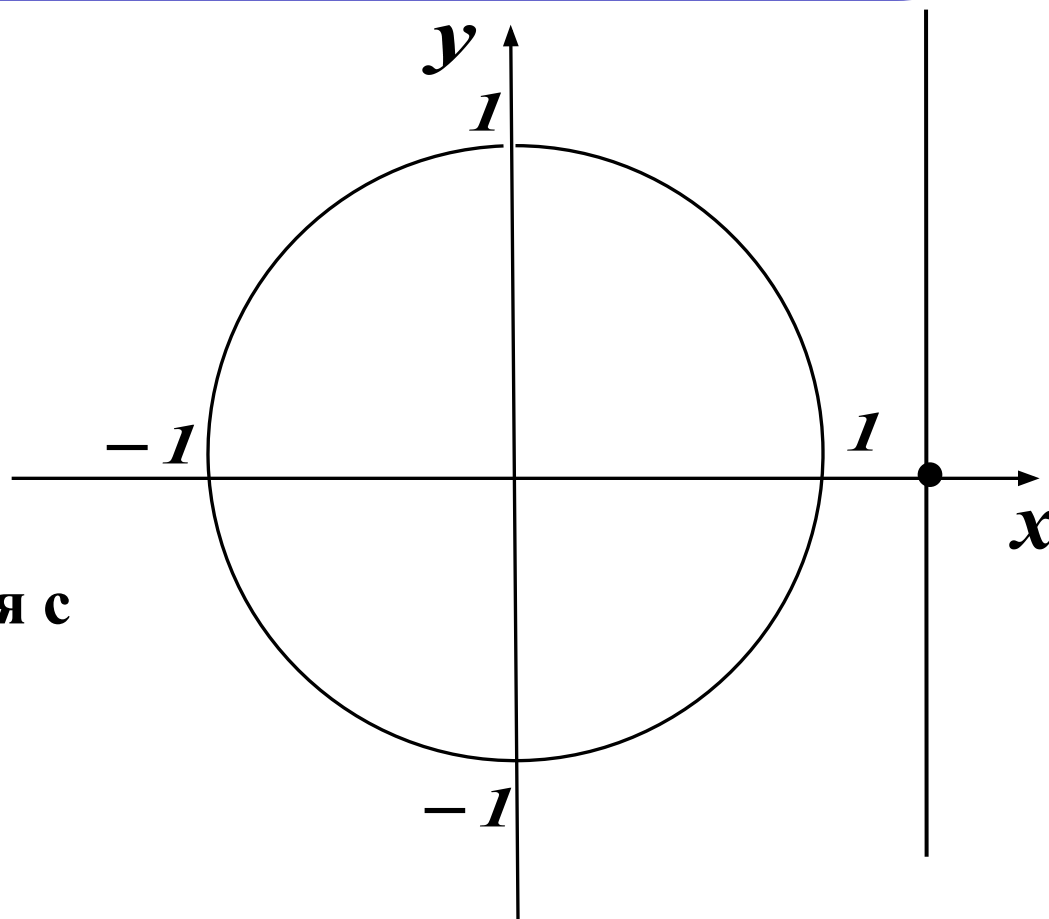
Арккосинус и решение уравнений $\cos t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos t = a$.

1) $|a| > 1$

Нет точек пересечения с
окружностью.

Уравнение *не имеет
решений.*



Арккосинус и решение уравнений $\cos t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos t = a$.

