



Производная

функции одной переменной

Основные обозначения

- Функция $y = f(x)$ задана на множестве X
- Пусть x_0 . Найдем $y_0 = f(x_0)$.
- Придадим аргументу приращение Δx так, чтобы $x = x_0 + \Delta x \in X$
- Найдем $y = f(x_0 + \Delta x)$.
- Обозначим $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
 Δy - приращение функции.
- Найдем
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Определение производной

- Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в этой точке при $\Delta x \rightarrow 0$ (если он существует).

- Обозначения: $f'(x)$ или y'_x или $\frac{df}{dx}$ или $\frac{dy}{dx}$

- Символическая запись определения:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} (*)$$

Частные случаи определения

- Если в точке x_0 предел (*) бесконечен, то говорят, что в точке x_0 функция имеет **бесконечную производную**: $f'(x_0) = \infty$
- Если в точке x_0 предел (*) – правосторонний, т.е. найден при $\Delta x \rightarrow 0+$, то найденная производная называется **правой** и обозначается $f'_+(x_0)$
- Аналогично определяется **левая производная** функции в точке: $f'_-(x_0)$
- Если функция имеет в точке производную, то она имеет в этой точке правую и левую производные, и все они равны между собой – **достаточное условие дифференцируемости** функции.

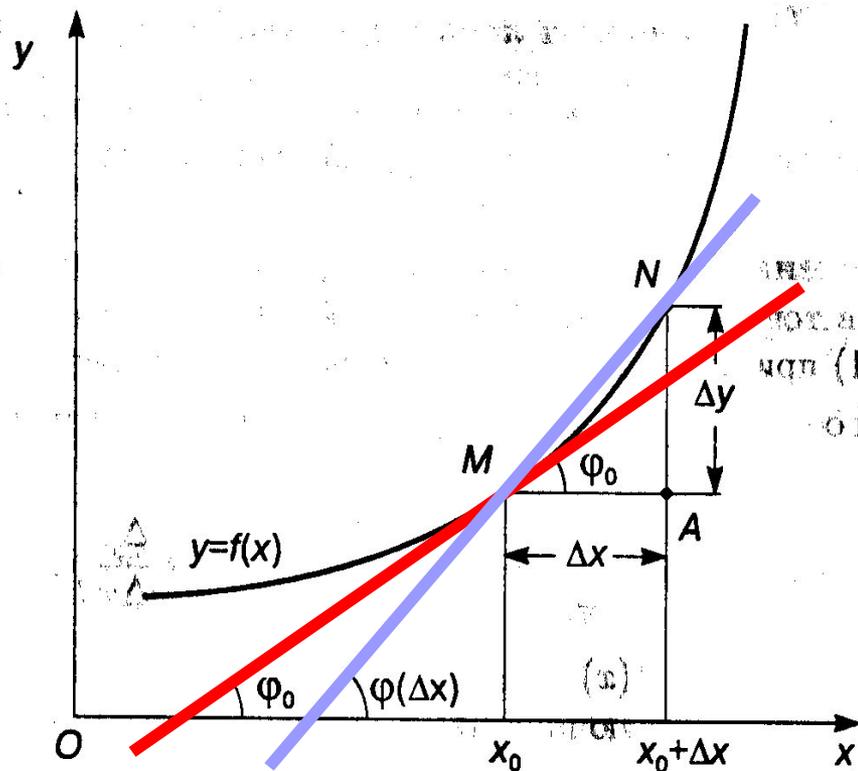
Дифференцирование функции

- Операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**.
- Если функция имеет конечную производную в точке, то называется **дифференцируемой в этой точке**; функция, дифференцируемая в каждой точке промежутка, называется **дифференцируемой на этом промежутке**.
- Дифференцируемость (гладкость) – одно из основных свойств функции.
- Если функция $f(x)$ дифференцируема на множестве X , то ее производная $f'(x)$ является функцией, определенной на множестве X .

Связь дифференцируемости и непрерывности функции

- **Теорема:** Если функция дифференцируема в точке x_0 , то она в этой точке непрерывна.
- Обратное утверждение неверно.
- Непрерывность – **необходимое условие** дифференцируемости.
- **Теорема:** Если функция разрывна в точке, то в этой точке ее производная бесконечна или не существует

Геометрический смысл производной



Пусть $M(x_0, f(x_0))$
 $N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$

Тогда $\Delta x = MA$

$\Delta y = NA$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{NA}{MA} = \operatorname{tg} \varphi$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ $\varphi \rightarrow \varphi_0$

$$\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{tg} \varphi_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \operatorname{tg} \varphi_0$$

Геометрический смысл производной

- Значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной, проведенной в данной точке к графику функции:

$$f'(x_0) = k_{\text{касат}} = \operatorname{tg} \varphi_0$$

- Угол наклона касательной к графику в точке x_0 :

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} f'(x_0)$$

- Уравнение касательной к графику функции в точке x_0 :

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Физический смысл производной

- **Механический смысл производной:**
Производная $s'(t_0)$ пути по времени в момент t_0 есть **мгновенная скорость** движения материальной точки в момент времени.
Производная пути по времени есть скорость движения материальной точки по прямой:
$$s'(t) = v(t)$$
- **Обобщенный физический смысл:** Если течение некоторого процесса описывает функция $y=f(x)$, то производная этой функции $f'(x)$ описывает **скорость протекания** этого процесса.

Правила дифференцирования

■ Производная суммы равна сумме производных:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

■ Производная произведения находится по формуле:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

В частности, постоянный множитель выносится за знак производной:

$$(cu)' = c \cdot u'$$

■ Производная частного находится по формуле:

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

■ Производная сложной функции равна произведению производных всех преобразований, начиная с последнего:

$$y = f(u), u = g(x) \Rightarrow y' = f'(u) \cdot g'(x)$$

Дифференцирование функций, заданных неявно

- Если функция y от x задана уравнением $F(x,y)=0$, то она **задана неявно**.
- Для нахождения производной неявно заданной функции, надо:
 1. продифференцировать по x обе части уравнения;
 2. из полученного уравнения выразить y' .

Дифференцирование функций, заданных параметрически

■ Если функция y от x задана уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t), \end{cases} \quad t \in T$$

то говорят, что она **задана параметрически** (t – параметр уравнений).

■ Производную функции, заданной параметрически, находят по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Производные высших порядков

- Производная $f'(x)$ сама является функцией аргумента x , для нее можно найти производную $(f'(x))'$ - производная второго порядка.
- Обозначение: $f''(x)$ или $f^{(2)}(x)$ или $f''(x)$ или $\frac{d^2 f}{dx^2}$
- Производная второй производной есть производная третьего порядка и т.д.
- **Производной n -го порядка** называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка