

# СТАТИКА.

**Статика** – раздел теоретической механики, занимающийся изучением условий равновесия материальных тел.

**Мат. точкой** называется материальное тело, размеры которого в конкретных условиях можно не учитывать.

**Силой** называется мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия. Характеризуется тремя элементами: численным значением (модулем), направлением и точкой приложения.  $[F] = Н$ .

**Системой сил** называется совокупность нескольких сил действующих на тело.

**Эквивалентными** называются системы сил, под действием каждой из которых твердое тело находится в одинаковом кинематическом состоянии.

**Равнодействующей** системы сил называется сила  $R$ , эквивалентная этой системе.

**Уравновешивающей** называется сила  $F$ , равная по модулю равнодействующей и направленная по линии ее действия в противоположную сторону.

**Системой уравновешивающихся сил** называется такая система, которая при приложении к твердому телу, находящемуся в покое, не выводит его из этого состояния.

**Внешними** называются силы, действующие на твердое тело или систему тел со стороны других тел. **Внутренними** называются силы взаимодействия между частицами твердого тела или между телами данной системы.

**Свободным** называется тело, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении. **Несвободным** называется тело, свобода которого ограничена связями.

**Связями** называются тела, ограничивающие свободу перемещения данного тела.

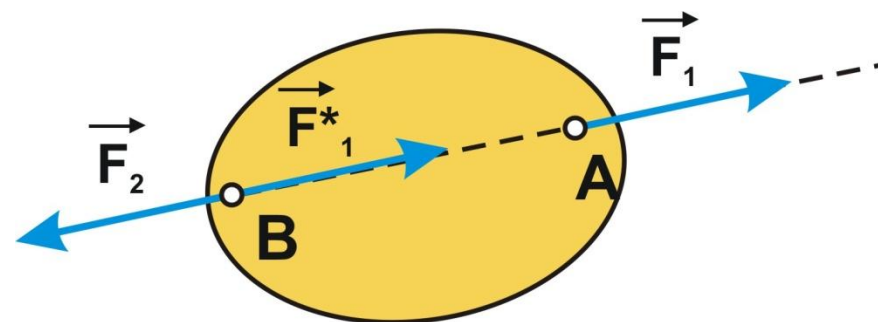
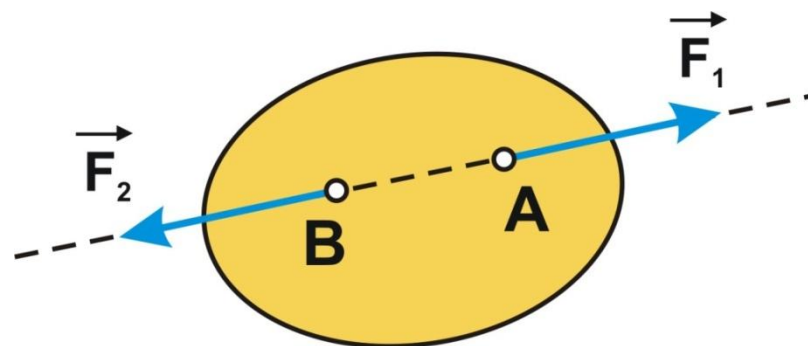
**Реакцией связи** называется сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещению в том или ином направлении.

## Аксиомы статики.

1. **Аксиома равновесия двух сил.** Абсолютно твердое тело находится в равновесии под действием двух сил тогда, когда эти силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

2. **Аксиома присоединения и исключения уравнивающих сил.** Не изменяя действия системы сил на абсолютно твердое тело, можно присоединить к этой системе или исключить из нее любую уравновешенную систему сил.

**Следствие:** Силу  $F$ , приложенную к какой-либо точке твердого тела  $A$ , можно, не изменяя ее действия, переносить в любую другую точку  $B$ , лежащую на линии действия этой силы.

