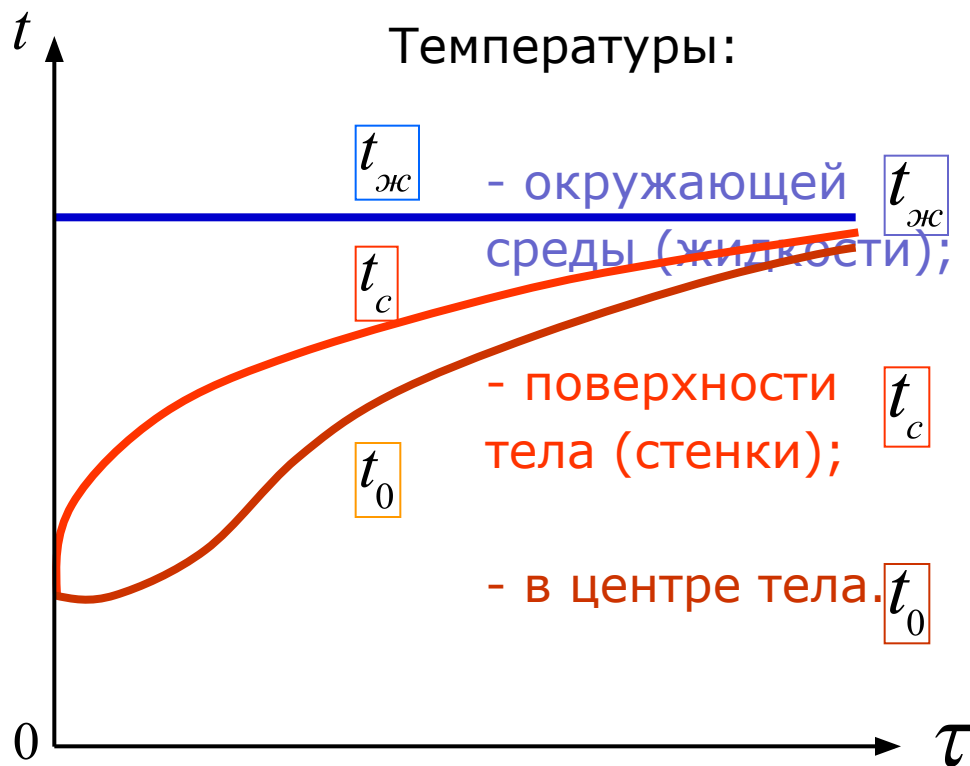


Проблемы энерго- и ресурсосбережения

Охлаждение бесконечных
тел

Нестационарная теплопроводность



Дифференциальное уравнение теплопроводности

Нестационарная теплопроводность имеет место при нагревании и охлаждении заготовок, пуске и отключении теплоэнергетических установок, обжиге кирпича, вулканизации резины. На слайде показан нагрев твердого тела в среде с температурой $t_{\text{ж}} = \text{Const}$

Процесс описывается дифференциальным уравнением теплопроводности без внутренних источников теплоты $q_v = 0$.

Условия однозначности:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right)$$

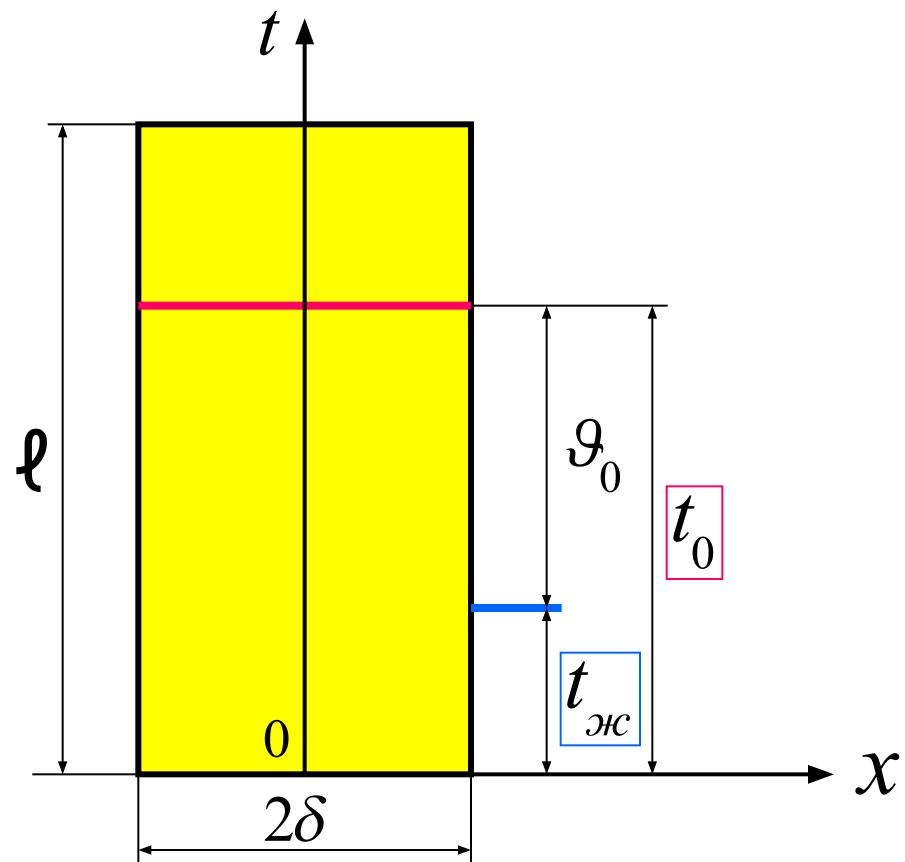
- геометрические;
- физические;
- начальные: при $\tau = 0 \rightarrow t = t_0 = f(x, y, z);$
- граничные условия III рода:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n=0} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_{n=0} - t_{\text{ж}}).$$

