

ТЕОРИЯ КРИВЫХ

Плоские кривые

Плоские кривые

Пусть кривая целиком лежит в плоскости xOy .

Кривая задана: $\vec{r} = \vec{r}(t)$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = 0 \end{cases} \quad - \text{ параметрическое задание кривой}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (28)$$

(28) – параметрическое задание плоской кривой.

Из (28) исключим t :

$$F(x, y) = 0 \quad (29)$$

(29) – неявное уравнение плоской кривой.

Плоские кривые

Из (29) выразим y :

$$y = f(x) \quad (30)$$

(30) – задание явной функции в виде графика.

$F(x(t), y(t)) = 0$. Вычислим $\frac{dF}{dt}$ (она равна 0):

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0.$$

Обозначим: $\frac{\partial F}{\partial x} \equiv F_x$ $\frac{\partial F}{\partial y} \equiv F_y$

$$F_x x' + F_y y' = 0 \quad (31)$$

Особые точки плоской кривой

Определение: точка $M_0(x_0, y_0)$ называется **особой точкой плоской кривой**, заданной неявным уравнением, если в ней выполняются равенства:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases} \quad (32)$$

Если $M(x, y)$ - не особая точка, то из **(31)**:

$k = \frac{y}{x} = -\frac{F_x}{F_y}$ - угловой коэффициент касательной.

В особой точке k по формуле (31) не находится.

Проблема: нахождения углового коэффициента в особой точке.

Классификация особых точек плоской кривой

Обозначим $F_x(x_0, y_0) \equiv F_x^0$,
 $F_y(x_0, y_0) \equiv F_y^0$,

и подставим в уравнение (31):

$$F_x(x(t), y(t)) \cdot \dot{x} + F_y(x(t), y(t)) \cdot \dot{y} = 0 \quad (33)$$

продифференцируем по t полученное равенство:

$$F_{xx} \cdot \dot{x}^2 + F_{xy} \cdot \dot{x} \cdot \dot{y} + F_{yx} \cdot \dot{x} \cdot \dot{y} + F_{yy} \cdot \dot{y}^2 + F_x \cdot \ddot{x} + F_y \cdot \ddot{y} = 0 \quad (33')$$

Обозначим

$$F_{xx} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad F_{xy} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad F_{yy} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

причем $F_{xy} = F_{yx}$

Классификация особых точек плоской кривой

Рассмотрим (33) в особой точке:

$$F_x^0 = F_y^0 = 0$$

$$F_{xx}^0 x^2 + 2F_{xy}^0 xy + F_{yy}^0 y^2 = 0 \quad (34)$$

$$k = \frac{y}{x}$$

$$F_{xx}^0 + 2F_{xy}^0 k + F_{yy}^0 k^2 = 0 \quad (34')$$

$$\delta = -\frac{D}{4} = F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^{0^2}:$$

А. $\delta > 0$ ($D < 0$) Уравнение (34') не имеет решений.

В точке нет касательной, следовательно, точка (x_0, y_0) **изолированная**.

Классификация особых точек плоской кривой

Б. $\delta < 0$ ($D > 0$) Уравнение (34') имеет 2 решения.

Имеет 2 касательные, следовательно, через точку (x_0, y_0) проходит 2 ветви кривой. Точка (x_0, y_0) называется **узловой**.

В. $\delta = 0$ ($D = 0$)

1) (x_0, y_0) - изолированная.

Пример:

$$y^2 + x^4 - x^6 = 0$$

$$y = \pm \sqrt{-x^4 + x^6} = \pm x^2 \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\begin{cases} F_x = 4x^3 - 6x^5 = 0 \\ F_y = 2y = 0 \end{cases}$$