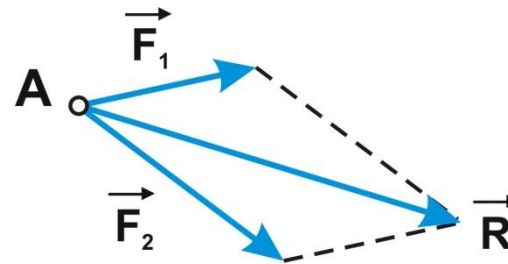


$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_1^*$$

**3. Аксиома параллелограмма сил.** Равнодействующая двух сил, пересекающихся в точке, приложена в той же точке и изображается диагональю параллелограмма, построенного на заданных силах.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



**4. Аксиома равенства действия и противодействия.** Силы, с которыми действуют друг на друга два тела, равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

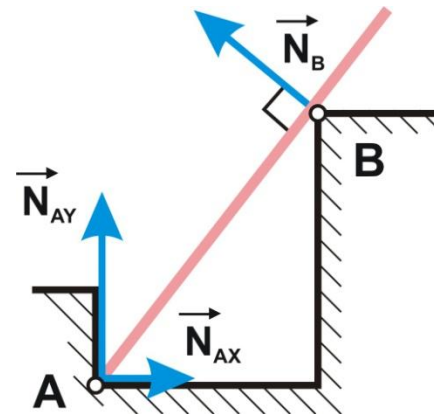
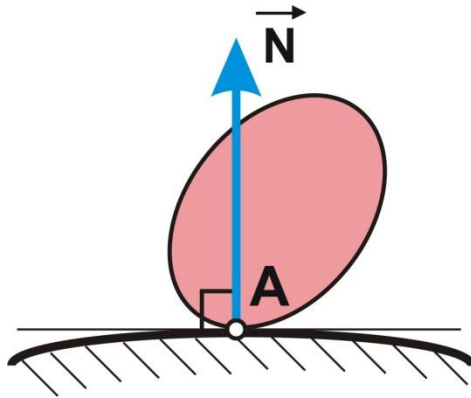
**5. Аксиома отвердевания.** Если деформируемое тело находится в равновесии, то это равновесие не нарушается и в том случае, если тело станет абсолютно твердым.

**6. Аксиома связей (принцип освобождаемости от связей).**

Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно освободить его от связей и заменить их действие на тело реакциями этих связей.

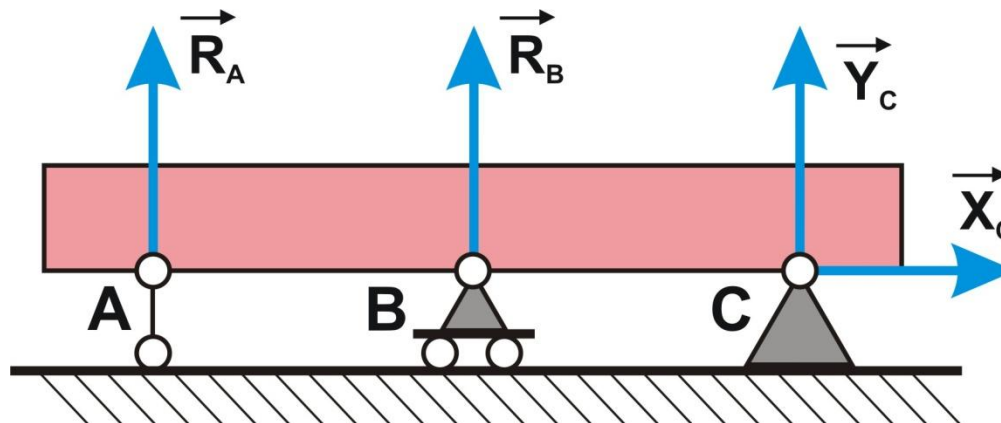
## Связи и их реакции.

