Тригонометрия

Тригономе́трия (от греч. τρίγονο (треугольник) и греч. μετρειν (измерять),

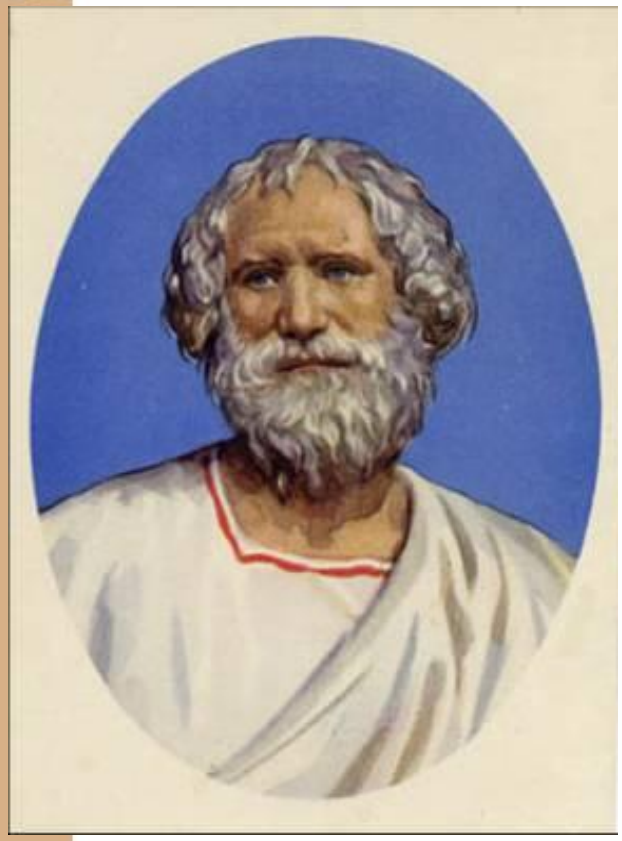
то есть измерение треугольников) — раздел математики,

в котором изучаются тригонометрические функции и их приложения к геометрии.

Данный термин впервые появился в 1595 г. как название книги немецкого математика Бартоломеуса Питискуса (Bartholomäus Pitiscus, 1561—1613),

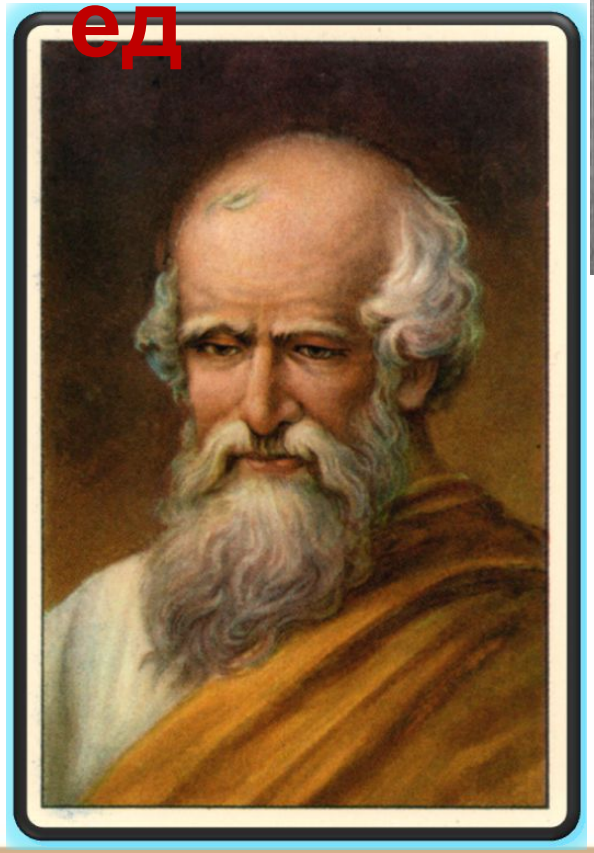
а сама наука ещё в глубокой древности использовалась для расчётов в астрономии, геодезии и архитектуре.

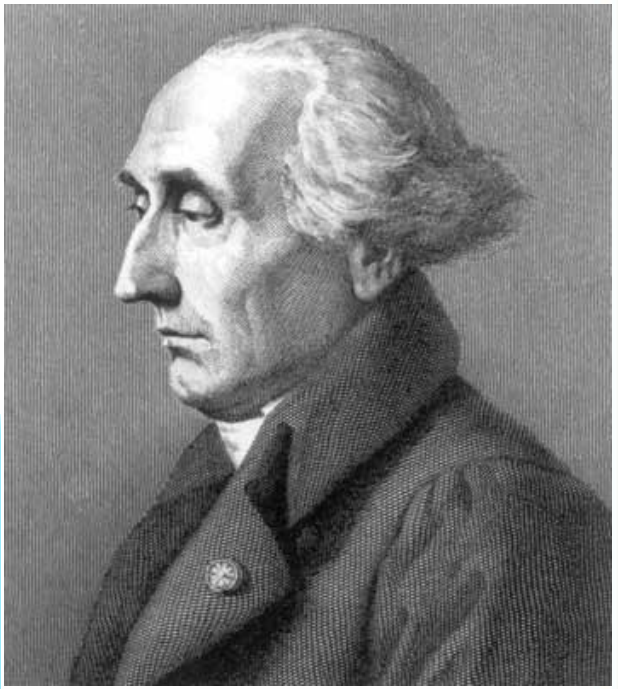
Эти ученые внесли свой вклад в развитие тригонометрии



Фал
ес

Архим
ед



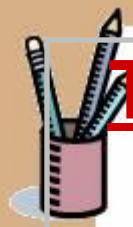


Жозеф
Луи
Лагранж

Тригонометрия возникла и развивалась в древности как один из разделов астрономии, как ее вычислительный аппарат, отвечающий практическим нуждам человека. С ее помощью можно определить расстояние до недоступных предметов и существенно упрощать процесс геодезической съемки местности для составления географических карт.