$$2x^3(-2 + 3x^2) = 0$$

Классификация особых точек плоской кривой

$$x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \quad y = 0$$

Последние две точки не принадлежат кривой, следовательно, точка $(0;0)$ - особая

$$F(x, y) = y^2 + x^4 - x^6$$

$$F_{xx} = 12x^2 + 30x^4$$

$$F_{xy} = 0$$

$$F_{yy} = 2$$

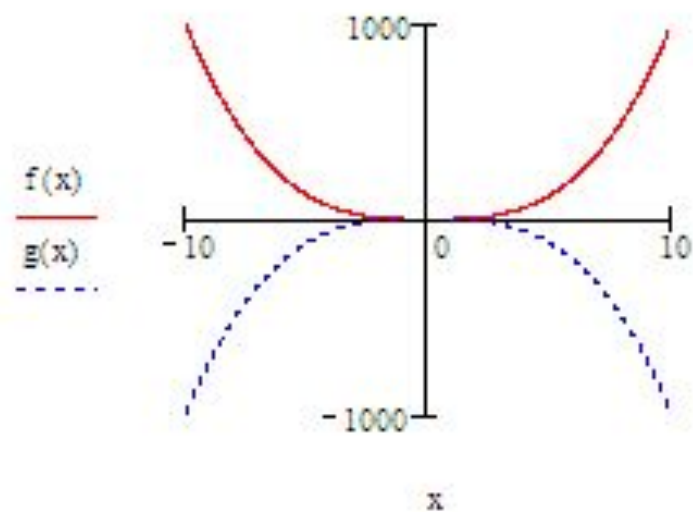
$$F_{xx}^0 = 0 \quad F_{xy}^0 = 0 \quad F_{yy}^0 = 2$$

$$\delta = 0 \cdot 2 - 0^2 = 0$$

Классификация особых точек плоской кривой

$$f(x) := x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 1}$$

$$g(x) := -x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 1}$$

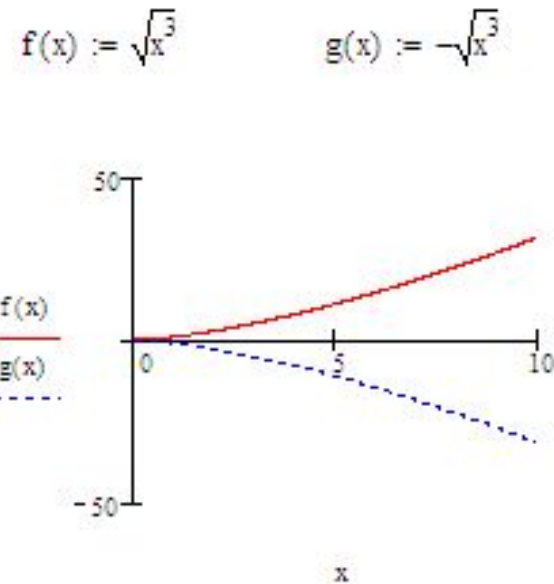


Классификация особых точек плоской кривой

2) Точка возврата 1-го рода.

В особой точке обе ветви кривой имеют общую касательную, но находятся по одну сторону от нормали, и по разные стороны от касательной.

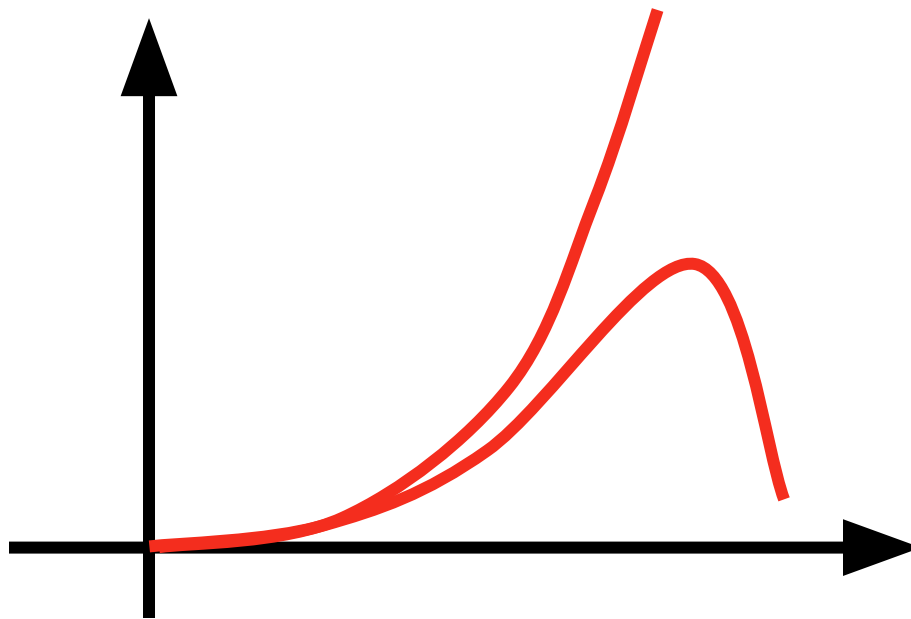
Пример: $y^2 = x^3$
- кубическая парабола