### 1. Гладкая поверхность.

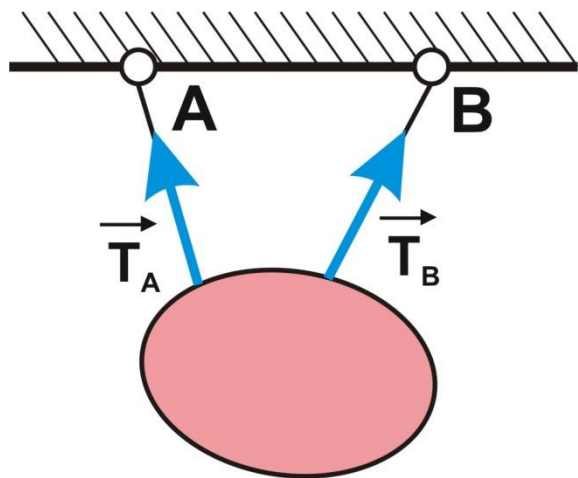


### 2. Плоский шарнир.

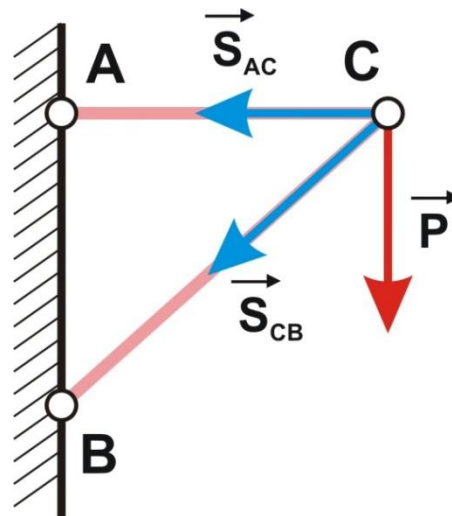
Шарнирно подвижная опора и шарнирно неподвижная опора



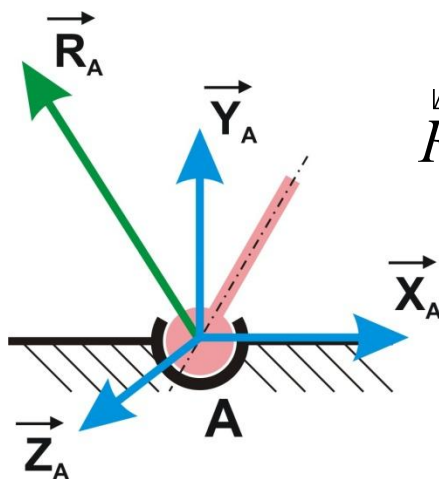
### 3. Гибкая нить.



### 4. Невесомые стержни.

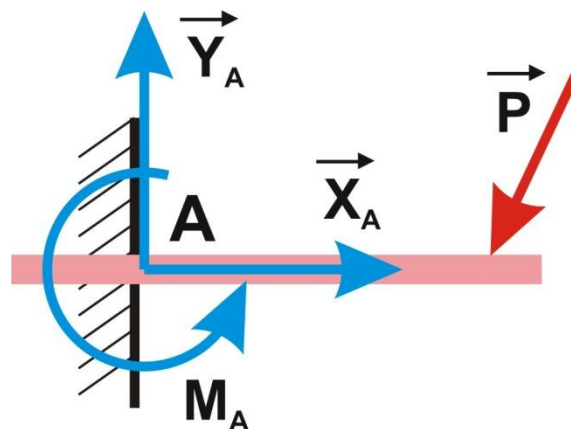


### 5. Сферический шарнир.

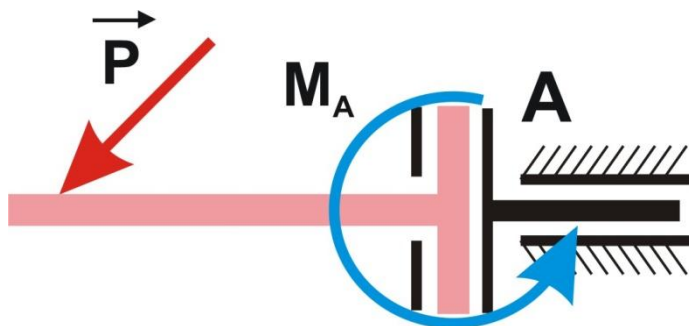
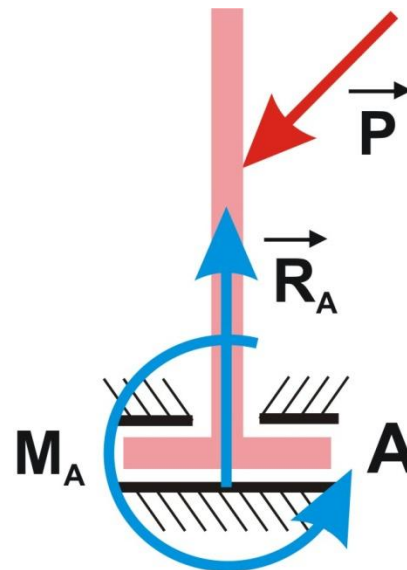
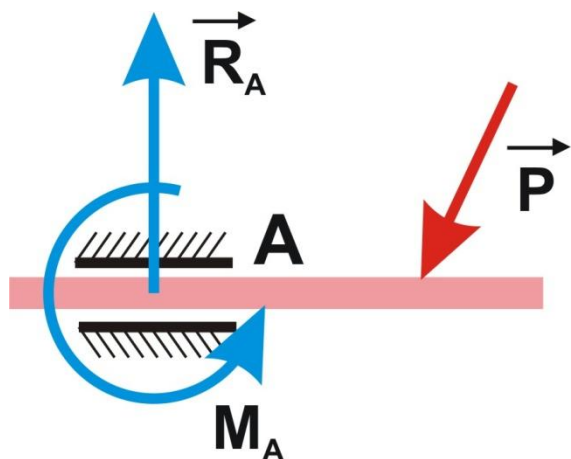


$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A$$

### 6. Жесткая заделка.



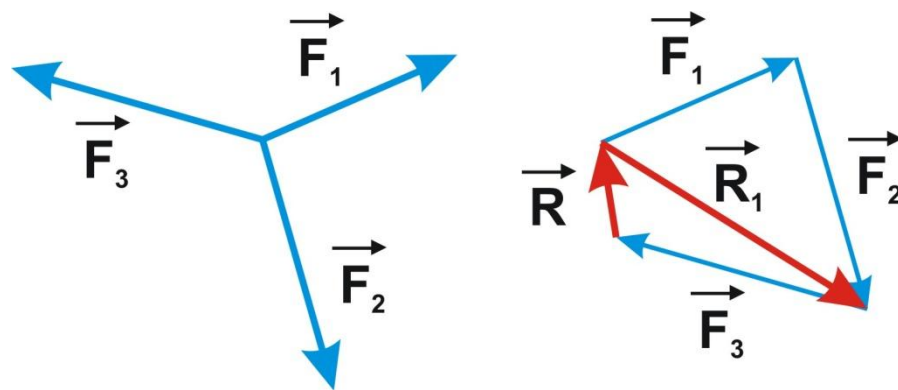
## 7. Скользящая заделка.



## Система сходящихся сил.

**Системой сходящихся сил** называется такая система, линии действия которых пересекаются в одной точке.

**Правило силового многоугольника.** Равнодействующая нескольких сходящихся сил равна вектору, соединяющему начальную и конечную точки ломаной линии, стороны которой представляют собой данные силы.



Сложение сил по правилу силового многоугольника называется **геометрическим способом сложения сил**



## Аналитический способ сложения сил.

Проекция вектора на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций составляющих векторов на ту же ось.

$$\vec{F}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$$

$$\vec{F}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$$

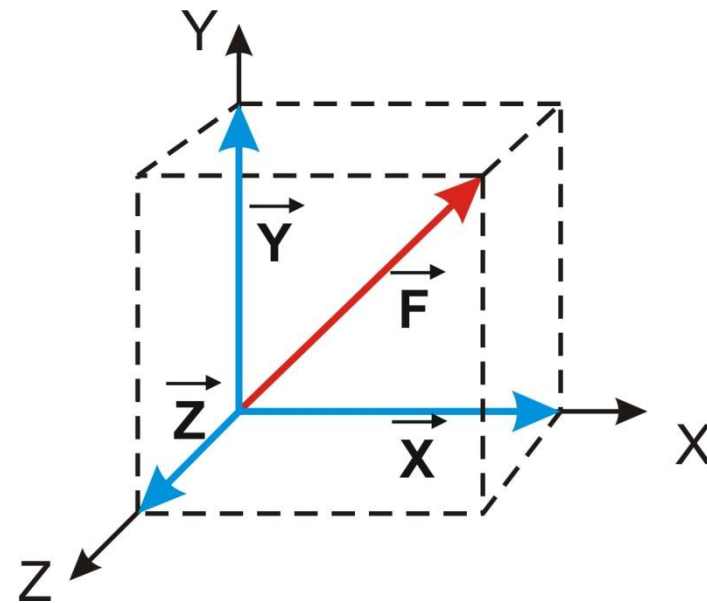
$$\vec{F}_n = (X_n, Y_n, Z_n)$$

$$R_x = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_i X_i$$

$$R_y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum_i Y_i$$

$$R_z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_i Z_i$$

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$



$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

### **Аналитическое условие равновесия системы сходящихся сил.**

Для равновесия твердого тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из трех координатных осей равнялась нулю.

$$\sum_i X_i = 0 \quad \sum_i Y_i = 0 \quad \sum_i Z_i = 0$$

Задачи статики, в которых число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия, называются **статически определимыми**.

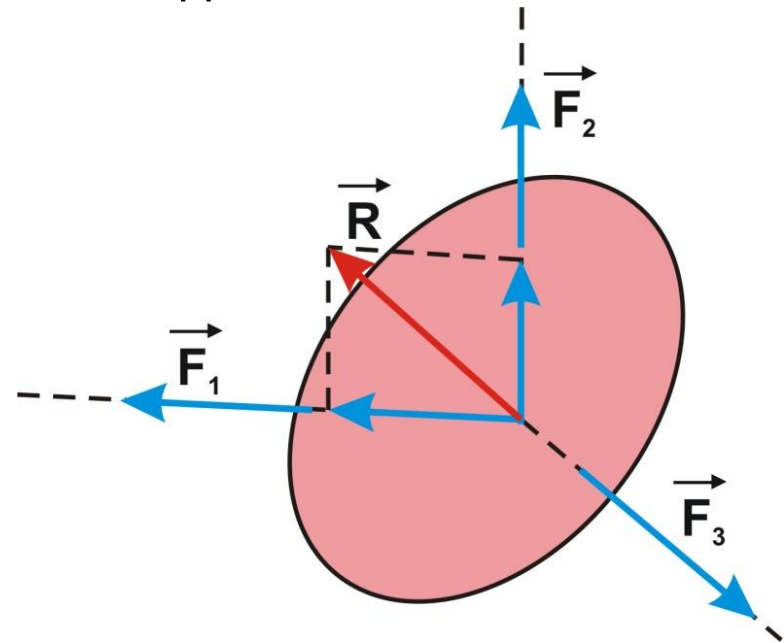
### **Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил.**

Для равновесия твердого тела, находящегося под действием системы сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный для этой системы, был замкнут, то есть чтобы равнодействующая этой системы равнялась нулю.

## Теорема о трех силах

Если под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, твердое тело находится в равновесии, то линии действия всех этих сил пересекаются в одной точке.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow |\vec{F}_3| = |\vec{R}|$$



Линии действия сил  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  пересекаются

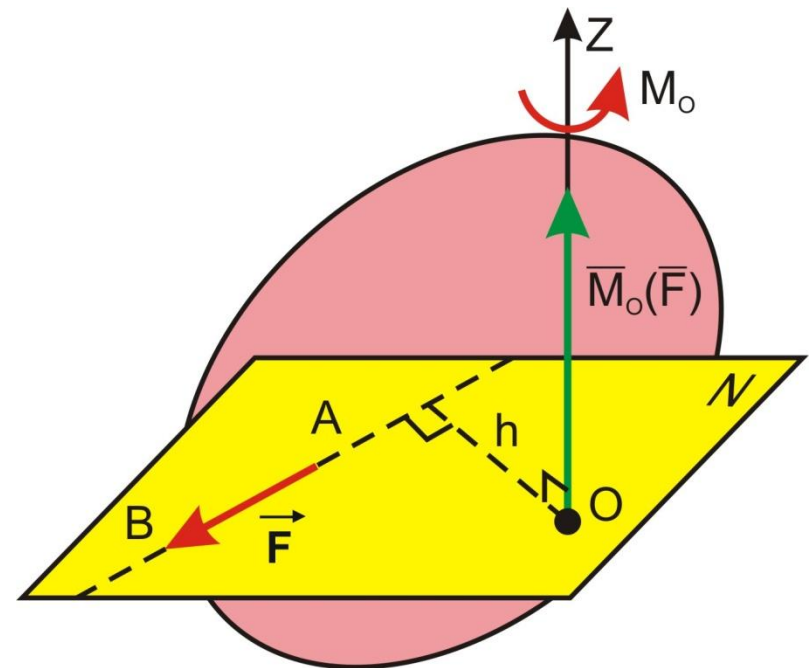
### Последовательность решения задач статики:

1. Выделяют тело, равновесие которого должно быть рассмотрено.
2. Устанавливают связи, наложенные на тело и заменяют их реакциями.
3. Изображают расчетную схему, включающую в себя:
  - рассматриваемое тело;
  - активные силы приложенные к телу;
  - реакции связей наложенные на тело.
4. Составляют уравнения равновесия при аналитическом решении задачи или строят силовой многоугольник при геометрическом решении.
5. Определяют искомые величины (обычно, реакции связей) и проводят анализ полученных результатов.

# Момент силы.

**Моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$**  называется вектор, приложенный в этой точке и направленный перпендикулярно к плоскости, содержащей силу и точку, так, чтобы, смотря навстречу вектору момента видеть, вращение плоскости под действием силы против часовой стрелки.

**$h$  – плечо силы  $\vec{F}$** , кратчайшее расстояние от точки  $O$  до линии действия силы  $\vec{F}$ .



$$\overset{\curvearrowright}{M}_O(\overset{\curvearrowright}{F}) = \pm |\overset{\curvearrowright}{F}| h$$

## Пара сил. Момент пары сил.

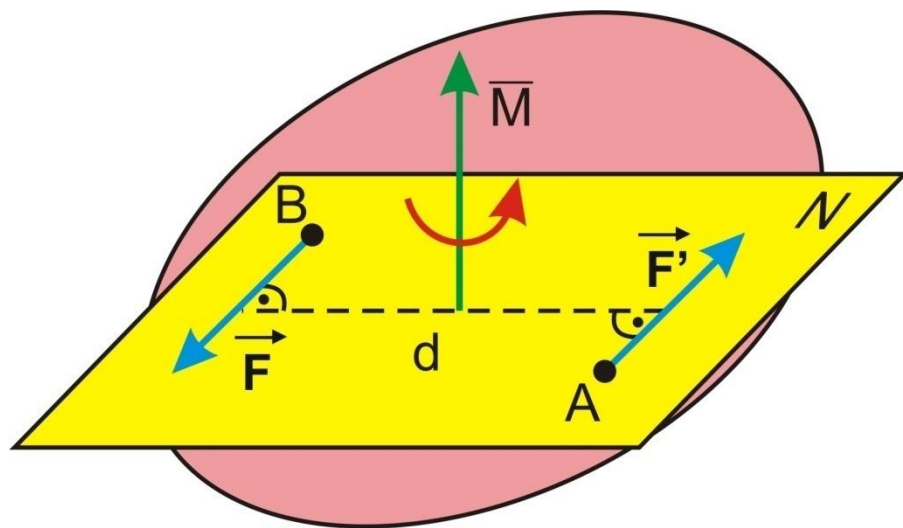
**Парой сил** называется система двух равных по величине, параллельных и противоположно направленных сил  $F$  и  $F'$ . Пара сил не имеет равнодействующей, но они не уравниваются, так как не направлены по одной прямой. Плоскость, в которой расположены силы пары, называют **плоскостью действия пары**.

### Момент пары сил $F$ и $F'$

$$|\vec{M}(F, F')| = |\vec{F}| d$$

$$\vec{M} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}' = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$

$$M(F, F') = M_A(F') = M_B(F)$$



### Свойства пар сил

**Теорема.** Пары сил, лежащие в одной плоскости и имеющие одинаковые моменты, эквивалентны.

### Следствие.

- Пару сил можно поворачивать и переносить в плоскости ее действия.
- Можно изменять плечо и силы пары, сохраняя алгебраическую величину момента и плоскость ее действия.
- Не изменяя действие пары сил на тело, ее можно переносить в плоскость, параллельную плоскости ее действия.