2) $|a| < 1$

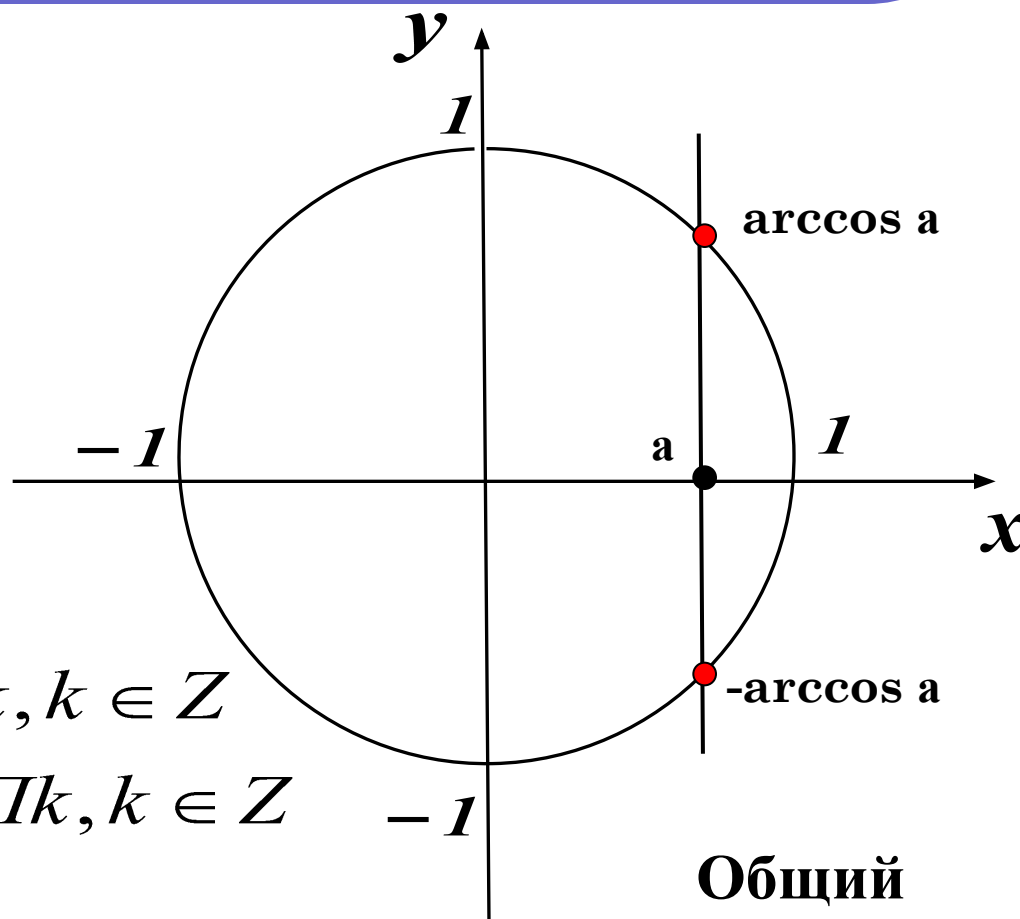
Корни, симметричные
относительно Ох могут
быть записаны:

$$\cos t = a$$

$$t = \begin{cases} \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Общий
случай

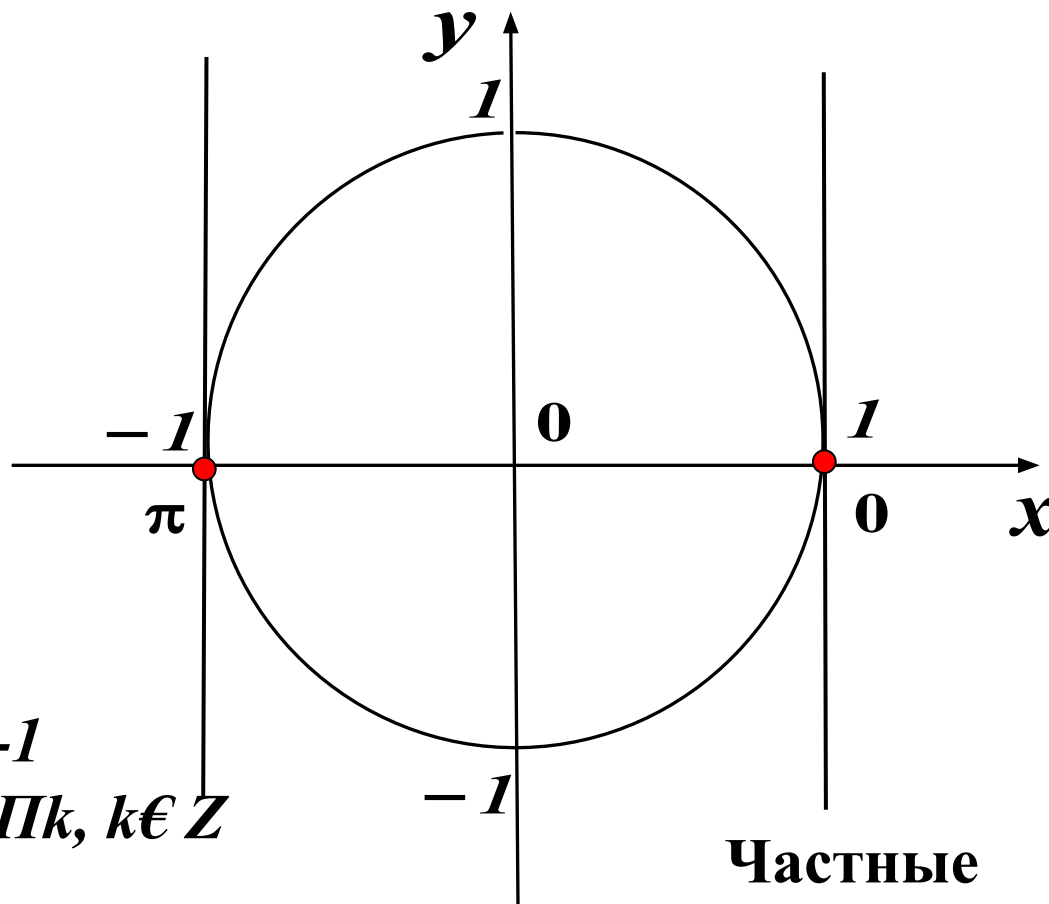
Арккосинус и решение уравнений $\cos t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos t = a$.