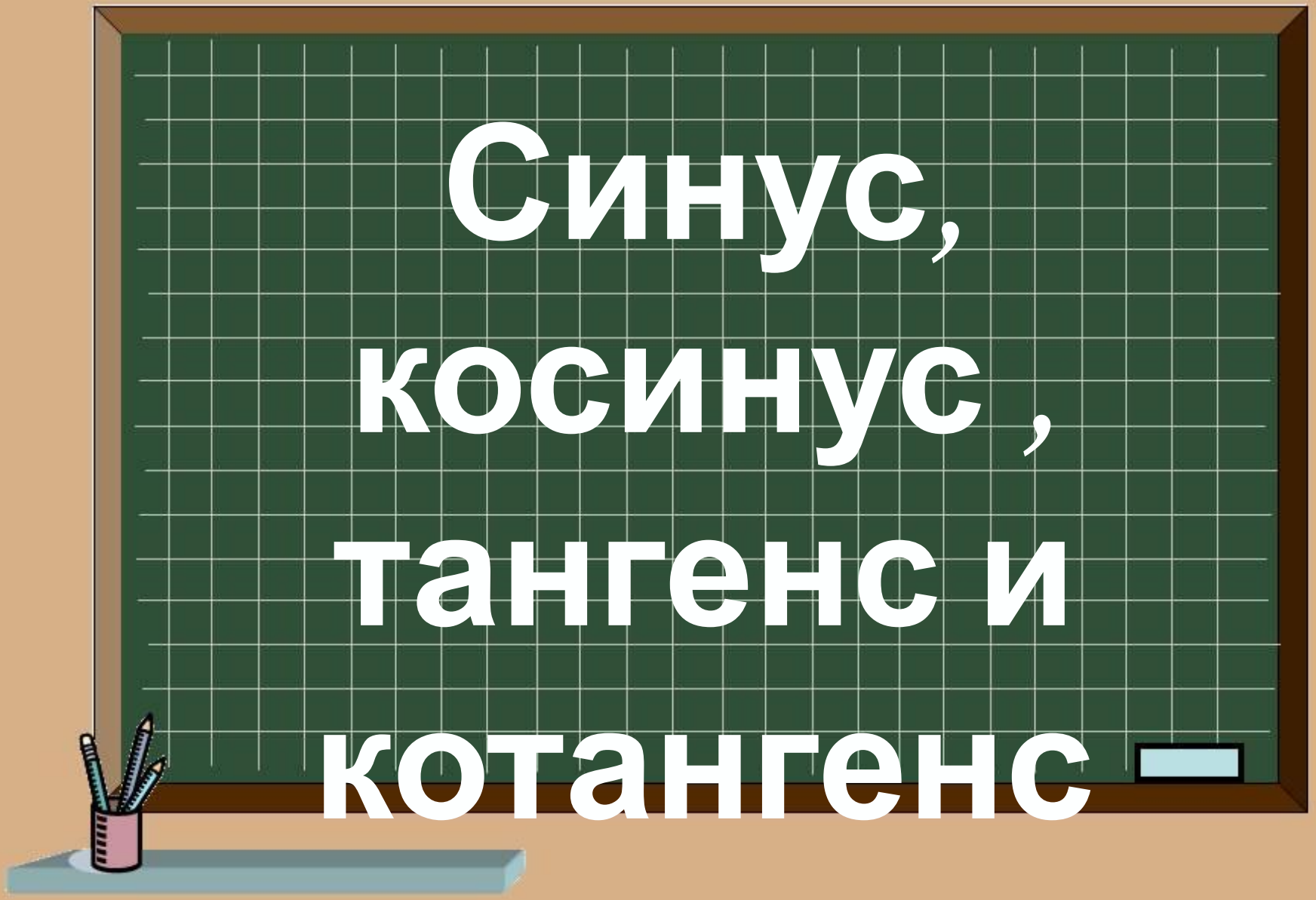
Общепринятые понятия тригонометрии, а также обозначения и определения тригонометрических функций сформировались в процессе долгого исторического развития.

Тригонометрические сведения были известны древним вавилонянам и египтянам, но основы этой науки заложены в Древней Греции, встречающиеся уже в III веке до н.э. в работах великих математиков – Евклида, Архимеда, Апполония Пергского. Древнегреческие астрономы успешно решали вопросы из тригонометрии, связанные с астрономией.



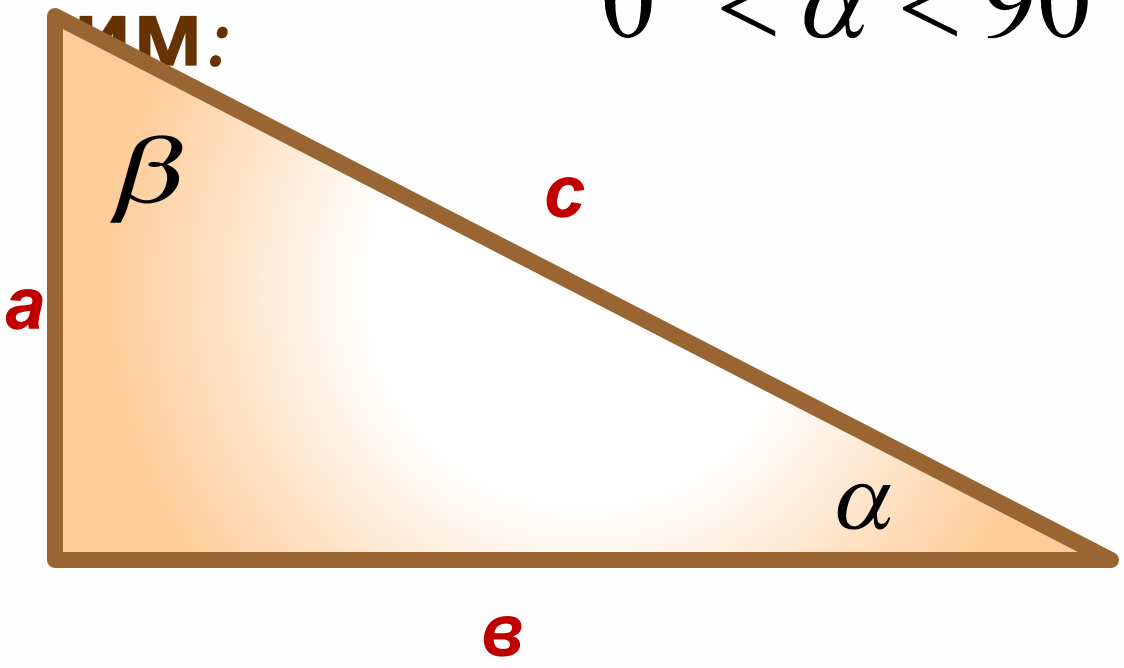
Тригонометрия – математическая дисциплина, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника.

Тригонометрические вычисления применяются практически во всех областях геометрии, физики и инженерного дела, при измерении расстояний до недалёких звёзд в астрономии, между ориентирами в географии, при контроле системы навигации, в теории музыки, акустике, оптике, электронике, теории вероятностей, статистике, биологии, медицине (включая ультразвуковое исследование (УЗИ) и компьютерную томографию), фармацевтике, химии, сейсмологии, метеорологии, океанологии, картографии, архитектуре, экономике, электронной технике, машиностроении, компьютерной графике.


Синус,
косинус ,
тангенс и
котангенс
угла

Вспомним:

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинус — отношение прилежащего катета к гипотенузе.

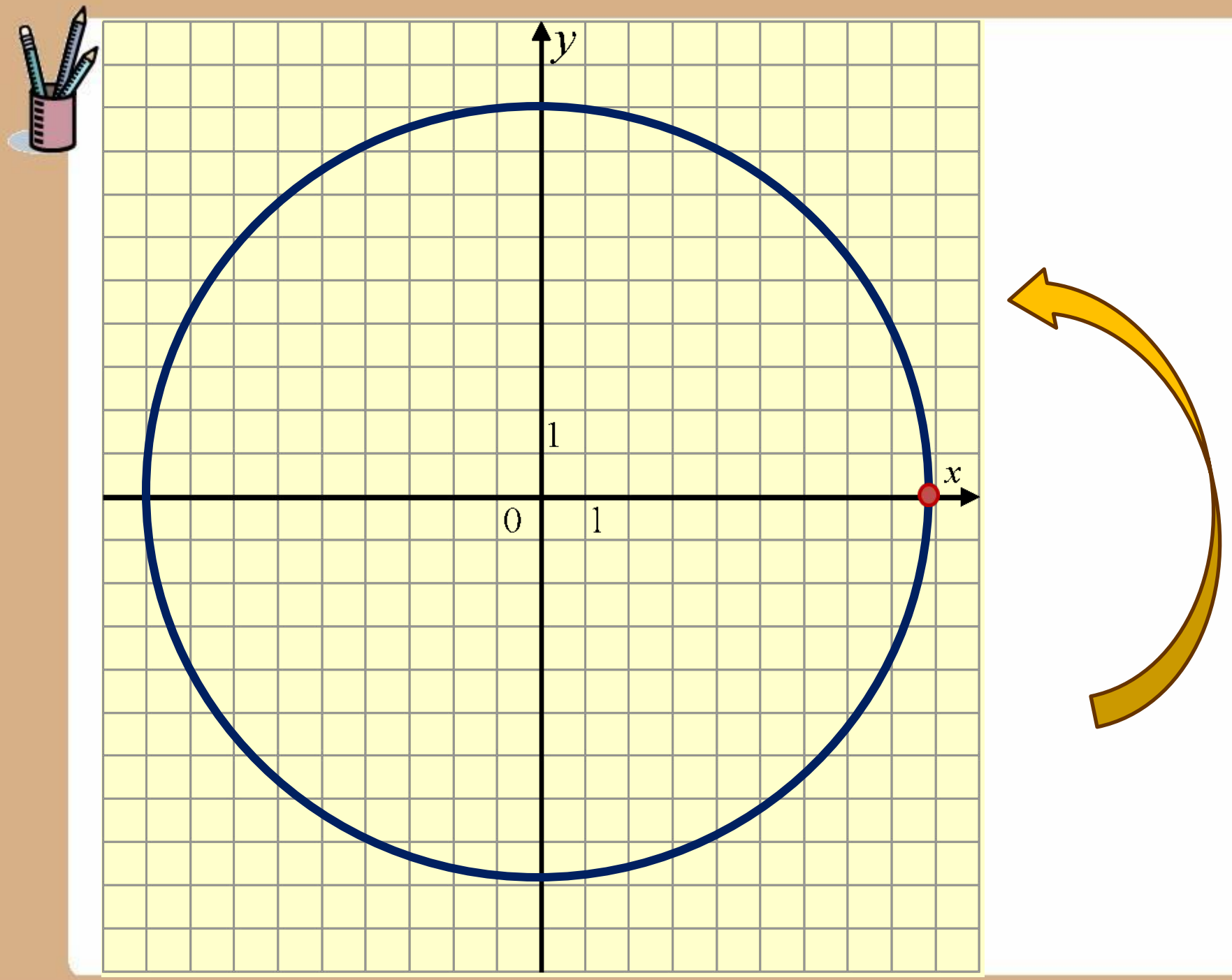
Тангенс — отношение противолежащего

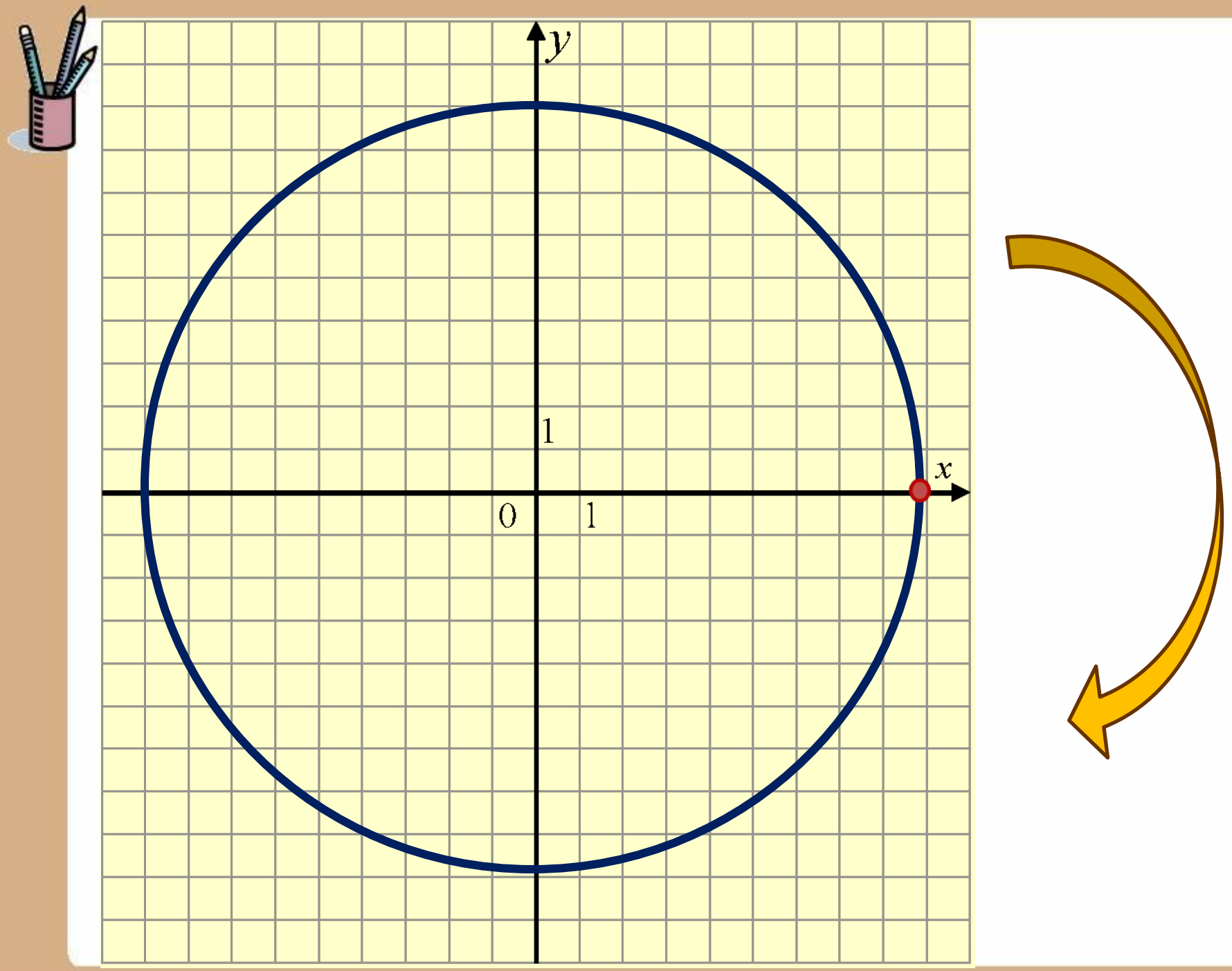
В *XVIII* веке Леонард Эйлер дал современные, более общие определения, расширив область определения этих функций на всю числовую ось.

α – угол поворота

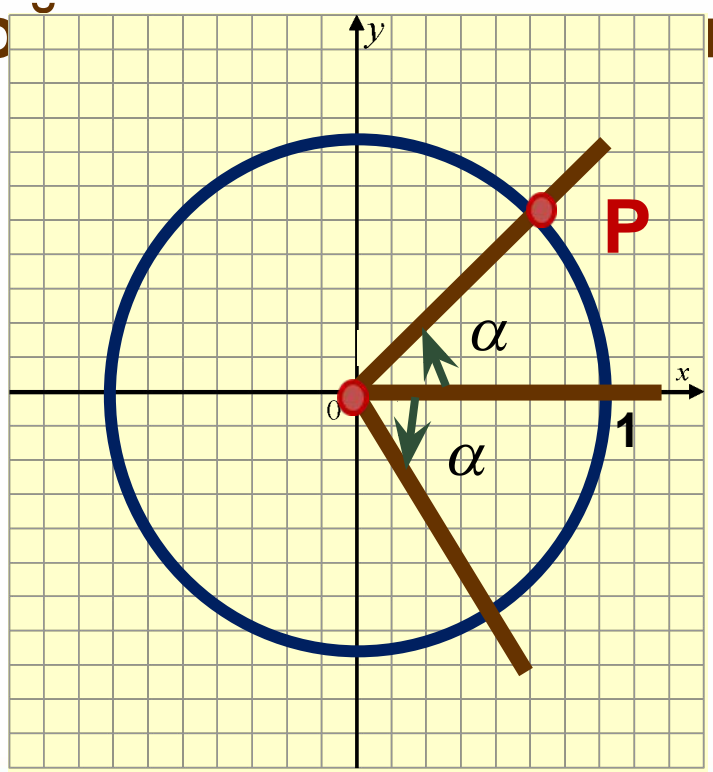
$$-\infty < \alpha < +\infty$$

$$\alpha \in R$$


y
1
x
0
1

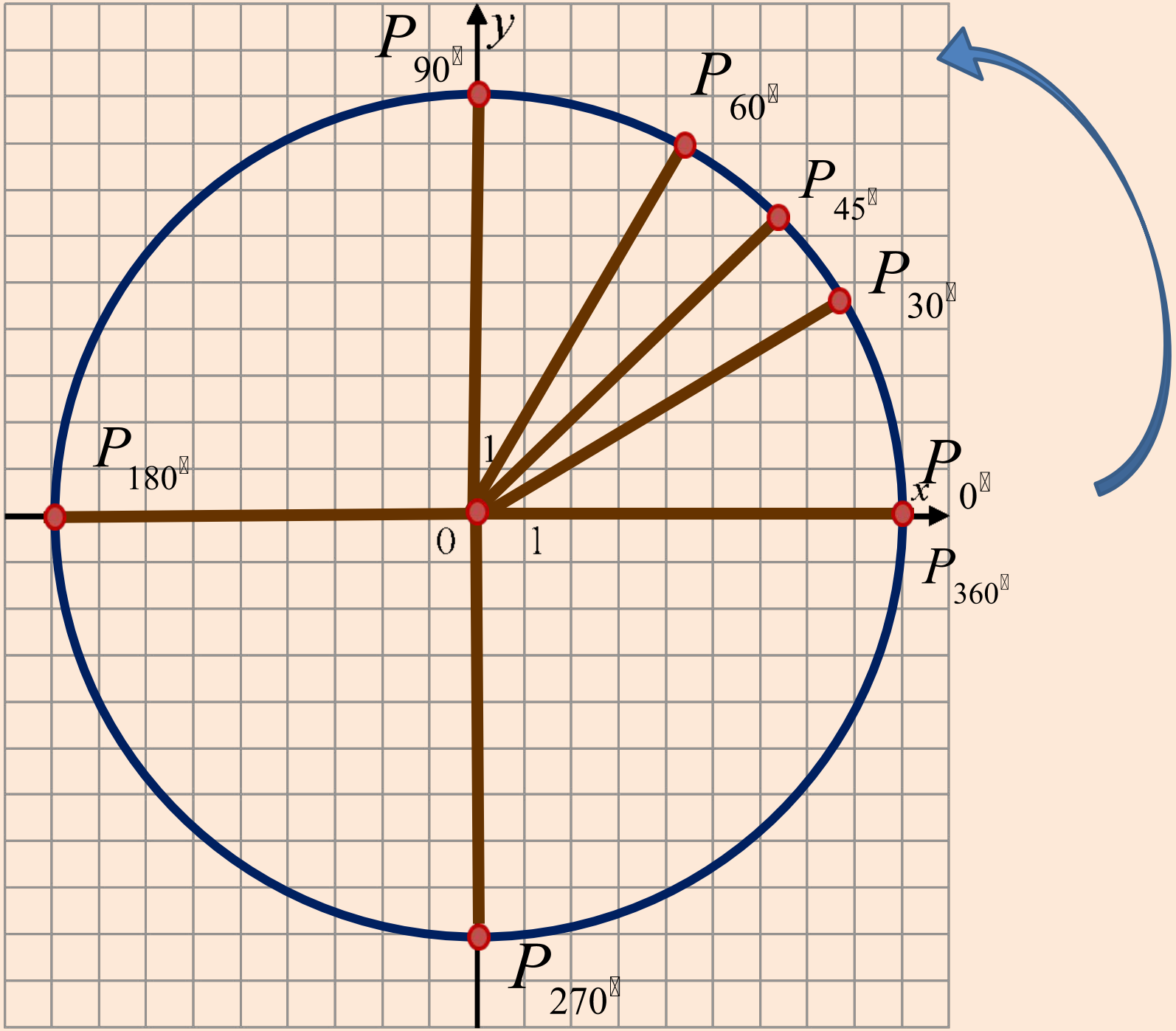

y
1
x
0
1

Рассмотрим в прямоугольной системе координат окружность единичного радиуса и отложим от горизонтальной оси угол (если величина угла положительна, то откладываем против часовой стрелки, иначе по часовой стрелке). Точку пересечения построенной окружностью обозначим

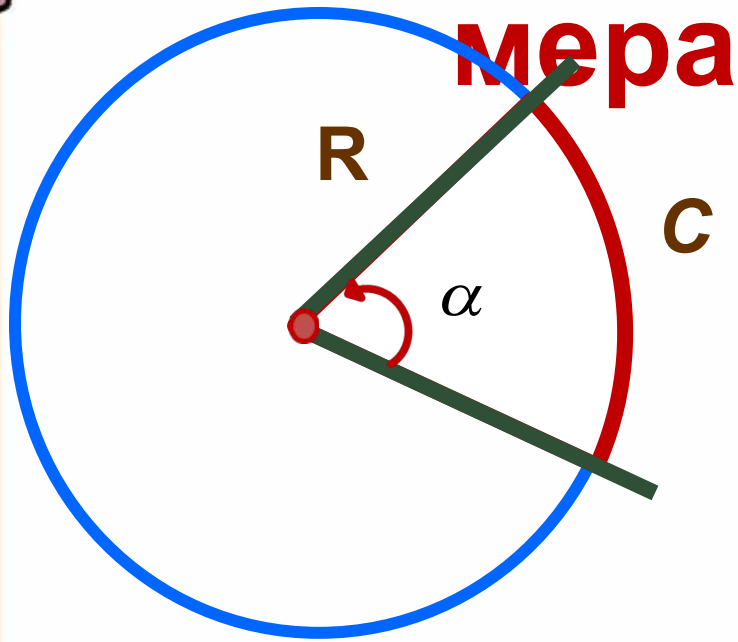


$\alpha > 0$

$\alpha < 0$


P_{90°
y
P_{60°
P_{45°
P_{30°
P_{180°
1
P_{0°
x
0
1
P_{360°
P_{270°

Радианная мера угла



α центральный угол

R – радиус

Если R = C,
то центральный угол равен
одному радиану

Радианной мерой угла называется отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности

$$1 рад \approx 57^{\circ}$$

$$\alpha = \frac{n \cdot \pi}{180}$$

$$n^\circ = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}$$

$$n = 60^\circ$$

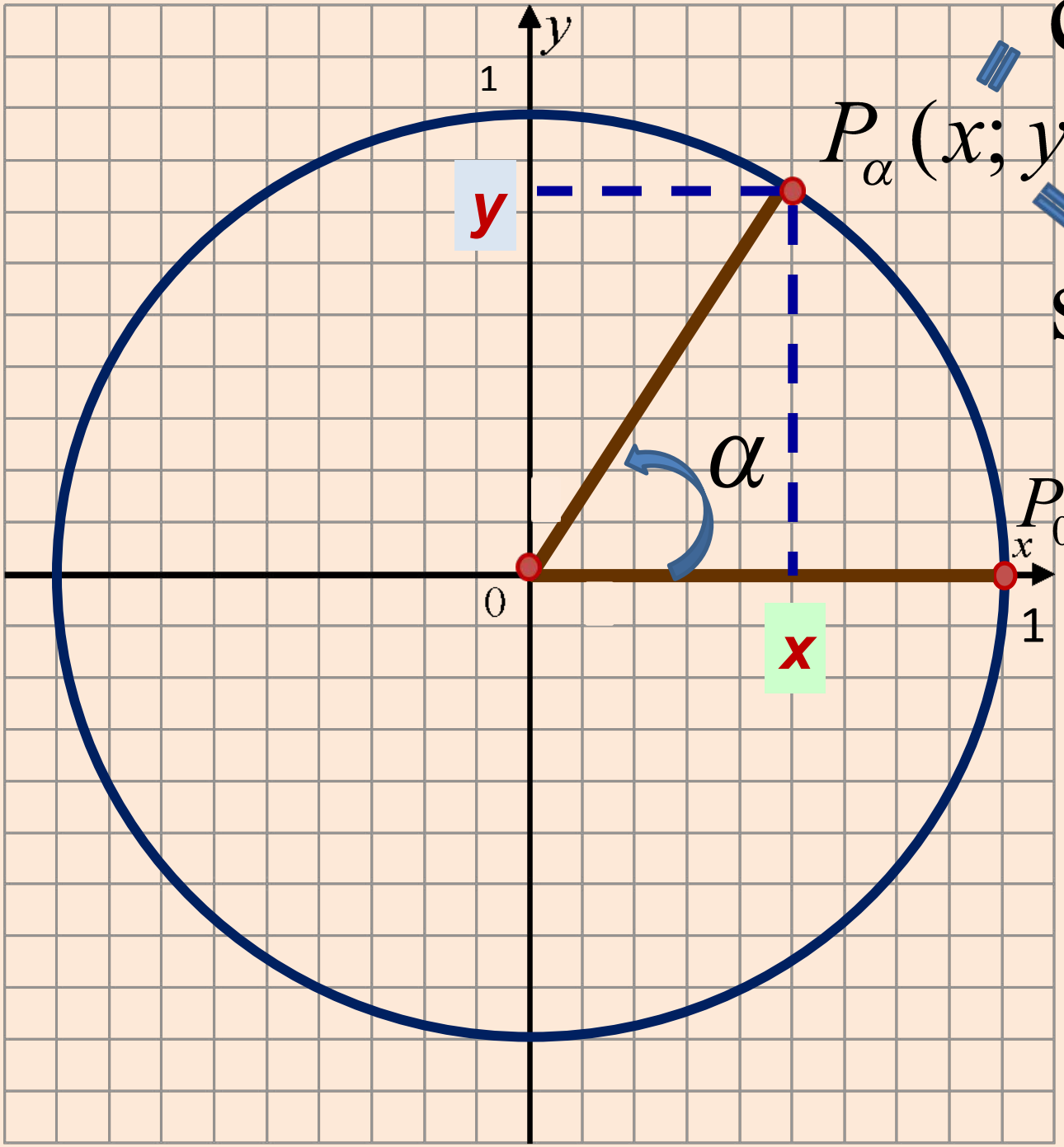
$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

$$n^\circ = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot 180^\circ}{\pi} = \frac{\pi \cdot 180^\circ}{4 \cdot \pi} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$$


y
1
y
$P_\alpha(x;y)$
$\cos\alpha$
$\sin\alpha$
α
$P_0(1;0)$
x
0
1
x

Синус угла определяется как ордината точки P_α

$$\sin\alpha = y$$

Косинус — абсцисса точки P_α

$$\cos\alpha = x$$

Тангенс – отношение ординаты к абсциссе точки P_α

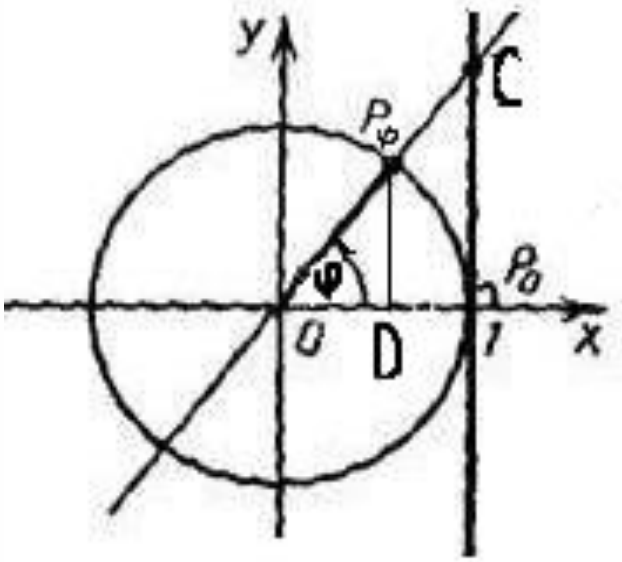
$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