Классификация особых точек плоской кривой

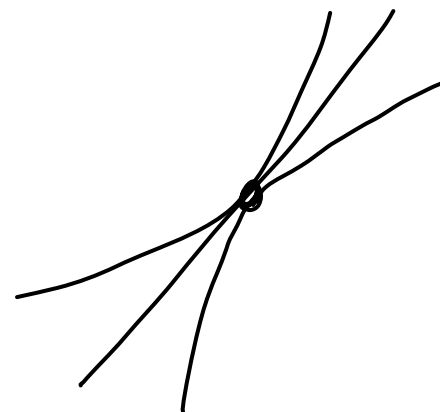
3) Точка возврата 2-го рода.

В ней обе ветви находятся по одну сторону от нормали и по одну сторону от касательной.



Классификация особых точек плоской кривой

4) Точка самоприкосновения



5) $F_{xx}^0 = F_{yy}^0 = F_{xy}^0 = 0.$

Однопараметрическое семейство плоских кривых (ОСПК)

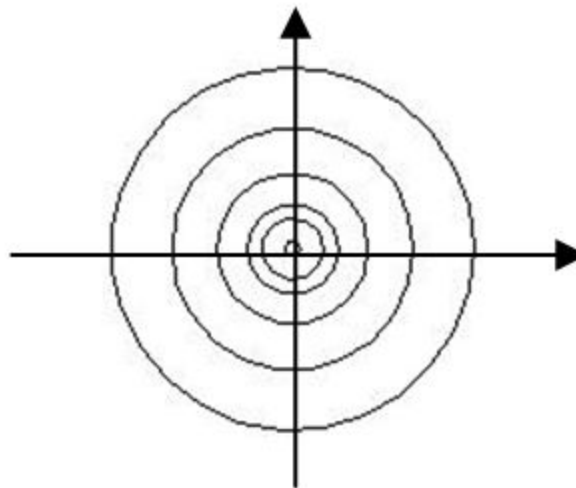
Определение: *однопараметрическим семейством плоских кривых* называется множество кривых на плоскости, удовлетворяющих неявному уравнению:

$$F(x, y, a) = 0 \quad (35)$$

где a – параметр.

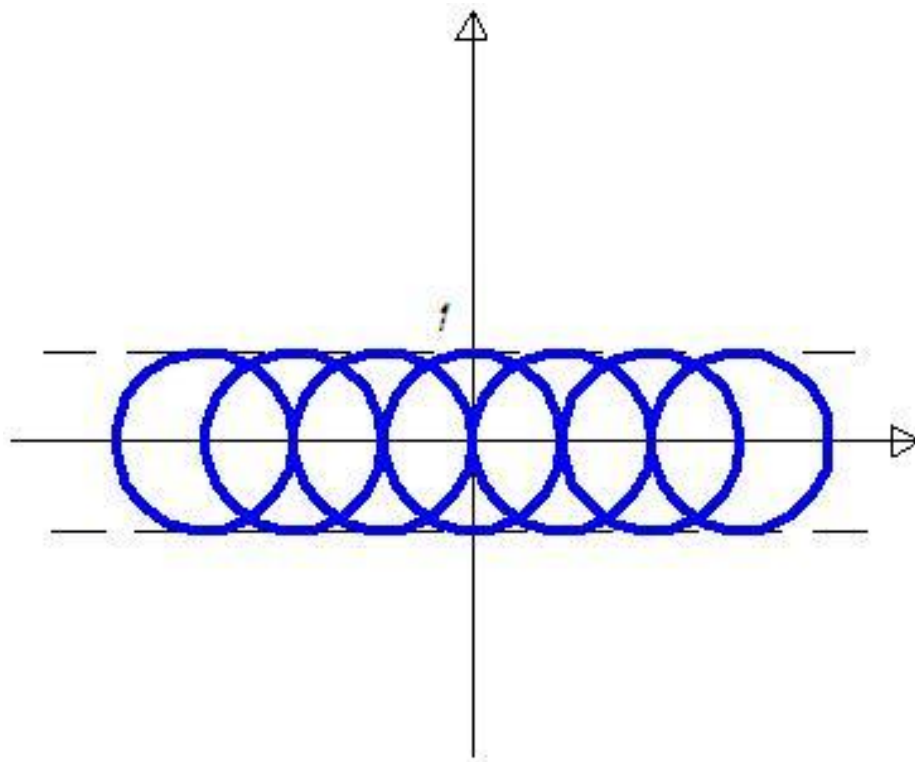
Примеры:

1) $x^2 + y^2 - a^2 = 0$



Однопараметрическое семейство плоских кривых (ОСПК)

2) $(x - a)^2 + y^2 = 1$



Однопараметрическое семейство плоских кривых (ОСПК)

Определение: плоская кривая, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой однопараметрического семейства кривых, называется **огивающей этого семейства**.

Определение: кривая на плоскости, удовлетворяющая системе уравнений:

$$\begin{cases} F(x, y, a) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, a)}{\partial a} = 0 \end{cases} \quad (36)$$

где $F(x, y, a) = 0$ уравнения ОПСК, называется **дискриминантной кривой семейства**.

Однопараметрическое семейство плоских кривых (ОСПК)

Теорема 1.

- 1) Огибающая ОСПК, если она существует, является дискриминантной кривой этого ОСПК,
- 2) Любая дискриминантная кривая ОСПК является огибающей, если она не состоит из особых точек кривых семейства.

Доказательство:

1) Пусть

$$\begin{cases} x = x(a) \\ y = y(a) \end{cases} \quad (37)$$

(37) – огибающая ОСПК с уравнением (35).

Продифференцируем уравнение (35) по параметру a :

Однопараметрическое семейство плоских кривых (ОСПК)

$$F(x(a), y(a), a) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{da} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{da} + \frac{\partial F}{\partial a} = 0 \quad (*)$$

Рассмотрим точку касания некоторой кривой семейства $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

и огибающей, так как кривые касаются, то у них в этой точке общая касательная, следовательно:

$$\{\dot{x}, \dot{y}\} \parallel \{x'_a, y'_a\}$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y'_a}{x'_a} \quad \text{в точке касания.}$$

$F(x, y, a) = 0$ - a фиксировано.

Однопараметрическое семейство плоских кривых (ОСПК)

$$F_x x + F_y y = 0,$$

$$\frac{y}{x} = -\frac{F_x}{F_y} \Rightarrow \frac{y_a'}{x_a'} = -\frac{F_x}{F_y} \Rightarrow F_x x_a' + F_y y_a' = 0$$

(*) $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial a} = 0$, следовательно, огибающая удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} F(x, y, a) = 0 \\ \frac{\partial F(x, y, a)}{\partial a} = 0 \end{cases}$$

тогда огибающая есть дискриминантная кривая.

Однопараметрическое семейство плоских кривых (ОСПК)

2) Пусть $\begin{cases} x = x(a) \\ y = y(a) \end{cases}$ - дискриминантная кривая семейства (35).

$$F_x x_a' + F_y y_a' + \frac{\partial F}{\partial a} = 0$$

$$F_x x_a' + F_y y_a' = 0 : \quad (*)$$

$$\frac{y_a'}{x_a'} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{F_x^{(31)}}{F_y^{(31)}}, \text{ следовательно, дискриминантная кривая}$$

касается в каждой своей точке некоторой кривой семейства, она является огибающей. Но в уравнении (*) может быть

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases}, \text{ следовательно, дискриминантная кривая состоит из} \\ \text{особых точек кривых семейства.}$$

Ч.т.д.

ВЫХО

Д

$$F(x, y, a) = 0, \quad (35)$$

где a – параметр.



$$F(x, y, a) = 0, \quad (35)$$

где a – параметр.



$$F_x x + F_y y = 0 \quad (31)$$



Определение: *однопараметрическим семейством плоских кривых* называется множество кривых на плоскости, удовлетворяющих неявному уравнению:

$$F(x, y, a) = 0 \quad (35)$$

где a – параметр.



$$F_x x + F_y y = 0 \quad (31)$$



$$F_x x + F_y y = 0 \quad (31)$$



$$F(x, y) = 0 \quad (29)$$

(29) – неявное уравнение плоской кривой.