3) $|a|=1$

$\cos t = 1$
 $t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\cos t = -1$
 $t = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



Частные
случаи

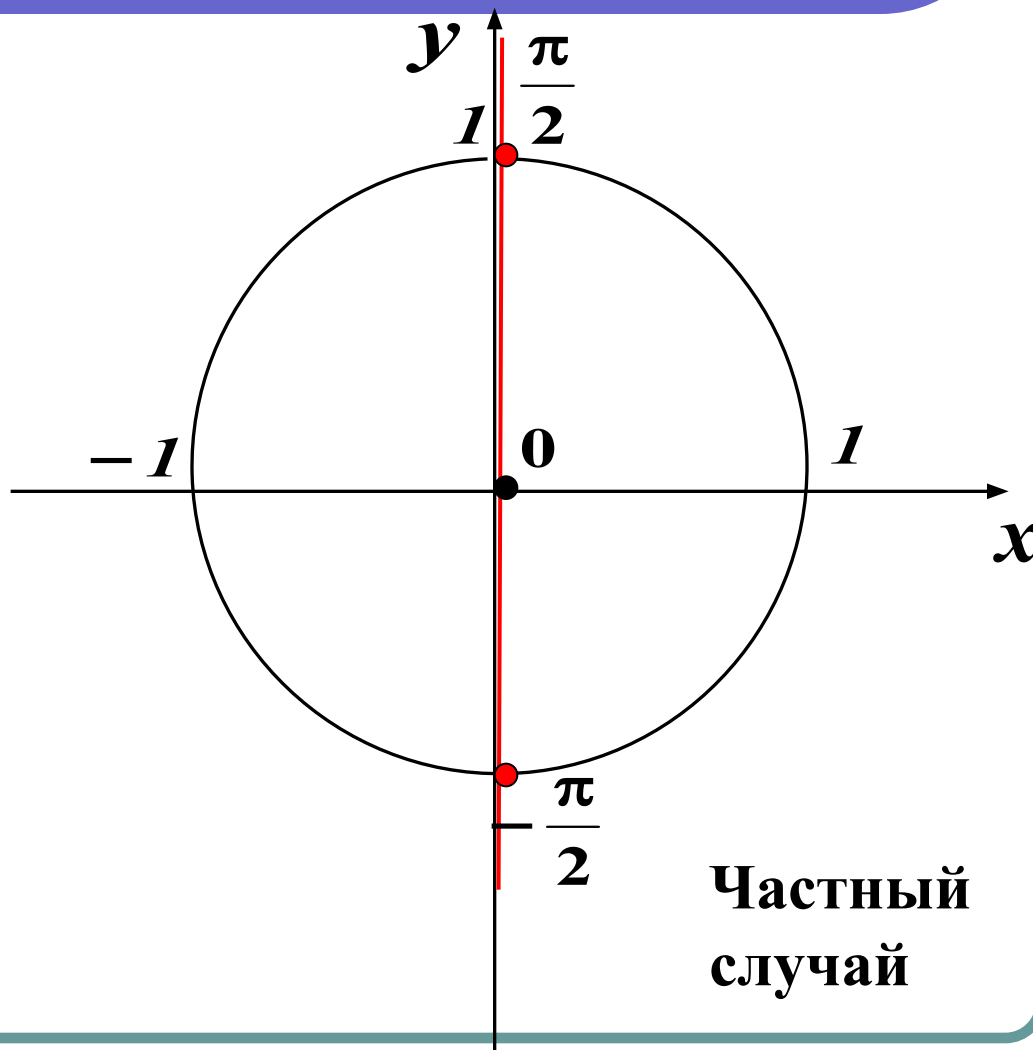
Арккосинус и решение уравнений $\cos t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos t = a$.

4) $a=0$

$$\cos t = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Пример уравнения

$$\sqrt{2} \cos 4x - 1 = 0$$

t

$$\cos 4x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

Уравнение переносом слагаемого и делением обеих частей легко сводится к простейшему.

$$4x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$4x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Разделим обе части на 4.

$$x = \pm \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\pm \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

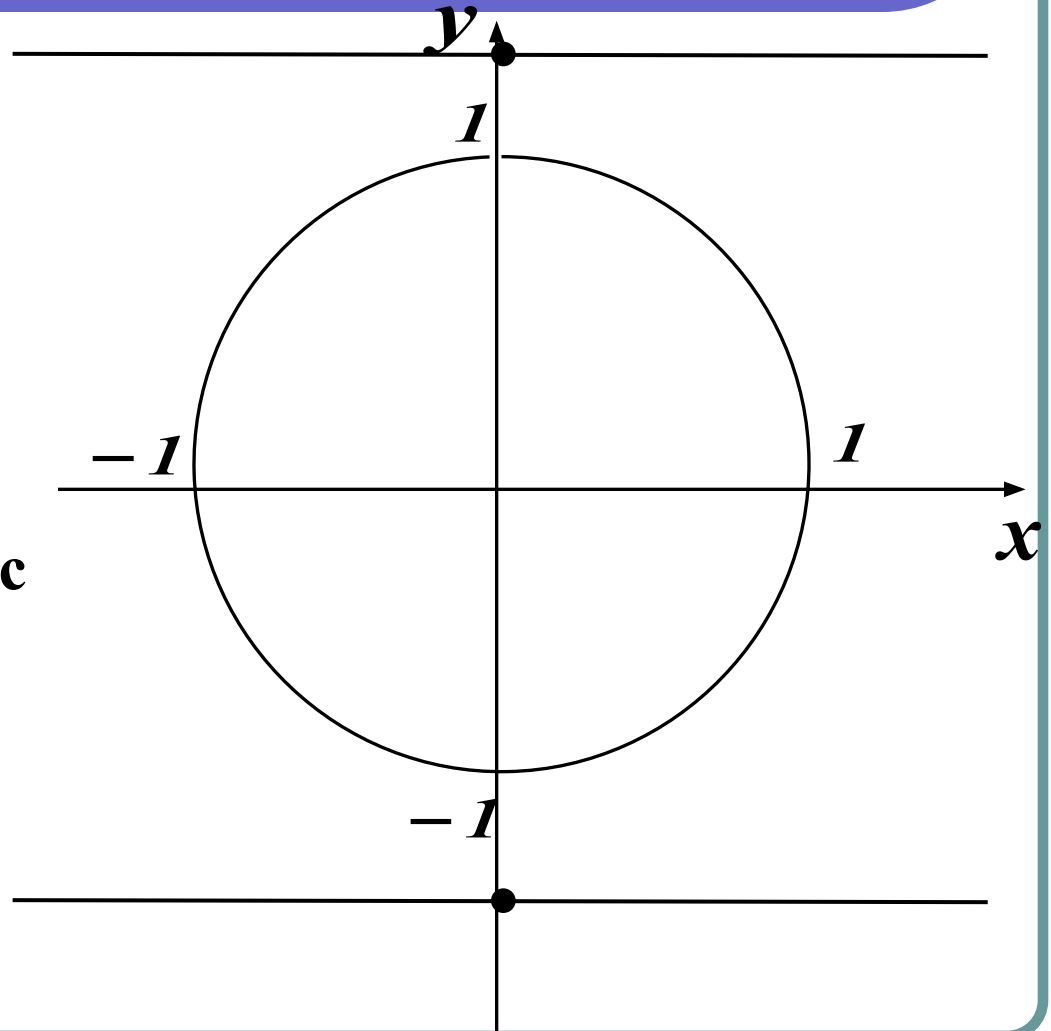
Арксинус и решение уравнений $\sin t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\sin t = a$.

1) $|a| > 1$

Нет точек пересечения с
окружностью.

Уравнение *не имеет
решений.*



Арксинус и решение уравнений $\sin t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\sin t = a$.

