Теория графов

Планарные графы

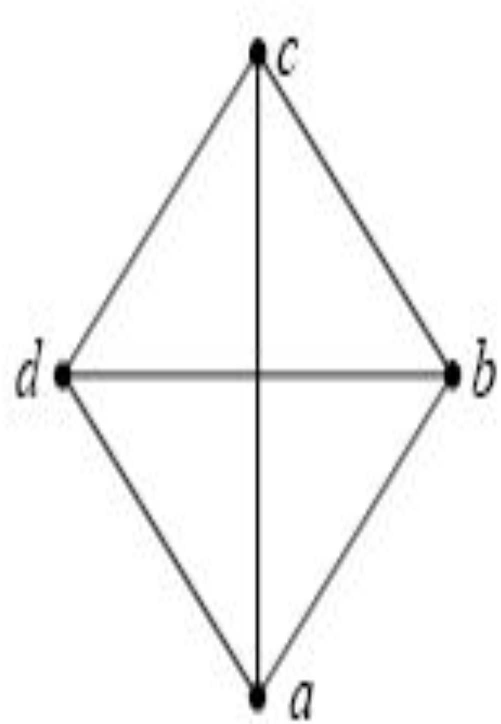
При проектировании интегральных микросхем возникает задача построения графа с непересекающимися ребрами.

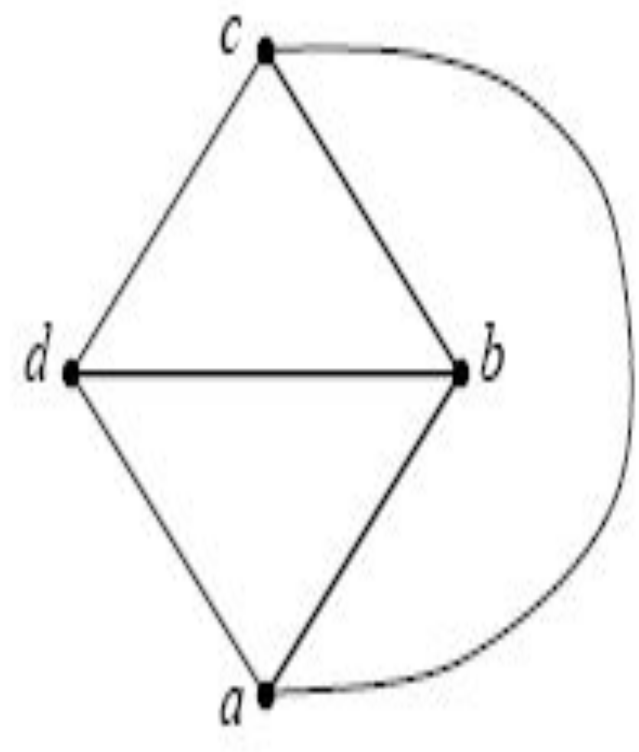
ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Планарным графом называется граф, который может быть изображен в плоскости, так что его ребра не пересекаются.

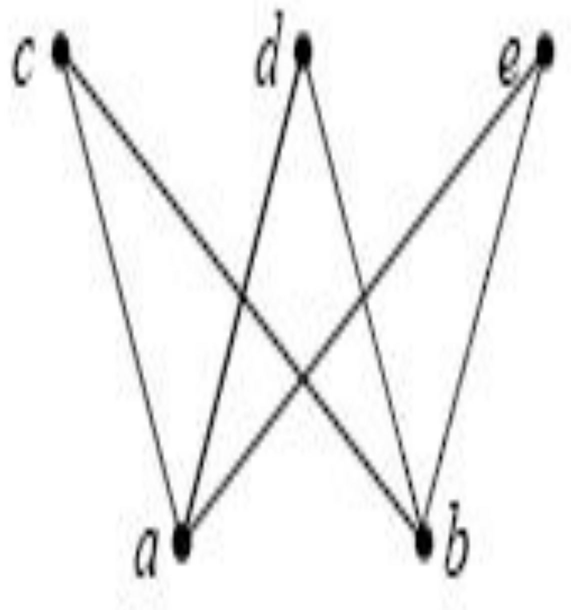
Граф, который не является пла-нарным, называется ***непланарным***.

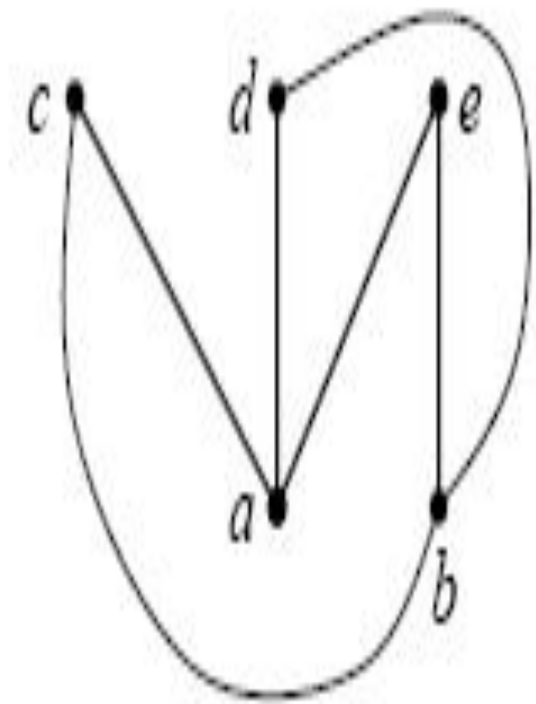
Пример изображения графа как планарного



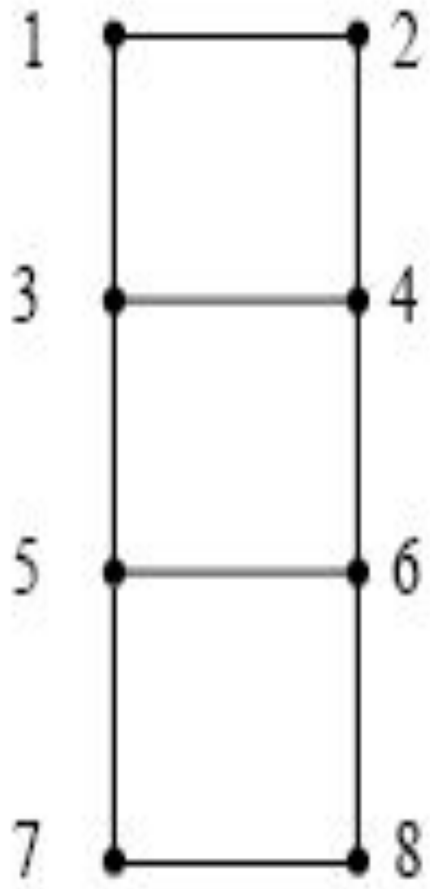


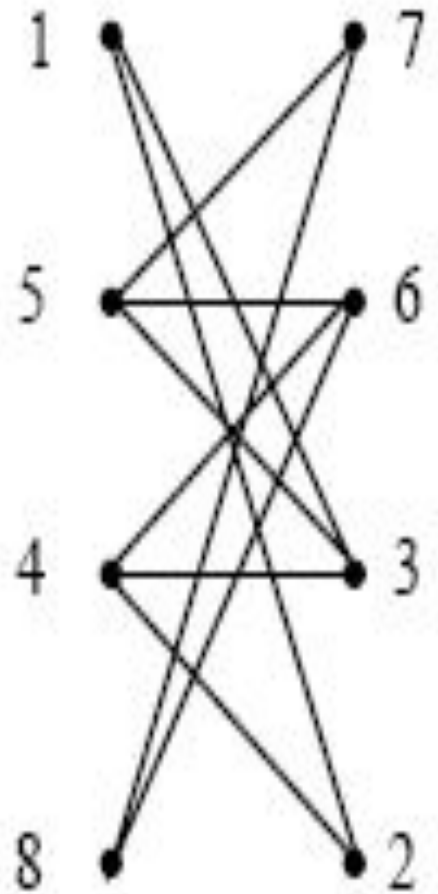
Пример изображения графа как планарного





Пример изображения графа как планарного





Понятие плоского графа

- ***Плоским графом*** называется граф, вершины которого являются точками плоскости,

  а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, которые соединяют соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершиной.

- Граф называется планарным, если он изоморфен некоторому плоскому графу.

Если граф планарен и нарисован так, что никакие линии не пересекаются, и его необходимо разрезать вдоль ребер, то граф окажется разделенным на части, включая внешнюю часть.

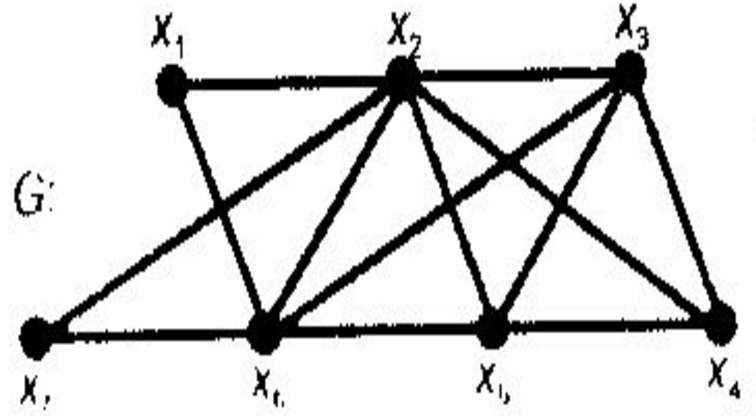
Такие части называются *гранями*.

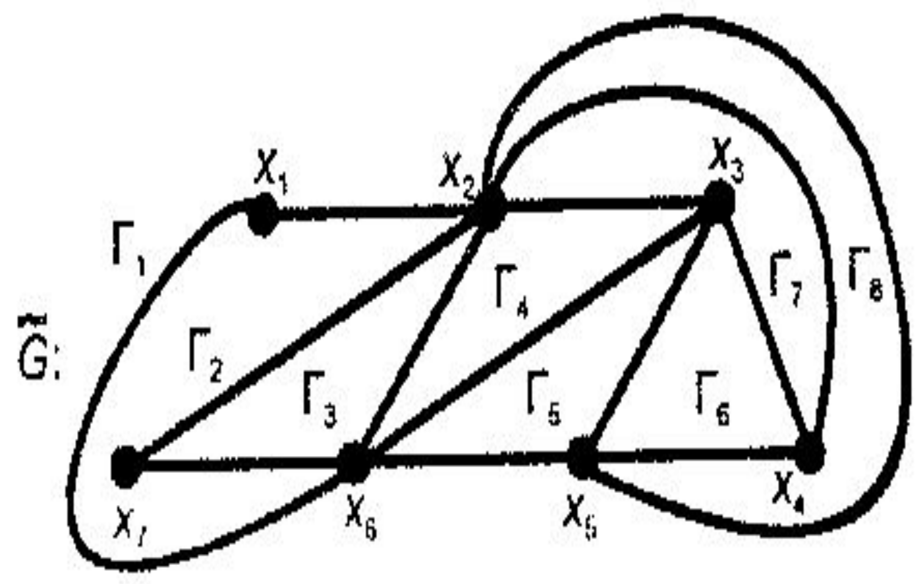
- ***Грань планарного графа*** – максимальный участок плоскости такой, что любые две точки этого участка могут быть соединены кривой, не пересекающей ребро графа.
- ***Границей грани*** называется множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани.
- Граница каждой грани является циклом.

• Граф G и его планарная укладка.

Планарная укладка имеет восемь граней: $Г_1$,$Г_2$,..$Г_8$.

Неограниченная грань $Г_1$ называется внешней. $Г_2$,..$Г_8$ – внутренними.

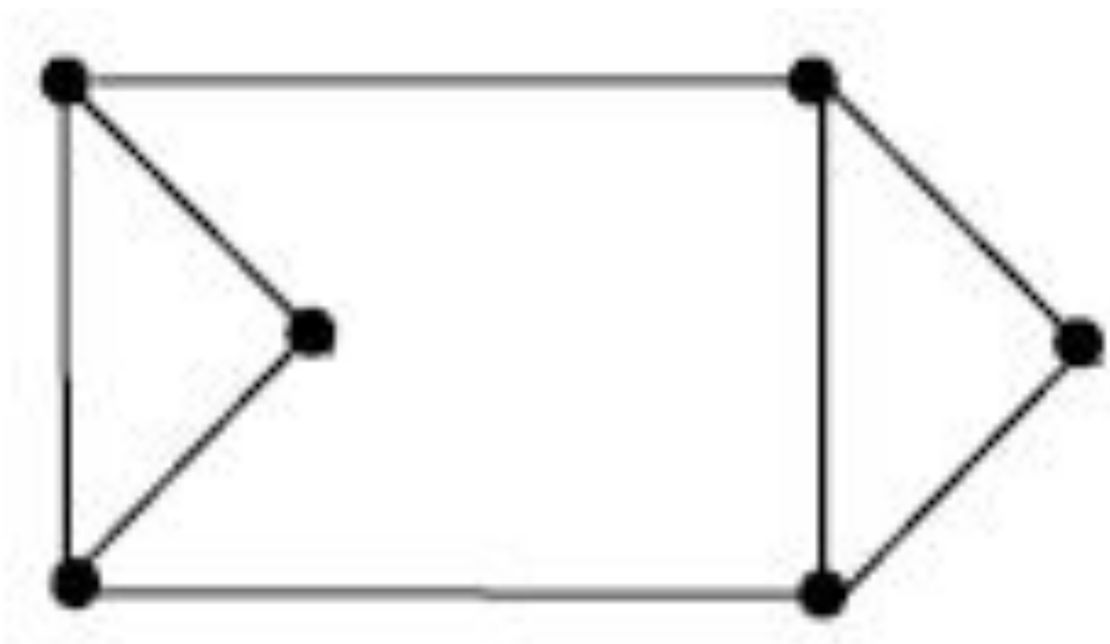




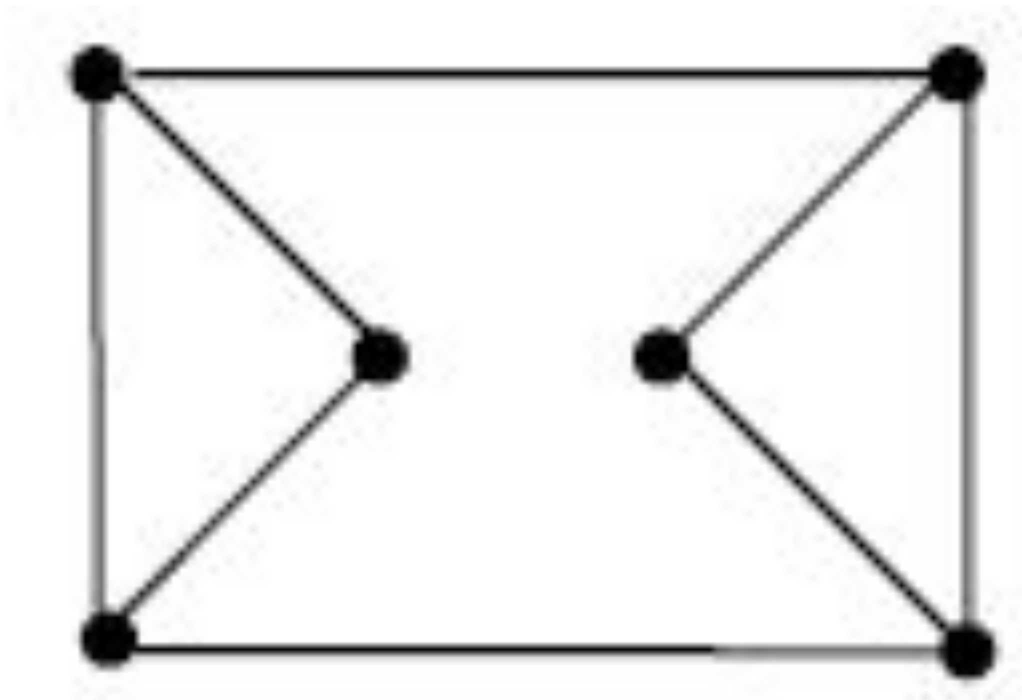
- Всегда имеется одна неограниченная *внешняя* грань, все остальные грани называются *внутренними*.

- Если в плоском графе нет циклов, то у него имеется только одна грань.

- В данной укладке планарного графа есть грани, границы которых являются простыми циклами длины 5 и 3.



- В данной укладке планарного графа есть грани, ограниченные циклами длины 4 и 6.



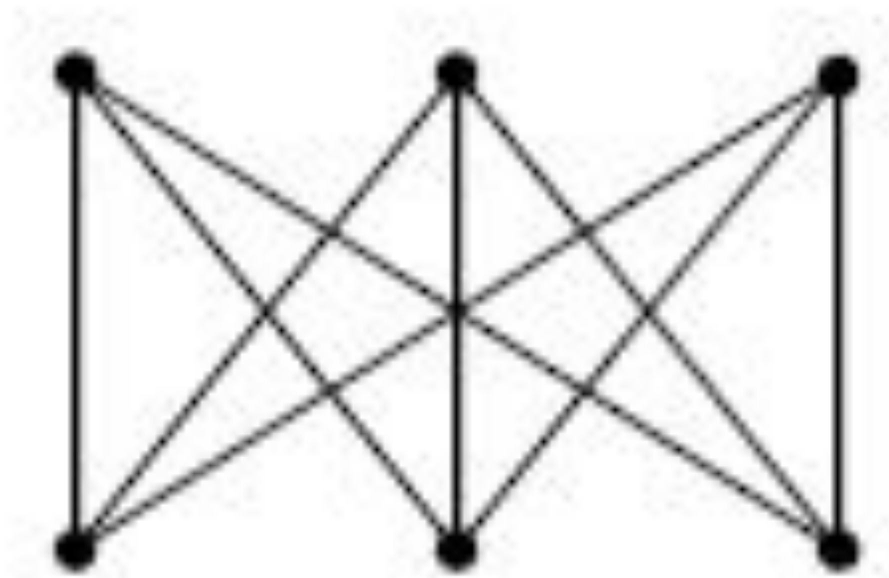
Теорема Эйлера

ТЕОРЕМА.

Если G – связный планарный граф, содержащий υ вершин, e ребер и f граней, то $\upsilon - e + f = 2$.

ТЕОРЕМА.