**Момент пары сил** – вектор свободный, характеризуется модулем и направлением, а точкой приложения может быть любая точка тела.

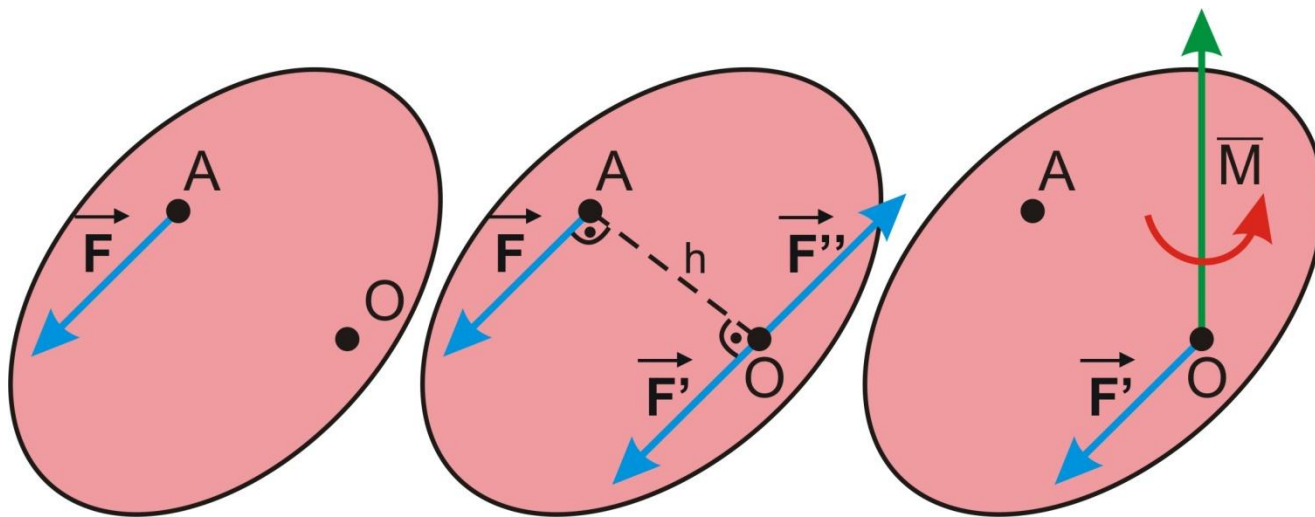
## Теорема. Метод Пуансо.

Силу, не изменяя ее действия на твердое тело, можно переносить параллельно самой себе в любую точку твердого тела, добавляя при этом пару сил, момент которой равен моменту переносимой силы относительно новой точки приложения силы.

Процесс замены силы  $\mathbf{F}$  силой  $\mathbf{F}'$  и парой сил  $(\mathbf{F}, \mathbf{F}'')$  называют приведением силы  $\mathbf{F}$  к заданному центру  $O$ .

Пару сил  $(\mathbf{F}, \mathbf{F}'')$  называют присоединенной парой сил.

$$\vec{F} = \vec{F}' = \vec{F}''$$





### Сложение пар сил. Условие равновесия пар.

**Теорема.** Действие на тело нескольких пар сил, лежащих в произвольных плоскостях, эквивалентно действию одной пары, момент которой равен геометрической сумме моментов составляющих пар сил, то есть

$$\overset{\sqcup}{M} = \sum_i \overset{\sqcup}{M}_i$$

### Условие равновесия пар сил.

Пары сил, произвольно расположенные в пространстве, взаимно уравниваются в том случае, если геометрическая сумма их моментов равна нулю.

$$\sum_i \overset{\sqcup}{M}_i = 0$$

Проецируя на оси декартовой системы координат, получаем аналитические условия равновесия:

$$\sum_i M_{ix} = 0, \quad \sum_i M_{iy} = 0, \quad \sum_i M_{iz} = 0$$

Геометрическая сумма всех сил называется **главным вектором системы сил**. Геометрическая сумма моментов всех сил относительно заданного центра О называется **главным моментом системы сил**.