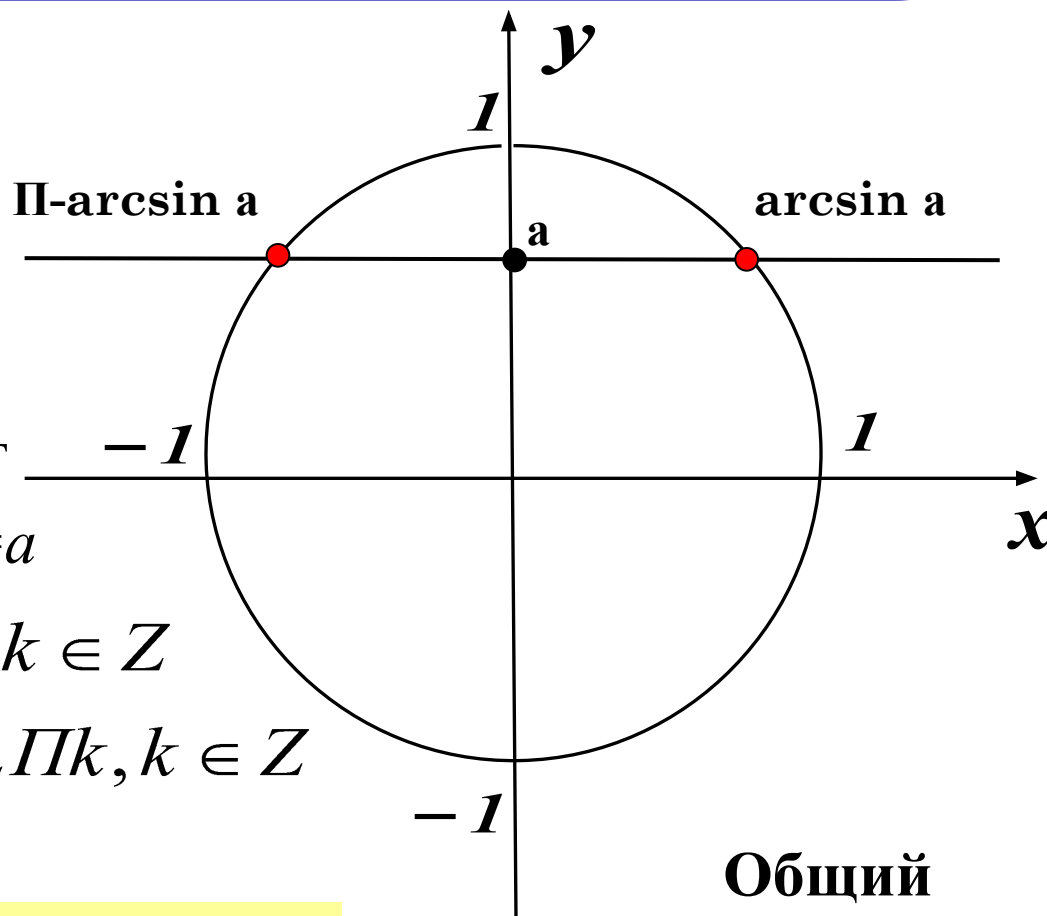
2) $|a| < 1$

Корни, симметричные
относительно Оу могут
быть записаны: $\sin t = a$

$$t = \begin{cases} \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Общий
случай

Арксинус и решение уравнений $\sin t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\sin t = a$.