Решение заключается в нахождении функции:

$$t = f(x, y, z, \tau, \alpha, \lambda, a, t_{\text{ж}}, t_{\text{н}}, \ell).$$

Охлаждение пластины



Начальные и граничные условия

Рассматриваем охлаждение (нагревание) пластины при:

$$\alpha = \text{Const}; t_{\text{ж}} = \text{Const}; \quad \tau = 0 \rightarrow \text{Const}.$$

Подставляем избыточную температуру пластины $\vartheta = t - t_{\text{ж}}$ в дифференциальное уравнение (1) и граничные условия.

Для бесконечной пластины $l \gg 2\delta$ $(\partial t / \partial y) = (\partial t / \partial z) = 0$

Тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}.$$

Начальные условия: при

$$\tau = 0 \rightarrow \vartheta = F(x)$$

При $\alpha = \text{Const}$ симметричная задача, тогда

граничные условия III рода:

$$\begin{aligned} \text{При } x=0 &\rightarrow \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = 0; \\ x=\delta &\rightarrow \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta_{x=\delta}. \end{aligned}$$

Решение

Решение дифференциального уравнения (2) ищем в виде произведения двух функций, из которых одна является только функцией времени τ , другая – только функцией x .

$$\mathcal{Y} = f(\tau, x) = \varphi(\tau)\psi(x). \quad (5)$$

Подставляем

(5) в (2):

$$\frac{\partial \varphi(\tau)}{\partial \tau} \psi(x) = a \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \varphi(\tau) \Rightarrow$$

$$\varphi'(\tau)\psi(x) = a\psi''(x)\varphi(\tau) \Rightarrow \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = a \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}. \quad (6)$$

Решение

Так как левая часть уравнения (6) является только функцией τ , а правая – только x , то равенство (6) имеет место при любых их значениях. Тогда левая и правая части этого уравнения равны **константе**. Пусть это будет $-k^2$.

$$\frac{1}{a} \frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = -k^2,$$

$$\frac{\varphi'(\tau)}{\varphi(\tau)} + ak^2 = 0; \tag{7}$$

$$\psi''(x) + k^2\psi(x) = 0. \tag{8}$$

Решение

Решим (7) $\frac{d\varphi}{d\tau} + a\kappa^2\varphi = 0;$

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -a\kappa^2 d\tau \Rightarrow \int \frac{d\varphi}{\varphi} = -a\kappa^2 \int d\tau \Rightarrow$$

$$\ln \varphi = -a\kappa^2 \tau + C \Rightarrow \varphi = e^{-a\kappa^2 \tau + C};$$

$$\varphi = C_1 e^{\kappa a \tau^2}$$

Решение

Решим (8)

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \kappa^2\psi(x) = 0;$$

$$\psi(x) = C_2 \cos(\kappa x) + C_3 \sin(\kappa x)$$

Решение

Общее решение:

$$\vartheta(x, \tau) = C_1 e^{\kappa a \tau^2} \cdot \left[C_2 \cos(\kappa x) \sin C_3 \kappa x \right] \quad (9)$$

Решение

Решение (9) подчиним граничному условию (3):

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0} = C_1 e^{-a\kappa^2 \tau} \left[-C_2 \kappa \sin(\kappa x) - C_3 \kappa \cos(\kappa x) \right] \Big|_{x=0} = 0$$

$$C_2 \kappa \sin(\kappa x) \Big|_{x=0} = C_3 \kappa \cos(\kappa x) \Big|_{x=0} \Rightarrow C_3 = 0$$

$$\boxed{\vartheta(x, \tau) = A e^{-a\kappa^2 \tau} \cos(\kappa x)} \quad (10)$$

Решение

Подчиним решение (10) граничному условию (4):

$$-\kappa A e^{-\alpha \kappa^2 \tau} \sin(\kappa \delta) = -\frac{\alpha}{\lambda} A e^{-\alpha \kappa^2 \tau} \cos(\kappa \delta); \quad (11)$$

$$\kappa \sin(\kappa \delta) = \frac{\alpha}{\lambda} \cos(\kappa \delta);$$

$$\frac{\kappa \lambda}{\alpha} = \operatorname{ctg}(\kappa \delta).$$

Решение

Обозначим $\mu_n = \kappa \delta$, тогда $\kappa = \frac{\mu_n}{\delta}$.