Полный двудольный граф $K_{3,3}$ *не* является планарным.



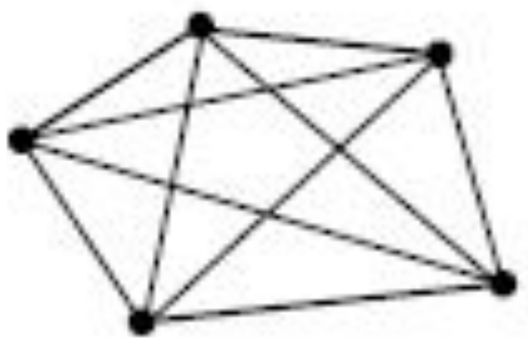
- **Лемма.**

  В произвольном связном планарном графе G с количеством вершин не менее трех имеет место неравенство

  $3\upsilon - e \geq 6$.

- **ТЕОРЕМА.**

  Полный граф K_5 не является планарным.



Доказательство:

- Граф K_5 имеет пять вершин и десять ребер.
- $3u - e = 3*5 - 10 = 5$
- *Согласно Лемме: в* произвольном

связном планарном графе *G* с количеством вершин не менее трех имеет место неравенство $3u - e \geq 6$.

Следовательно граф K_5 непланарный.

Признак планарности/непланарности графов

- Необходимое и достаточное условие планарности графа сформулировано в теореме Понтрягина-Куратовского
- Лев Семенович Понтрягин (1908-1988)-советский математик
- Казимеж Куратовский (1896-1980)-польский математик

- Теорема Понтрягина-Куратовского

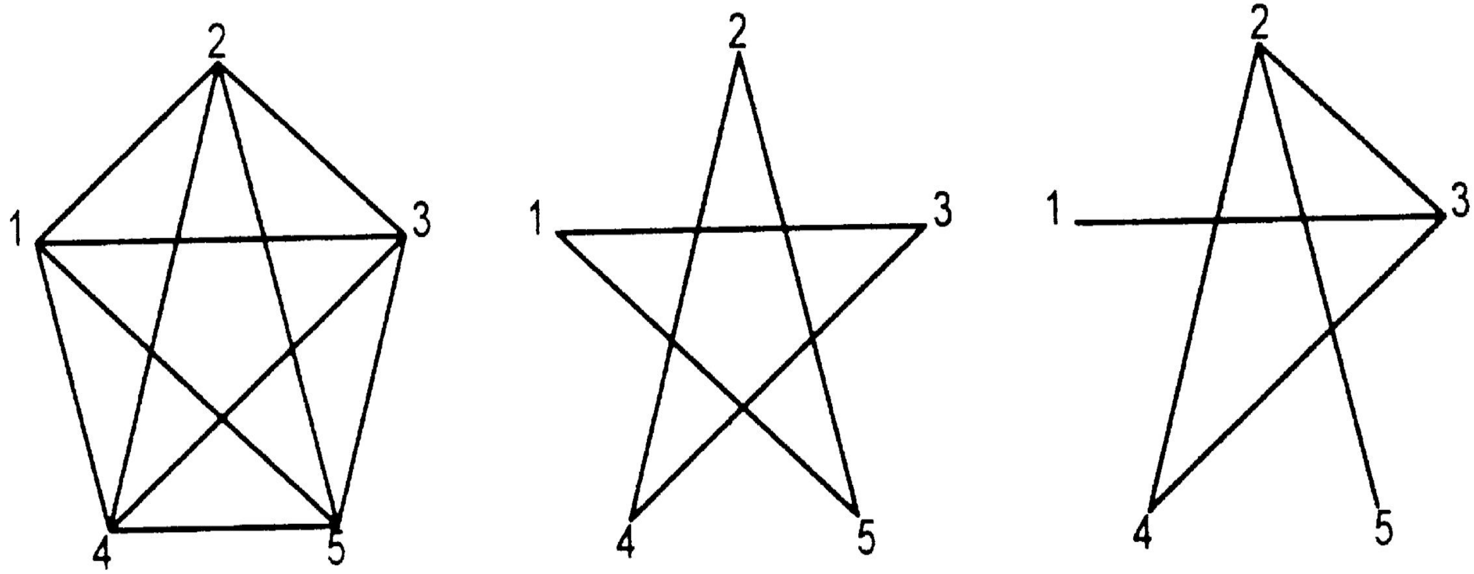
  Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Понятие подграфа

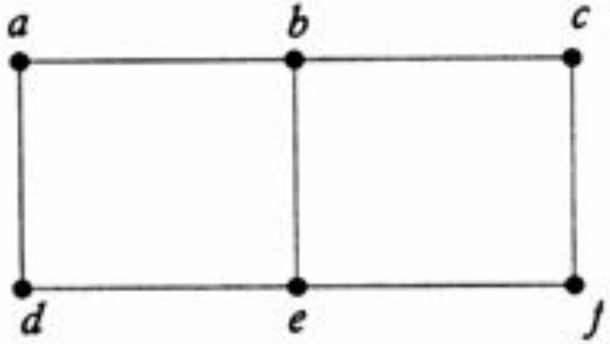
- Граф G`(V`,E`) называется ***подграфом*** графа G(V,E), если V` $\subseteq$ V и E` $\subseteq$ E.