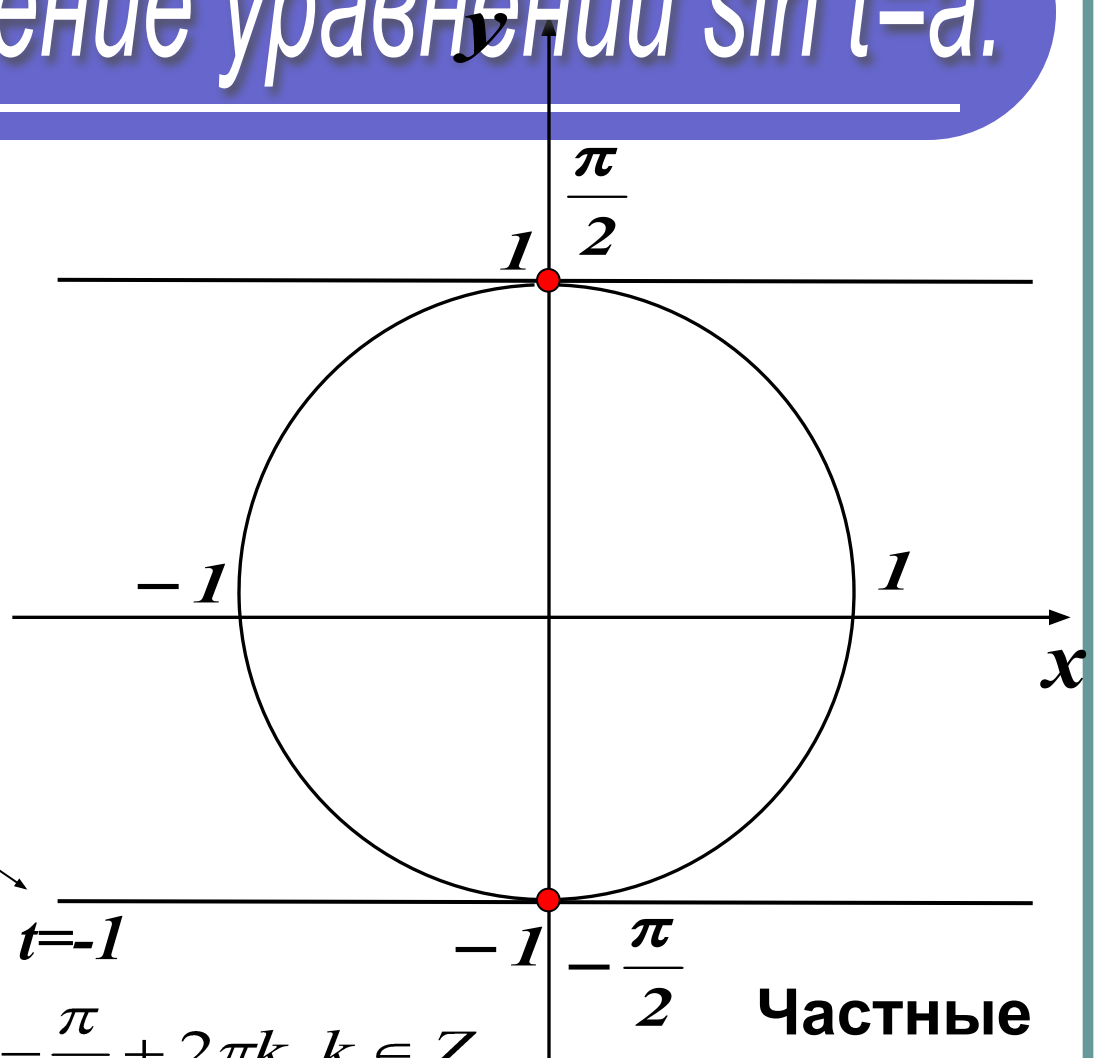
3) $|a|=1$

$\sin t = 1$

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$\sin t = -1$

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Частные
случаи.

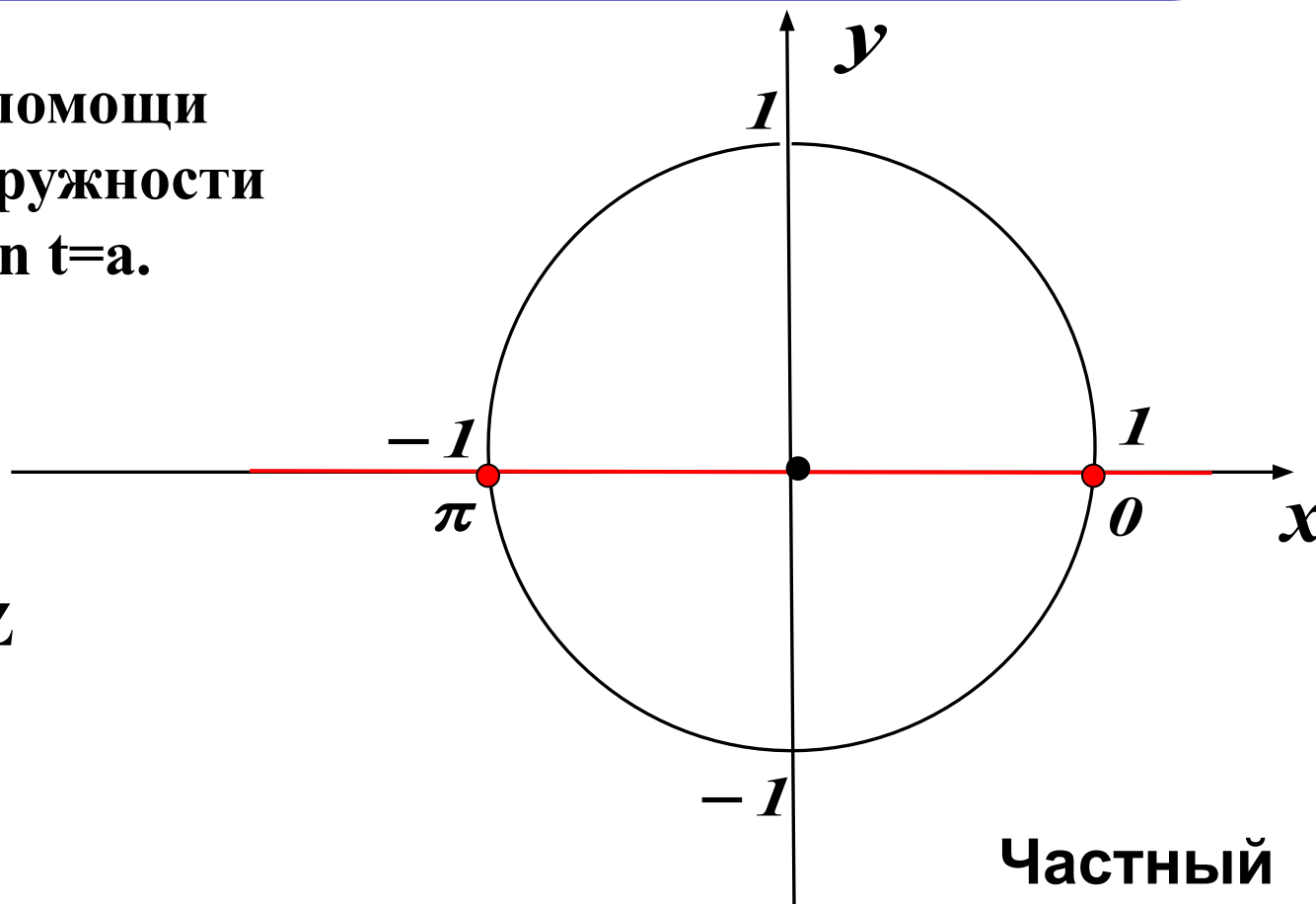
Арксинус и решение уравнений $\sin t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\sin t = a$.