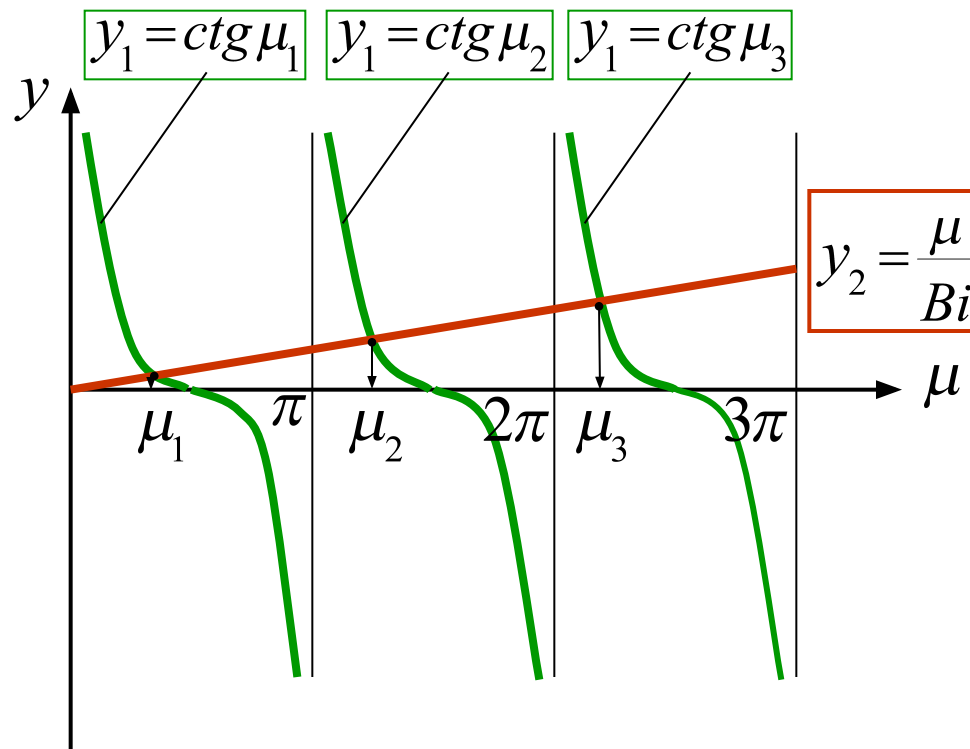
Уравнение (11) примет вид:

$$\frac{\mu_n \lambda}{\alpha \delta} = \operatorname{ctg} \mu_n$$

$$\boxed{\frac{\mu_n}{\operatorname{Bi}} = \operatorname{ctg} \mu_n}, \quad (12)$$

где $\operatorname{Bi} = \frac{\alpha \delta}{\lambda}$

Графическое решение уравнения охлаждения (нагрева) пластины



Результаты графического решения

При $Bi \rightarrow \infty: y_2 = \frac{\mu}{Bi} \rightarrow 0$, то есть функция совпадает с осью абсцисс, то есть: $\mu_1 = \frac{\pi}{2}; \mu_2 = \frac{3}{2}\pi; \mu_3 = \frac{5}{2}\pi; \dots \mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$.

При $Bi \rightarrow 0: y_2 = \frac{\mu}{Bi} \rightarrow \infty$, то есть функция совпадает с осью ординат, при этом: $\mu_1 = 0; \mu_2 = \pi; \mu_3 = 2\pi; \dots \mu_n = (n-1)\pi$.

Каждому μ_i соответствует свое частное распределение избыточных температур ϑ_i , которое является решением дифференциального уравнения (2).

Решение можно представить в виде суммы ряда $\vartheta = \sum_{i=1}^n \vartheta_i$, где достаточно иметь $n = 4$ ($\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$) значения которых при $Bi = 0 - \infty$ приведены в таблице на следующем слайде.

