

Способы нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного натуральных чисел

Лекция №9

2 курс

Способы нахождения
наибольшего общего делителя
двух или нескольких
натуральных чисел

- 1. Способ, основанный на каноническом представлении натурального числа.
- 2. Алгоритм Евклида.

- Нахождение наибольшего общего делителя через каноническое разложении чисел
- 1. Представить каждое число в каноническом виде.
- 2. Выбрать общие простые множители.
- 3. Составить произведение общих простых множителей.
- 4. Значение этого произведения равно наибольшему общему делителю.

- Например:
- Найти D (448;656)
- Представим каждое число в каноническом виде.

• 448	2		2
224	2	$448 = 2^6 \cdot 7$	2
112	2		2
56	2	$656 = 2^4 \cdot 41$	2
28	2		2
14	2		41
7	7		1
1			

- Замечание:
- Если натуральные числа a и b представлены в каноническом виде, то каждый множитель в состав НОД (a,b) входит с наименьшим показателем.

$$448 = 2^6 \cdot 7$$

$$656 = 2^4 \cdot 41$$

Выберем общие множители и найдем их произведение.

$$D(448;656) = 2^4 = 16$$

2) Древнегреческим математикам
был известен факт:

- Наибольший общий делитель двух натуральных чисел a и b равен последнему, не равному нулю, остатку от деления числа a на b (если $a > b$) или b на a (если $b > a$).

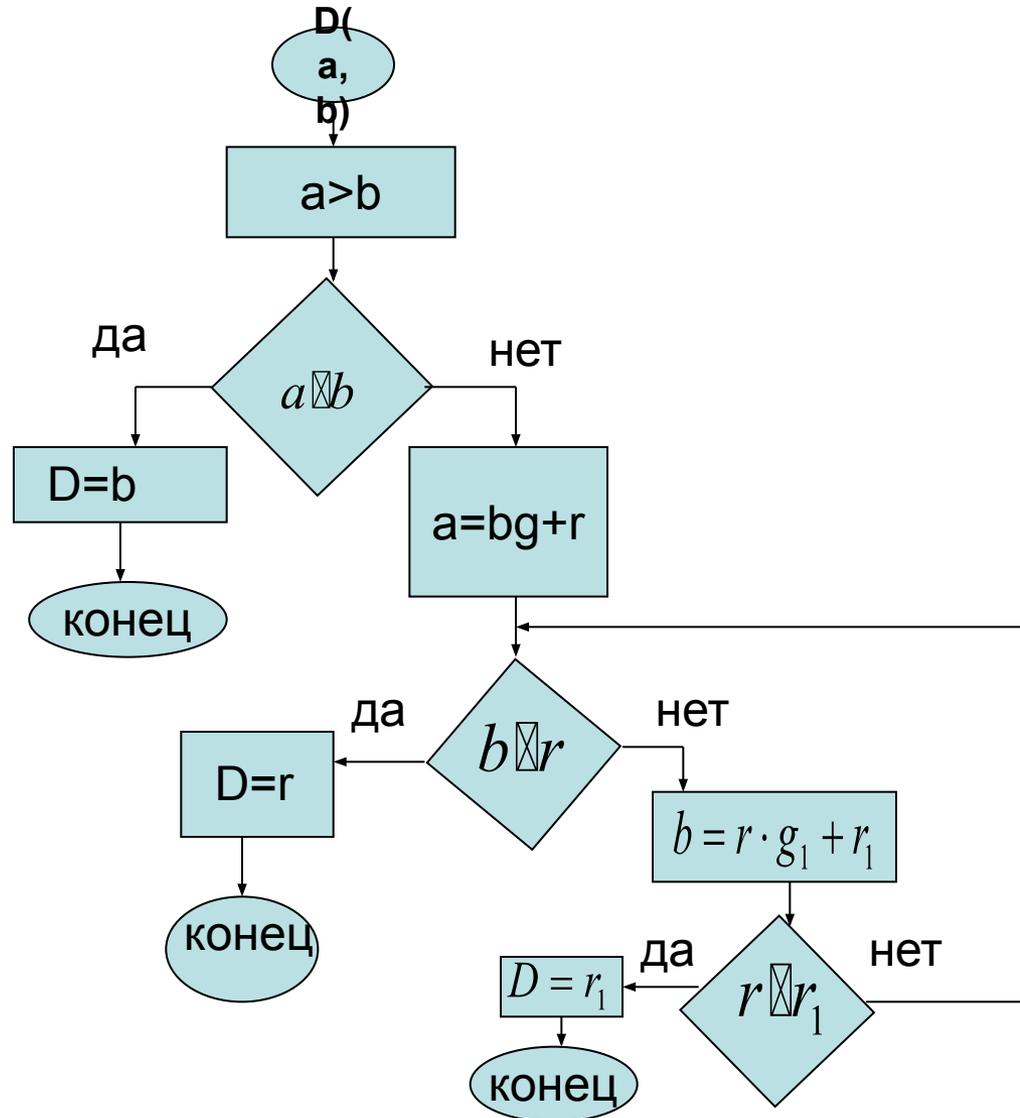
- Это утверждение основано на трех умозаключениях
- 1. Если a делится на b , то $D(a,b)=b$.
- 2. Если $a=bg+r$, где a,b,r отличны от 0, то множество делителей a и b совпадает с множеством общих делителей b и r .
- 3. Если $a=bg+r$, где a,b,r отличны от 0, то $D(a,b)=D(b,r)$.