4) $a = 0$

$$\sin t = 0$$

$$t = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Частный
случай

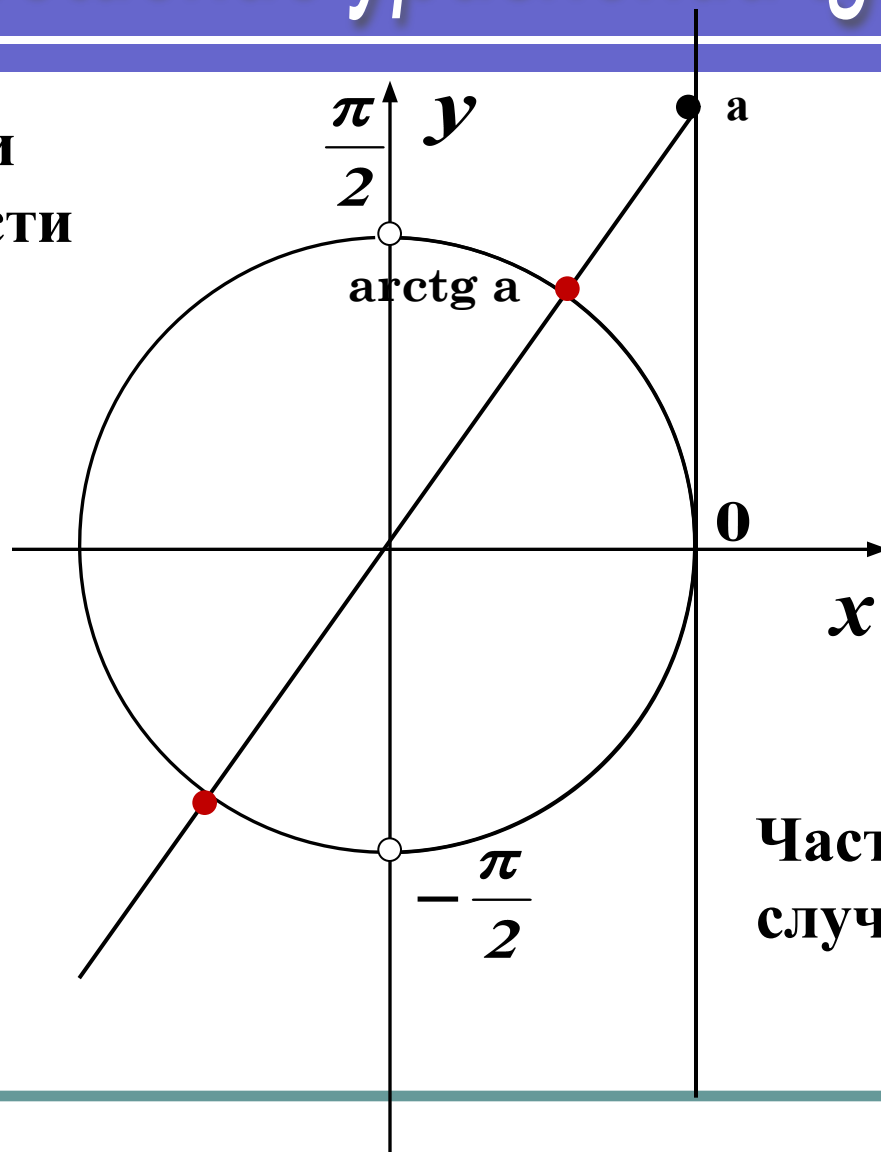
Арктангенс и решение уравнений $\operatorname{tg} t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\operatorname{tg} t = a$.

a – любое число.