Значения μ_i для пластины

Bi	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
∞	1,571	4,712	7,854	11.00
2,747	1,169	3,771	6,674	9,701
1,000	0,8603	3,426	6,437	9,529
0,3640	0,5885	3,253	6,341	9,463
0,0000	0,0000	3,142	6,283	9,425

Решение

Таким образом, решение уравнения (10) можно представить как множество решений соответствующее каждому значению μ_n .

$$\vartheta_1(x, \tau) = A_1 e^{-a \frac{\mu_1^2}{\delta^2} \tau} \cos \left(\frac{\mu_1}{\delta} x \right);$$

$$\vartheta_2(x, \tau) = A_2 e^{-a \frac{\mu_2^2}{\delta^2} \tau} \cos \left(\frac{\mu_2}{\delta} x \right);$$

$$\vartheta_n(x, \tau) = A_n e^{-a \frac{\mu_n^2}{\delta^2} \tau} \cos \left(\frac{\mu_n}{\delta} x \right).$$

Решение

Решение уравнения можно представить как сумму частных решений:

$$\vartheta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\mu_n^2 Fo\right) \cos(\mu_n X) \quad (13)$$

где $Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}$ - число Фурье;

$X = \frac{x}{\delta}$ - безразмерная координата

Решение

Коэффициент A_n найдём из начального условия (3):

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\mu_n x)$$

$$A_n = \frac{\mu_n}{\delta(\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n)} \int_{-\delta}^{+\delta} F(x) \cos(\mu_n x) dx \quad (14)$$

(13) и (14) есть искомое решение задачи.

Температура

При $Fo \geq 0,3$ можно ограничиться одним членом ряда,

тогда

$$\vartheta(x, \tau) = A_1 \exp(-\mu_1^2 Fo) \cos(\mu_1 X);$$

$$A_1 = \frac{\mu_1}{\delta(\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1)} \int_{-\delta}^{+\delta} F(x) \cos(\mu_1 X) dx$$

Решение

Пусть $F(x) = \vartheta_0 = \text{const}$, тогда

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \vartheta_0 \cdot \cos\left(n \frac{x}{\delta}\right) dx =$$

$$\vartheta_0 \frac{\delta}{\mu_n} \left[\sin\left(n \frac{\delta}{\delta}\right) - \sin\left(-n \frac{\delta}{\delta}\right) \right] =$$

$$= 2\vartheta_0 \frac{\delta}{\mu_n} \sin n$$

Решение

$$A_n = \frac{\mu_n 2\vartheta_0 \delta \sin \mu_n}{\delta (\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n) \mu_n};$$

$$A_n = \frac{2\vartheta_0 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}.$$

Температура

$$\vartheta(x, \tau) = \frac{\vartheta_0 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \exp(-\mu_1^2 Fo) \cos(\mu_1 X)$$

$$\frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_0} = \theta(x, Fo) = D_1 \exp(-\mu_1^2 Fo) \cos(\mu_1 X),$$

где
$$D_1 = \frac{\sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1}.$$

Температура

В размерном виде:

$$\frac{t - t_{\text{ж}}}{t_0 - t_{\text{ж}}} = D_1 \exp\left(-\cos^2 \frac{\alpha \tau}{\delta^2} \mu\right) \left(1 - X\right)$$

$$t = t_{\text{ж}} + (t_0 - t_{\text{ж}}) D_1 \exp\left(-\cos^2 \frac{\alpha \tau}{\delta^2} \mu\right) \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)$$

Температура

Температура в центре пластины:

$$t(\theta, \tau) = t_{\text{ж}} + (t_0 - t_{\text{ж}}) D_1 \exp\left(-\mu_1^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right)$$

Температура на поверхности пластины:

$$t(\delta, \tau) = t_{\text{ж}} + (t_0 - t_{\text{ж}}) D_1 \exp\left(-\mu_1^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right) \cos \mu_1.$$

Температура

Средняя температура по толщине пластины:

$$\begin{aligned}\overline{t(x, \tau)} &= \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} t(x, \tau) dx = \\ &= \frac{1}{\delta} \left[t_{\text{ж}} \delta + (t_0 - t_{\text{ж}}) D_1 \exp\left(-\mu_1^2 \frac{a}{\delta^2}\right) \frac{1}{\mu_1} \sin \mu_1 \right].\end{aligned}$$

Тепловой поток

Тепловой поток определяется по закону Фурье:

$$q = - \frac{dt}{dx} =$$

$$= (t_{\text{ж}} - t_1) D \exp\left(-\frac{2 \frac{\alpha \tau}{\sin}}{\delta^2}\right) \frac{\mu_1}{\delta} \cdot \left(\frac{x}{\delta}\right)$$

Количество теплоты

Количество теплоты, отданное пластиной в процессе охлаждения, определяется по формуле:

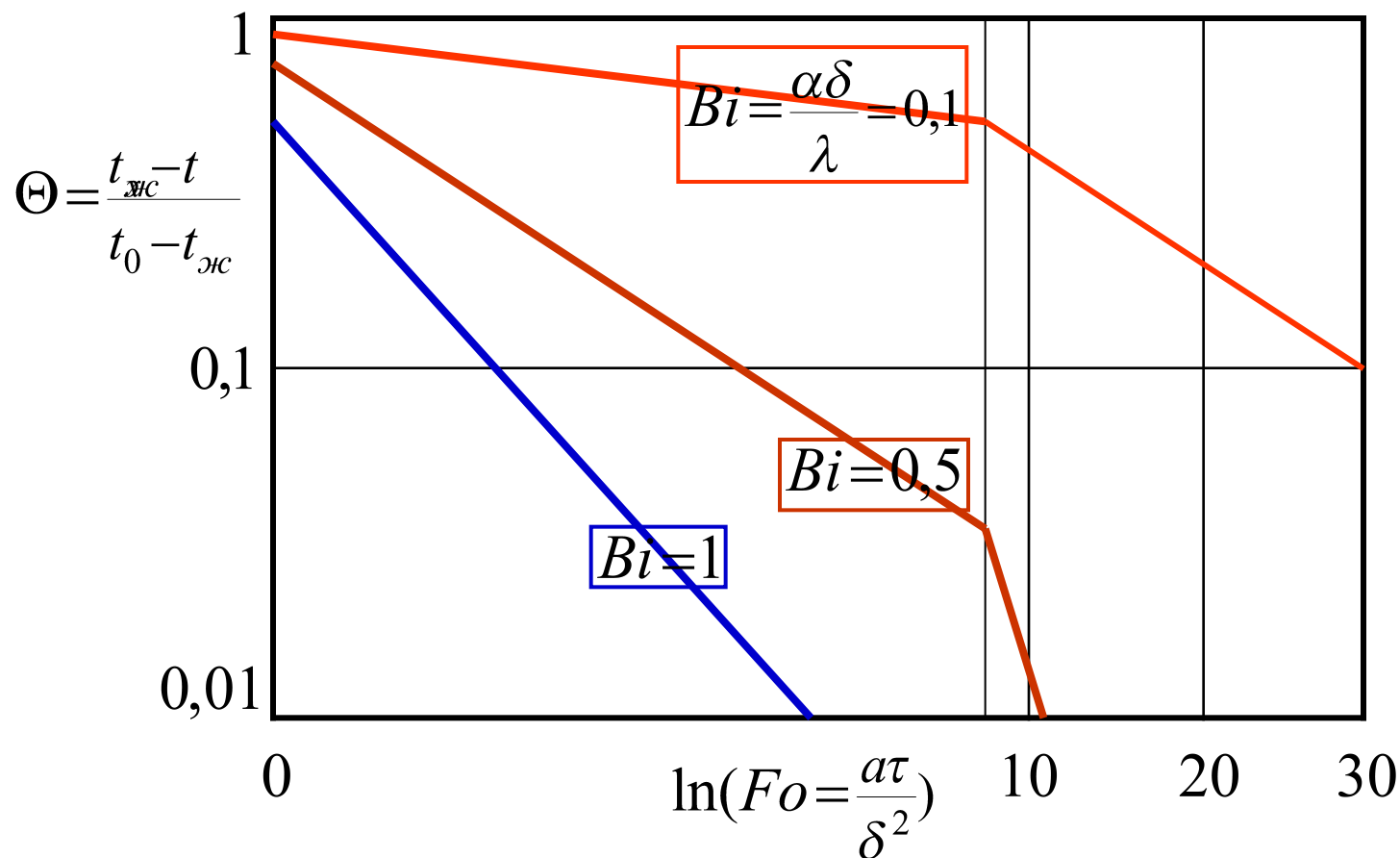
$$Q_{\tau} = \rho \delta \int (t_0 - \bar{t})$$

Полное количество теплоты, отданное пластиной за весь период охлаждения, определяется по формуле:

$$Q_{\text{ж}} = \rho \delta \int (t_0 - t)$$

График логарифмический

$$\Theta = f(Bi, Fo)$$



Внутренняя задача

- Частный случай (А):

$Bi \rightarrow \infty$ (практически $Bi > 100$): Bi – число (критерий) Био:

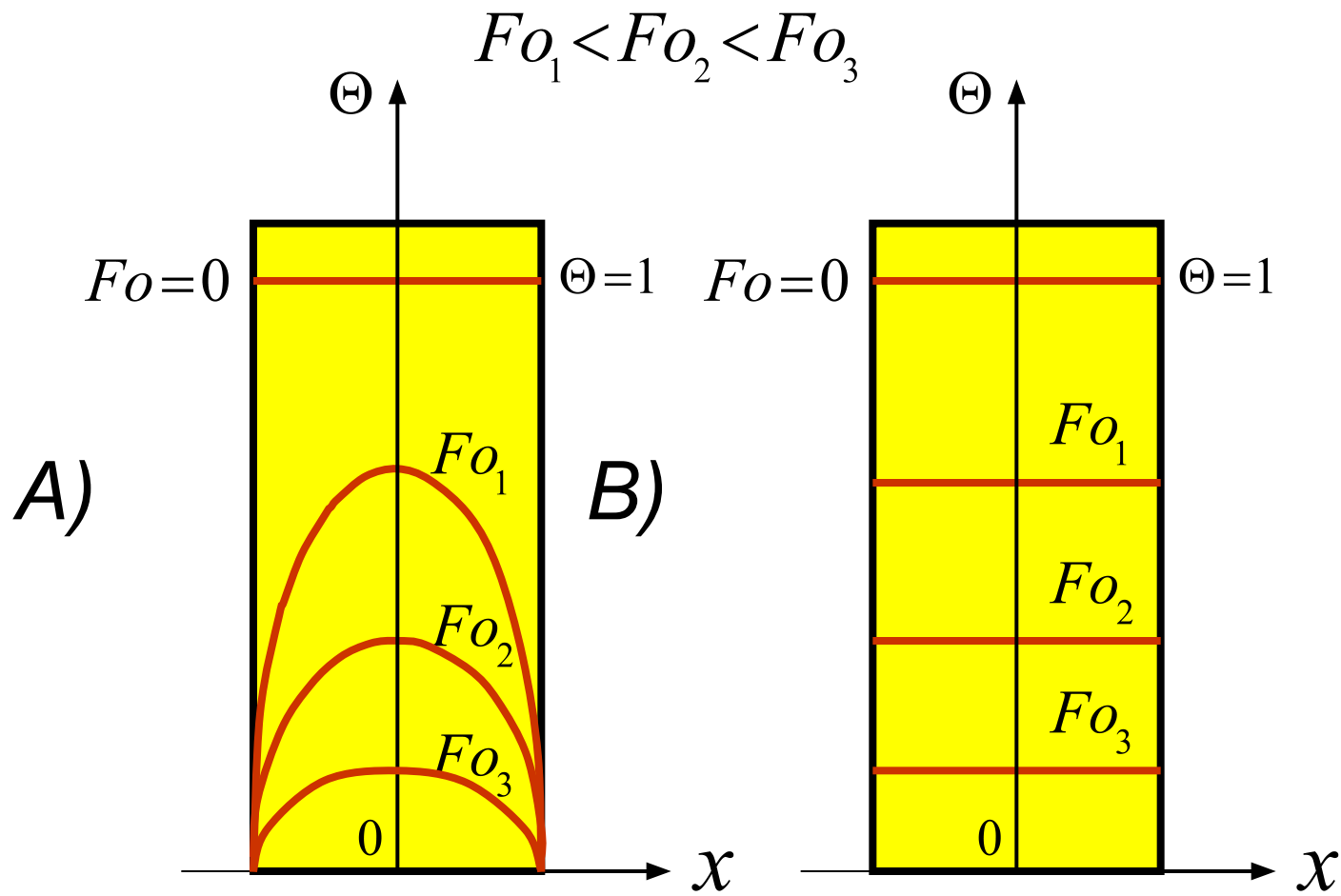
$$Bi = \frac{\delta / \lambda}{1 / \alpha} \rightarrow \infty; \frac{1}{\alpha} \rightarrow 0; \alpha \rightarrow \infty,$$

соотношение конвективной теплоотдачи снаружи и теплопроводности внутри тела.

В данном случае очень интенсивное наружное охлаждение, поэтому температура поверхности пластины, погруженной в жидкость, сразу становится равной температуре жидкости.

Распределение температур в пластине зависит от ее теплопроводности λ и геометрических размеров δ , то есть от условий внутри пластины (внутренняя задача).

- А) Внутренняя задача $Bi \rightarrow \infty$
- В) Внешняя задача $Bi \rightarrow 0$



Внешняя задача

- Частный случай (Bi):

$Bi \rightarrow 0$ (практически $Bi < 0,1$),

$$Bi = \left(\frac{\delta / \lambda}{1 / \alpha} \right) \rightarrow 0; \alpha \rightarrow 0;$$

теплопроводность (λ)
значительная.

Из-за высокого коэффициента теплопроводности пластины температуры в ней быстро выравниваются. Охлаждение слабое и все зависит от внешнего коэффициента конвективной теплоотдачи α (внешняя задача).

Обозначения: δ - половина толщины пластины, м;
 λ - теплопроводность пластины, Вт/(мК);

α - коэффициент конвективной теплоотдачи, Вт/(м²К).