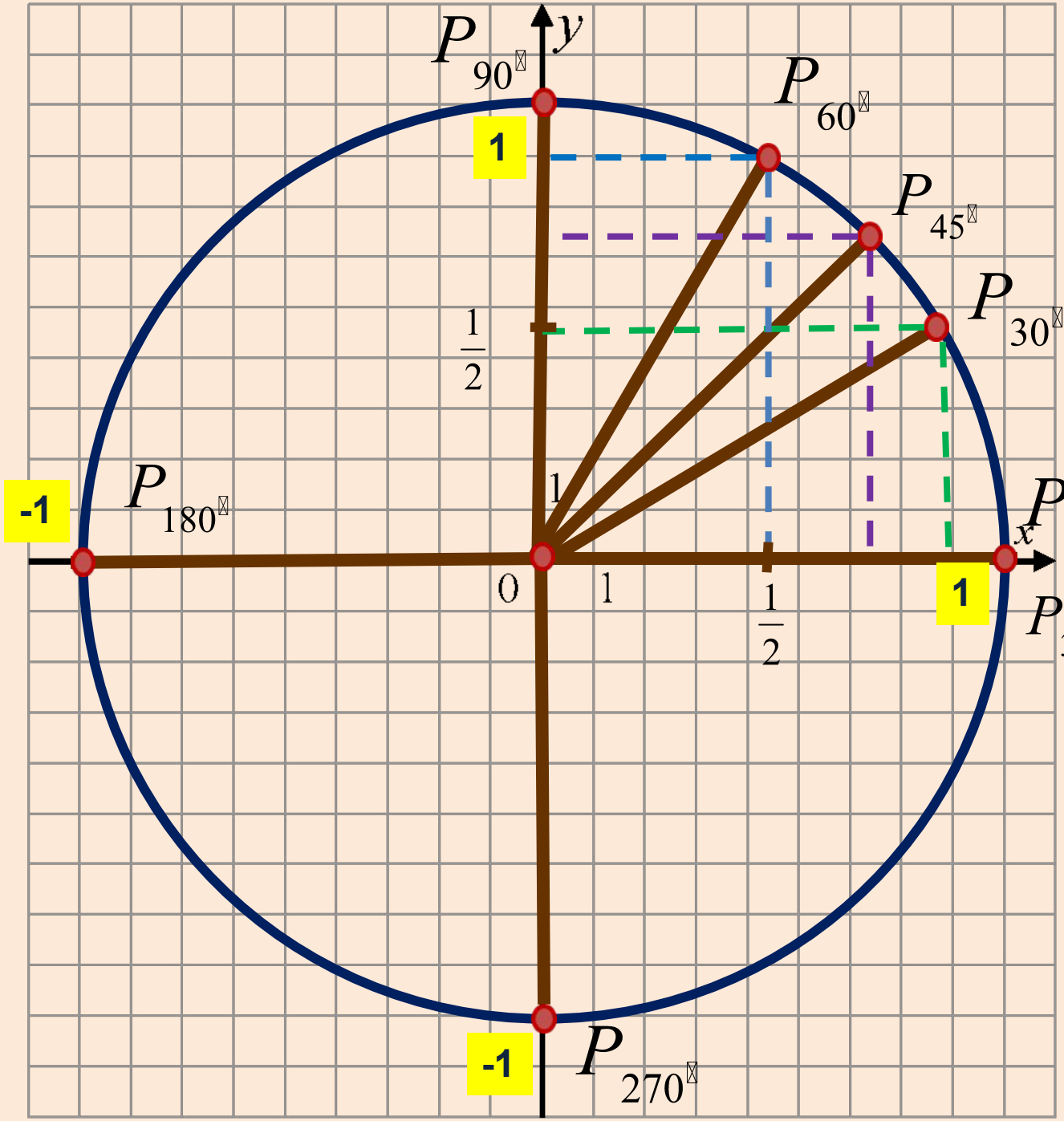
Котангенс – отношение абсциссы к

$$ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

- В курсе геометрии вы познакомились с тангенсом острого угла, равным частному синуса и косинуса этого угла:
- **$\operatorname{tg}\varphi = \sin\varphi/\cos\varphi$**
- С помощью этого равенства можно определить тангенс любого угла φ, косинус которого отличен от нуля.
- *Тангенсом угла называется частное синуса к косинусу этого угла.*
- *Для углов, косинусы которых равны 0, т. е. углов вида* $\pi/2 + \pi n$ (n – любое число), тангенс не существует.

- На рисунке к единичной окружности в точке P_0 проведена касательная; P_φ – конечная точка поворота на угол φ; C – точка пересечения касательной и прямой OP_φ.
- Ордината точки C равна тангенсу угла **φ**





$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 30^\circ \approx 0{,}9$

$\sin 45^\circ \approx 0{,}7$

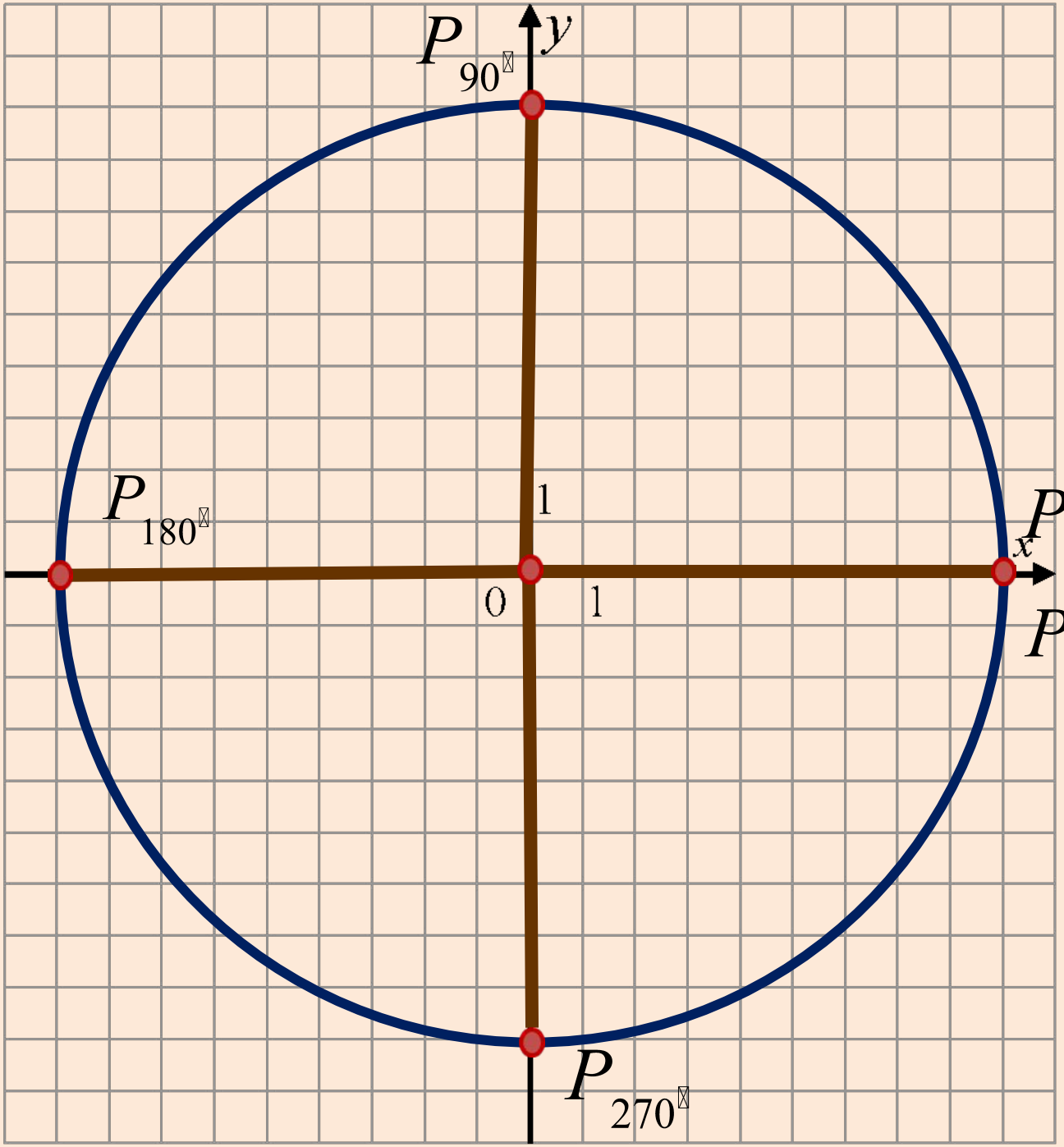
$\cos 45^\circ \approx 0{,}7$

$\sin 60^\circ \approx 0{,}9$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

Запомни

	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$



$P_{0^\circ}(1; 0)$

$P_{90^\circ}(0; 1)$

$P_{180^\circ}(-1; 0)$

$P_{270^\circ}(0;-1)$

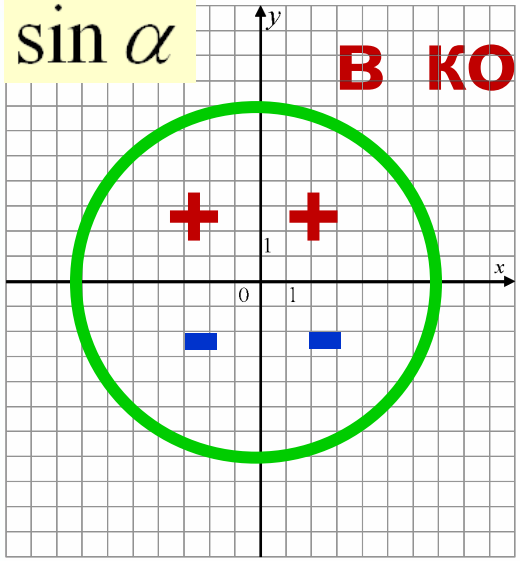
Провер

	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	-	0	-	0
$ctg\alpha$	-	0	-	0	-

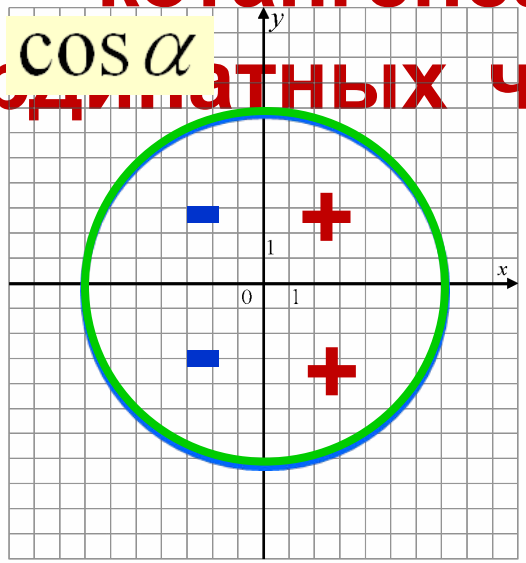
Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса

в координатных четвертях

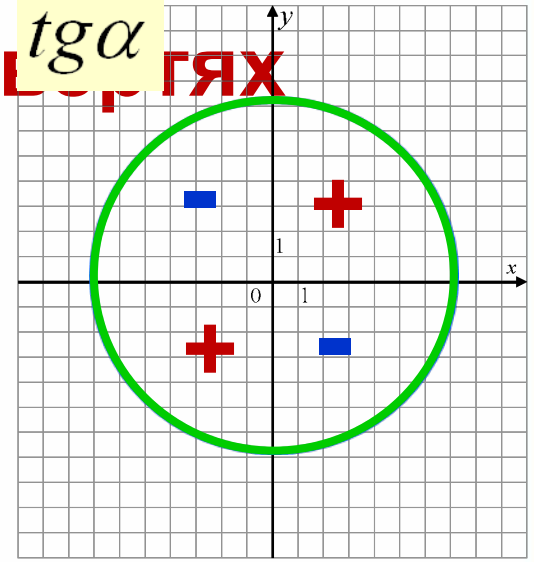
$\sin\alpha$



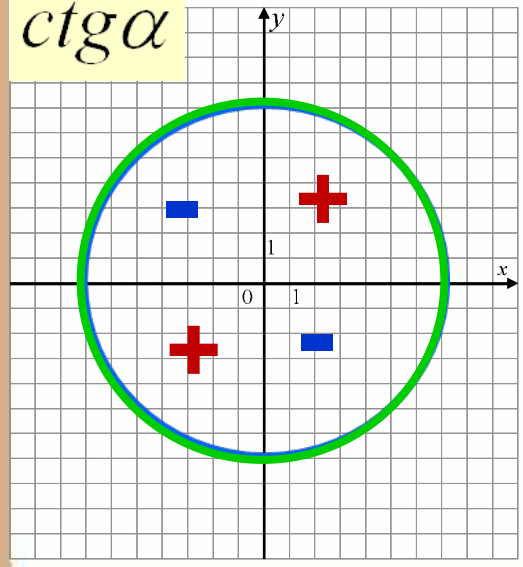
$\cos\alpha$



$tg\alpha$



$ctg\alpha$



$\sin 68^\circ > 0$

$\sin 153^\circ > 0$

$\sin 249^\circ < 0$

$\sin 315^\circ < 0$

$\cos 76^\circ > 0$

$\cos 236^\circ < 0$

$tg127^\circ < 0$

$ctg195^\circ > 0$