- На основе этого утверждения Евклид сформулировал алгоритм вычисления наибольшего общего делителя двух натуральных чисел.

Алгоритм Евклида

- Пусть $a > b$
- 1. Если a делится на b , то $D(a;b)=b$.
- Если при делении a на b , получается остаток r , то $D(a;b)=D(b;r)=r$, если b кратно r .
- Если при делении b на r получается остаток r_1 , то, $D(a,b)=D(b,r)=D(r;r_1)$

Алгоритм Евклида



Например:

- Найти $D(448;656)$
- Разделим 656 на 448 с остатком.

$$\begin{array}{r} 656 \overline{) 448} \\ \underline{448} \\ 208 \\ \underline{448} \\ 208 \\ \underline{192} \\ 32 \\ \underline{32} \\ 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{l} 656 = 448 \cdot 1 + \underline{208} \\ 448 = 208 \cdot 2 + \underline{32} \\ 208 = 32 \cdot 6 + \underline{16} \\ 32 = 16 \cdot 2 + 0 \end{array}$$

Значит, $D(448;656) = 16$

Задача: Найти НОД (120,540, 418)

- $\text{НОД}(a,b,c)=\text{НОД}(D(a,b),c)$

Значит: 1. Найдем $\text{НОД}(120,540)$

- $\text{НОД}(120,540)=60.$

- 2. Найдем $\text{НОД}(60,418)$

- $\text{НОД}(60,418)=2.$

Способы нахождения
наименьшего общего кратного
двух или нескольких
натуральных чисел

- 1. Способ, основанный на каноническом представлении натурального числа.

2. Способ, основанный на взаимосвязи между НОД(a, b) и НОК(a, b)

Нахождение наименьшего общего кратного через каноническое разложение чисел

- 1. Представить каждое число в каноническом виде.
- 2. Выбрать все простые множители.
- 3. Составить произведение всех простых множителей.
- 4. Значение этого произведения равно наименьшему общему кратному.

- Например:
- Найти $K(448;656)$
- Представим каждое число в каноническом виде.

• 448	2	$448 = 2^6 \cdot 7$	656	2
224	2		328	2
112	2		164	2
56	2	$656 = 2^4 \cdot 41$	82	2
28	2		41	41
14	2		1	
7	7			
1				

- Замечание:
- Если натуральные числа a и b представлены в каноническом виде, то каждый множитель в состав НОК (a,b) входит с наибольшим показателем.

$$448 = 2^6 \cdot 7$$

$$656 = 2^4 \cdot 41$$

Выберем все множители и найдем их произведение.

$$K(448;656) = 2^6 \cdot 7 \cdot 41 = 18368$$

2) Способ образования НОК натуральных чисел

- $a \cdot b = D(a, b) \cdot K(a, b)$

- $K(a, b) = \frac{a \cdot b}{D(a, b)}$

Например:

- Найти $K(448;656)$

$$K(a,b) = \frac{656 \cdot 448}{16} = \frac{164 \cdot 112}{1} = 18368$$

- Задача: найдите НОК (12,48,54).
- Решение:

Так как 48 кратно 12, то $\text{НОК}(12,48,54) = \text{НОК}(48,54)$; $\text{НОД}(48,54) = 6$

$$\text{НОК}(48,54) = \frac{48 \cdot 54}{6} = 8 \cdot 54 = 432$$

Спасибо за внимание