Внешняя задача

- Частный случай (Bi):

$Bi \rightarrow 0$ (практически $Bi < 0,1$),

$$Bi = \left(\frac{\delta / \lambda}{1 / \alpha} \right) \rightarrow 0; \alpha \rightarrow 0;$$

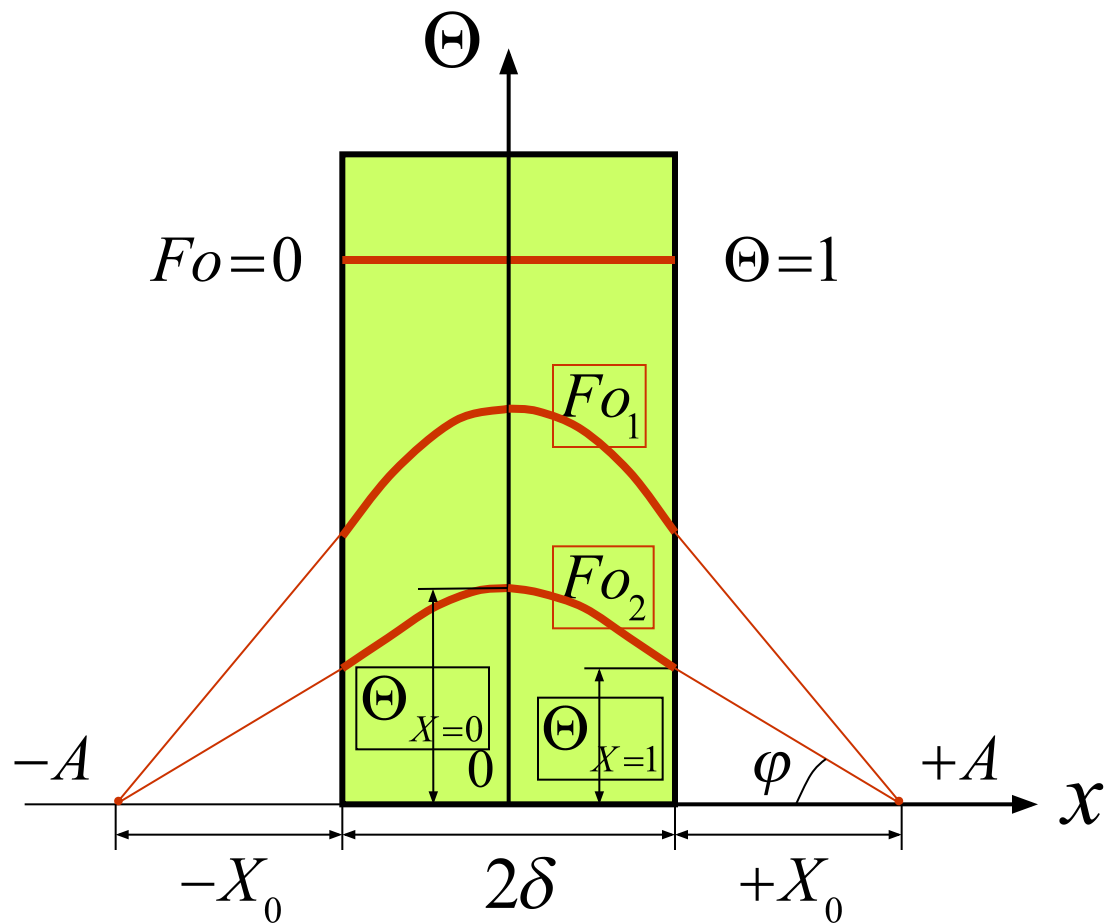
теплопроводность (λ)
значительная.

Из-за высокого коэффициента теплопроводности пластины температуры в ней быстро выравниваются. Охлаждение слабое и все зависит от внешнего коэффициента конвективной теплоотдачи α (внешняя задача).

Обозначения: δ - половина толщины пластины, м;
 λ - теплопроводность пластины, Вт/(мК);

α - коэффициент конвективной теплоотдачи, Вт/(м²К).

Температурное поле в пластине



Охлаждение бесконечного цилиндра

Пусть внутри источник теплоты отсутствует: $q_v = 0$

Пусть

$$\frac{\partial t}{\partial Z} = \frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0$$

Тогда дифференциальное уравнение температурного поля примет вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right) \quad (1)$$

Охлаждение бесконечного цилиндра

Начальные условия:

$$t(r, 0) = f(r); \quad (2)$$

Граничные условия

$$\frac{\partial t(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial t(r_0, \tau)}{\partial r} = -\frac{\alpha}{\lambda} [t(r_0, \tau) - t_{\text{ж}}]; \quad (4)$$

Охлаждение бесконечного цилиндра

Избыточная температура: $\vartheta(r, \tau) = t(r, \tau) - t_{жс}$;
Тогда (1)-(4) примет вид:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right); \quad (5)$$

$$\vartheta(r, 0) = f(r) - t_{жс} = F(r); \quad (6)$$

$$\frac{\partial \vartheta(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \vartheta(r_0, \tau)}{\partial r} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta(r_0, \tau); \quad (8)$$