$$\operatorname{tg} t = a$$

$$t = \operatorname{arctg} a + \Pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Частных
случаев нет

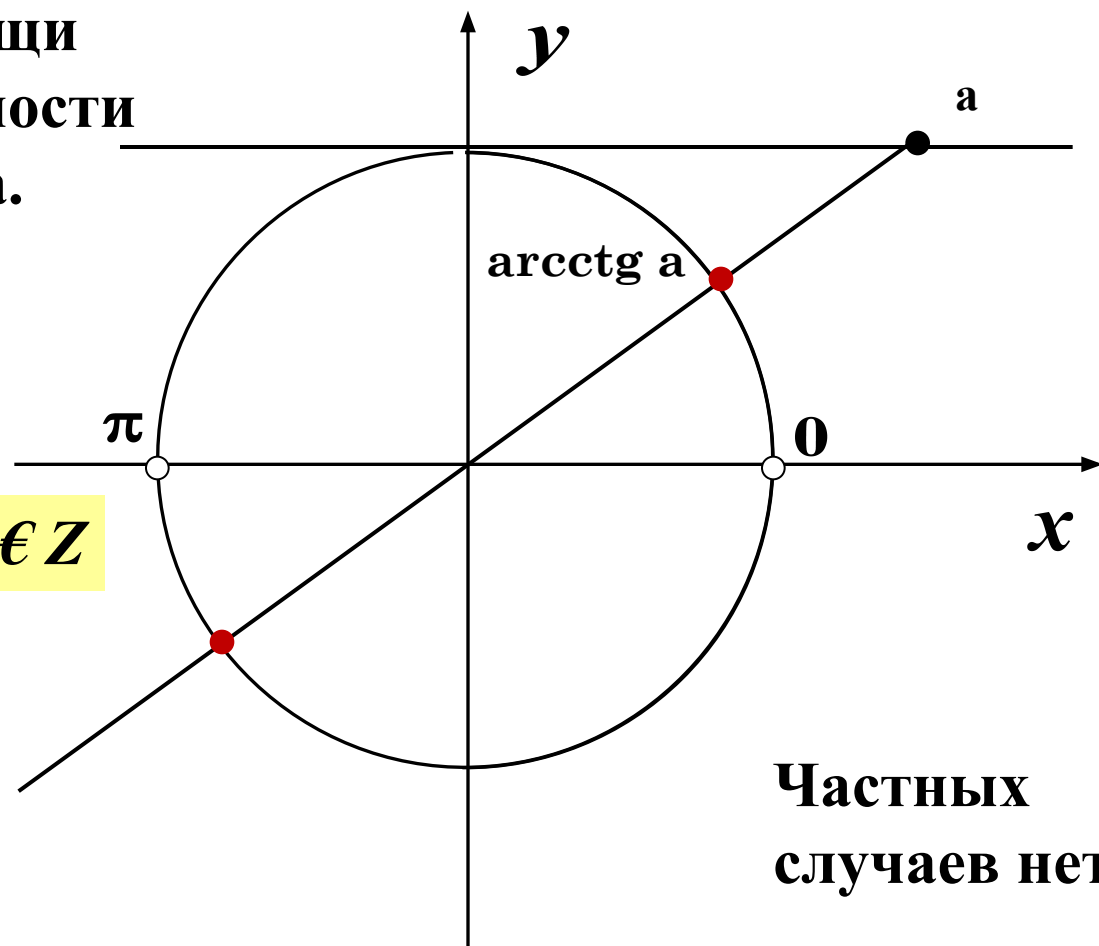
Арккотангенс и решение уравнений $\operatorname{ctg} t = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\operatorname{ctg} t = a$.

a – любое число.

$$\operatorname{ctg} t = a$$

$$t = \operatorname{arccotg} a + \Pi k, k \in \mathbb{Z}$$



**Частных
случаев нет**

Простейшие тригонометрические уравнения

Ограничение	Общий вид	Частные случаи		
$ a > 1$, $ a \leq 1$:	корней нет $\cos t = a$, $t = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	$a = 1$, $\cos t = 1$, $t = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	$a = 0$, $\cos t = 0$, $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	$a = -1$, $\cos t = -1$, $t = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
$ a > 1$, $ a \leq 1$:	корней нет $\sin t = a$, $0 < a < 1$, $t = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ $-1 < a < 0$ $t = (-1)^{k+1} \arcsin(-a) + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	$a = 1$, $\sin t = 1$, $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	$a = 0$, $\sin t = 0$, $t = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	$a = -1$, $\sin t = -1$, $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$
нет	$\operatorname{tg} t = a$, $t = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	----	----	----
нет	$\operatorname{ctg} t = a$, $t = \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$	----	----	----