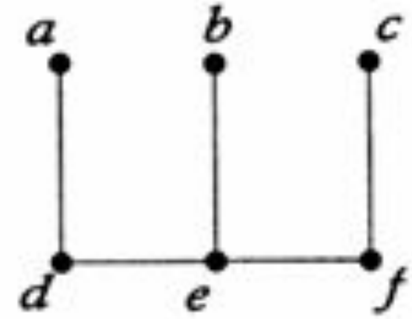
- Таким образом каждая вершина в G` является вершиной в G, и каждое в G` является ребром в G.

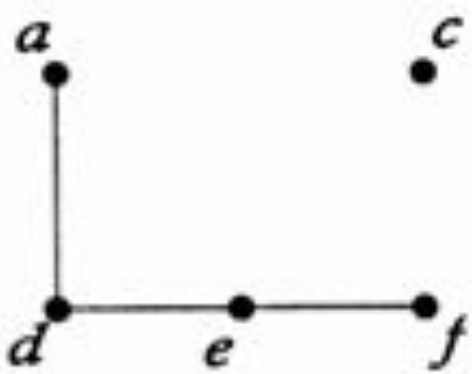
Примеры подграфов

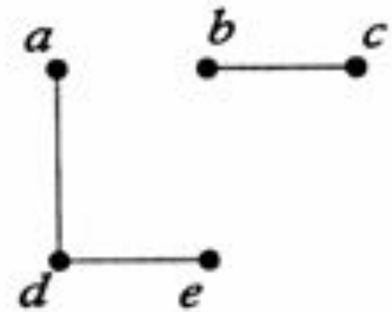


Примеры









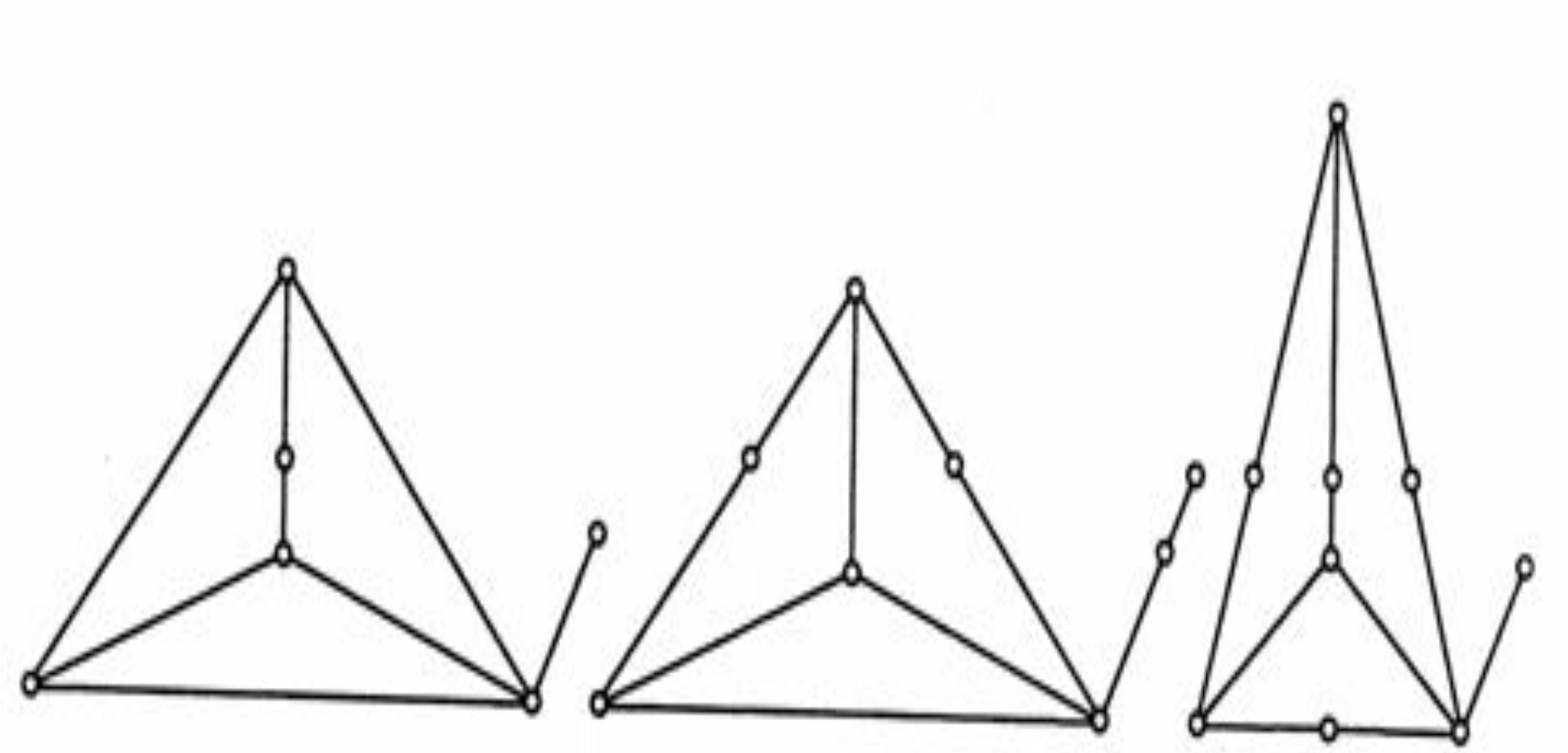
Понятие гомеоморфности графов

- Два графа называются ***гомеоморфными*** или тождественными с точность до вершины степени 2, если они могут быть получены с одного и того же графа с помощью операции введения вершины в ребро степени 2.

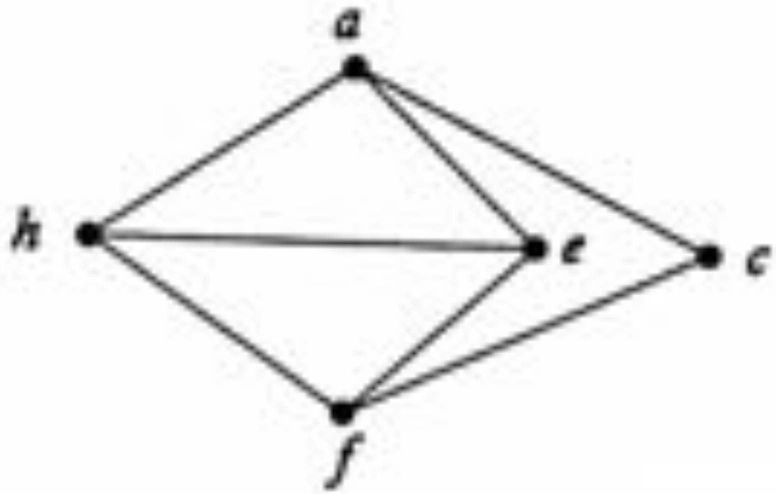
Операция введения вершины в ребро

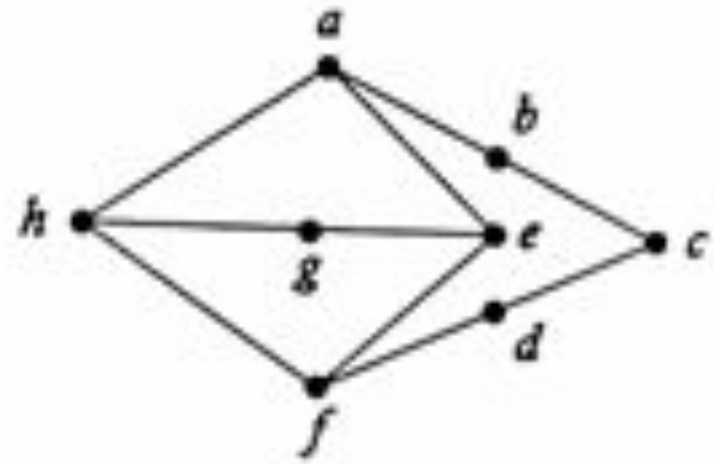
- Добавлением вершины w в ребро (u,v) называется операция, в результате которой получаем два ребра (u,w) и (w,v), а ребро (u,v) удаляется из графа G.