Охлаждение бесконечного цилиндра

Решение ищем методом Фурье разделенных переменных: $\vartheta(r, \tau) = \varphi(r)\psi(\tau)$;

Тогда уравнение (5) примет вид

$$\varphi(r)\psi'(\tau) = a \left[\psi(\tau)\varphi''(r) + \frac{1}{r}\psi(\tau)\varphi'(r) \right];$$

$$\frac{1}{a} \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} = \frac{\varphi''(r)}{\varphi(r)} + \frac{1}{r} \frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} = \text{const} = -k^2; \quad (9)$$

Охлаждение бесконечного цилиндра

Из (9) получим 2 уравнения:

$$\psi'(\tau) + ak^2\psi(\tau) = 0; \quad (10)$$

$$\varphi''(r) + \frac{1}{r}\varphi'(r) + k^2\varphi(r) = 0; \quad (11)$$

Охлаждение бесконечного цилиндра

решение уравнения (10):

$$\psi(\tau) = C_1 \exp(-ak^2\tau);$$

решение уравнения (11):

$$\varphi(r) = C_2 J_0(kr) + C_3 Y_0(kr);$$

Охлаждение бесконечного цилиндра

$J_0(kr)$ - функция Бесселя 1-го рода 0-порядка;

$Y_0(kr)$ - функция Бесселя 2-го рода 0-порядка;

При $r = 0 \Rightarrow Y_0(kr) \rightarrow \infty \Rightarrow C_3 = 0$

Охлаждение бесконечного цилиндра

Тогда решение принимает вид:

$$\vartheta(r, \tau) = C J_0(kr) \exp(-ak^2 \tau);$$

$$\mu = kr_0 \Rightarrow k = \frac{\mu}{r_0};$$

$$\vartheta(r, \tau) = C J_0\left(k \frac{r}{r_0}\right) \exp\left(-a \frac{\mu^2}{r_0^2} \tau\right); \quad (12)$$

Температура

Подчинив решение (12) граничным условиям (8) получим характеристическое уравнение для нахождения μ :

$$\frac{\mu_n}{Bi} = \frac{J_0(\mu_n)}{J_1(\mu_n)};$$

Решение уравнения можно представить как сумму частных решений:

$$\vartheta(r_{(3)}, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \exp\left(-a \frac{\mu^2}{r_0^2} \tau\right)$$

Температура

Для нахождения C_n используем начальные условия (6)

$$F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\mu_n R);$$

$$C_n = \frac{\int_0^{r_0} r J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) F(r) dr}{\int_0^{r_0} r J_0^2\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right) dr} \quad (14)$$

(13) и (14) есть искомое решение задачи.

Температура

При начальном равномерном распределении температуры:

$$\theta(r, \tau) = \frac{\vartheta(r, \tau)}{\vartheta_0} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} J_0\left(\mu \frac{r}{r_0}\right) \exp\left(-a \frac{\mu^2}{r_0^2} \tau\right)$$

ОХЛАЖДЕНИЕ ШАРА

Пусть внутренние источники теплоты отсутствуют, то есть $q_v = 0$
Пусть температура изменяется только в радиальном направлении, тогда:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right)$$

ОХЛАЖДЕНИЕ ШАРА

Начальные условия:

$$t(r, 0) = f(r);$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial t(0, \tau)}{\partial r} = 0;$$

$$\frac{\partial t(r_0, \tau)}{\partial r} = -\frac{\alpha}{\lambda} [t(r_0, \tau) - t_{\text{жс}}];$$

ОХЛАЖДЕНИЕ ШАРА

Избыточная температура: $\vartheta(r, \tau) = t(r, \tau) - t_{\text{жс}} \Rightarrow$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right);$$

$$F(r, 0) = f(r) - t_{\text{жс}};$$

$$\frac{\partial \vartheta(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial \vartheta(r_0, \tau)}{\partial r} = -\frac{\alpha}{\lambda} \vartheta(r_0, \tau)$$

Температура

Решение уравнения имеет вид:

$$\frac{\vartheta(r, \tau)}{\vartheta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{r_0}{r} \sin \frac{\mu_n r}{r_0} \exp \left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{r_0^2} \right),$$

где B_n - коэффициент, зависящий от начальных условий.

Характеристическое уравнение:

$$-\frac{\mu_n}{Bi - 1} = \operatorname{tg} \mu_n$$

Температура

Или:

$$\theta(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{1}{R} \sin(\mu_n R) \exp(-\mu_n^2 Fo)$$

Вопросы к экзамену

1. Охлаждение (нагревание) неограниченной пластины.
2. Охлаждение (нагревание) бесконечно длинного цилиндра. Охлаждение шара.