Примеры



Примеры



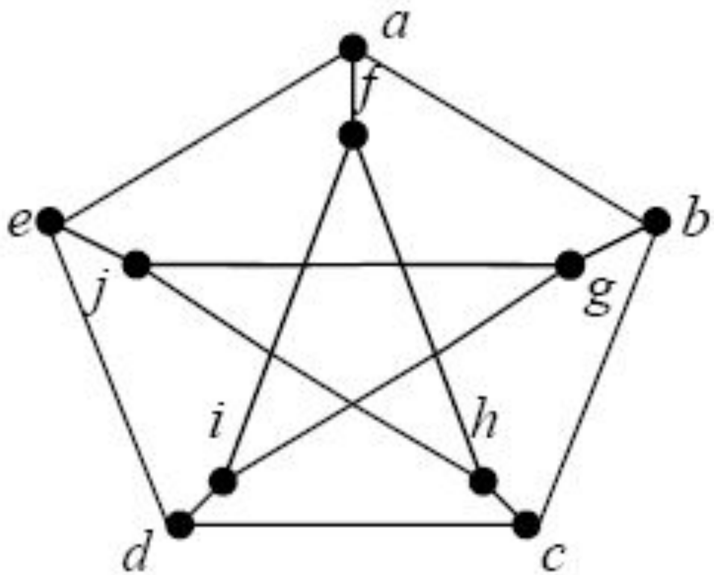


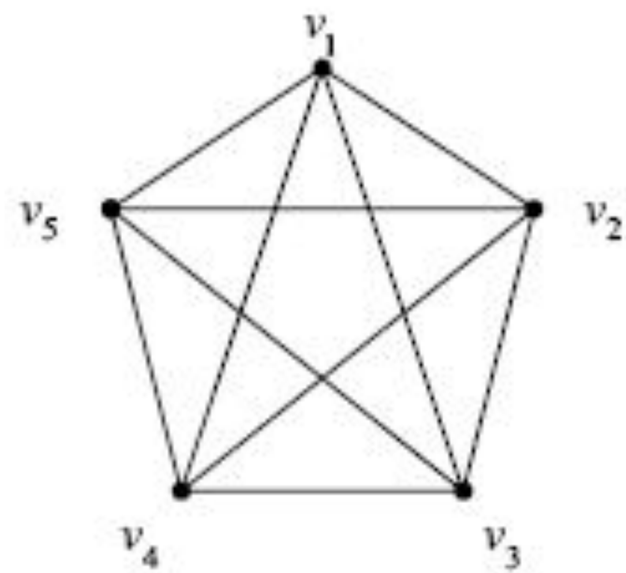
Эквивалентная форма критерия планарности

- Теорема.

Граф планарен тогда и только тогда, когда в нем нет подграфов, стягиваемых к графам K_5 или $K_{3,3}$.

Примеры





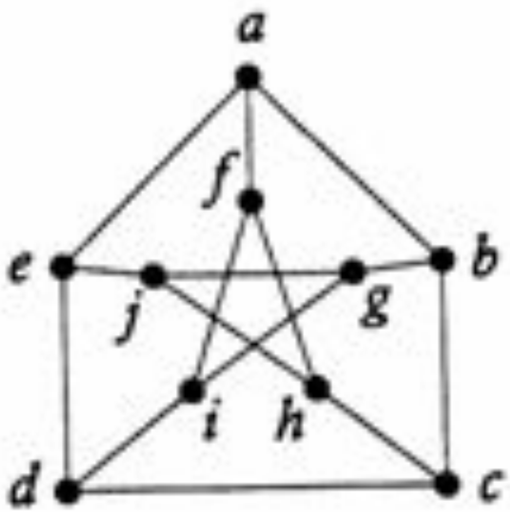
- **Теорема.**

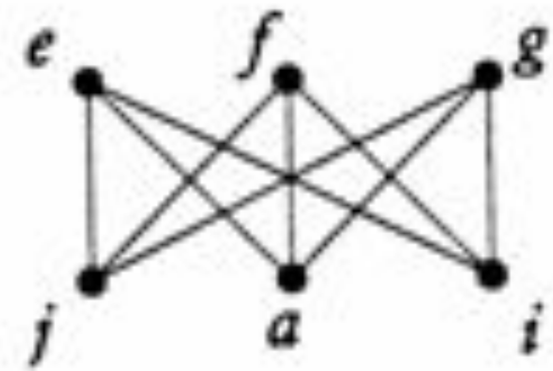
Если два связных графа гомеоморфны, то они либо оба планарны, либо оба непланарны.

- **Теорема.**

  Произвольный граф, гомеоморфный графу $K_{3,3}$ или K_5,не является планарным.

- Граф Петерсена не является планарным, т.к. содержит подграф гомеоморфный $K_{3,3}$.





Мера непланарности

- Для непланарных графов вводятся характеристики, представляющие ту или иную меру непланарности.

- Если граф непланарен, то для его геометрической реализации удаляются отдельные ребра(их переносят на другую плоскость).

Мера непланарности

- Наименьшее число ребер, удаление которых приводит к планарному графу, называется ***числом планарности*** или искаженностью sk(G) графа G.
- Для числа планарности полного графа справедлива следующая формула:

$$sk\ (G) = C_n^{\,2} – 3n + 6,\ n \geq 3.$$