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \quad \vec{M}_O = \sum_i \vec{M}_{io}(\vec{F}_i)$$

В частном случае приведения, статика рассматривает условие, когда

$$\vec{R} = 0, \quad \vec{M}_O = 0$$

## Условие равновесия системы сил.

### 1. Пространственная система сил.

$$\sum_i M_{ix}(\vec{F}_i) = 0$$

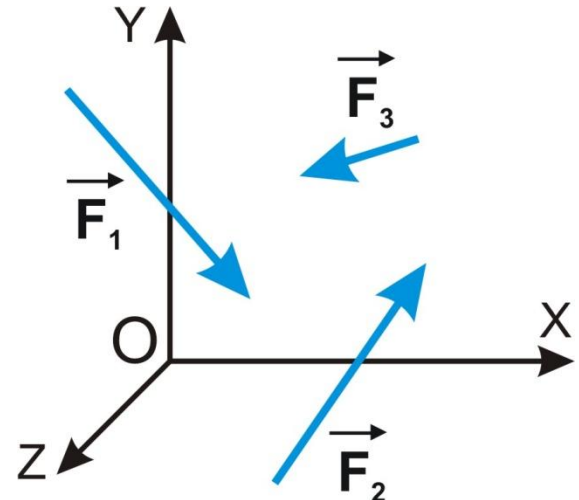
$$\sum_i X_i = 0$$

$$\sum_i M_{iy}(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_i Y_i = 0$$

$$\sum_i M_{iz}(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_i Z_i = 0$$

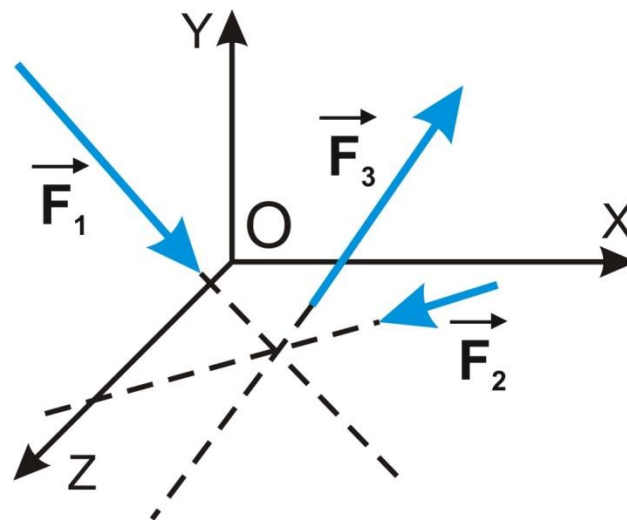


## 2. Пространственная система сходящихся сил.

$$\sum_i X_i = 0$$

$$\sum_i Y_i = 0$$

$$\sum_i Z_i = 0$$

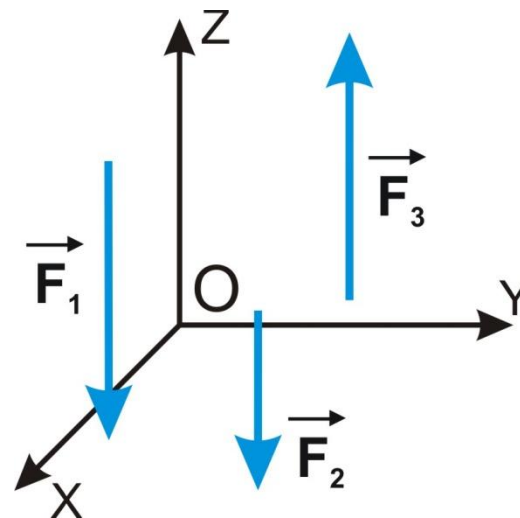


## 3. Пространственная система параллельных сил.

$$\sum_i M_{ix}(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_i M_{iy}(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_i Z_i = 0$$



#### 4. Плоская произвольная система сил.

$$\sum_i X_i = 0$$

$$\sum_i Y_i = 0$$

$$\sum_i M_A(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_i Y_i = 0$$

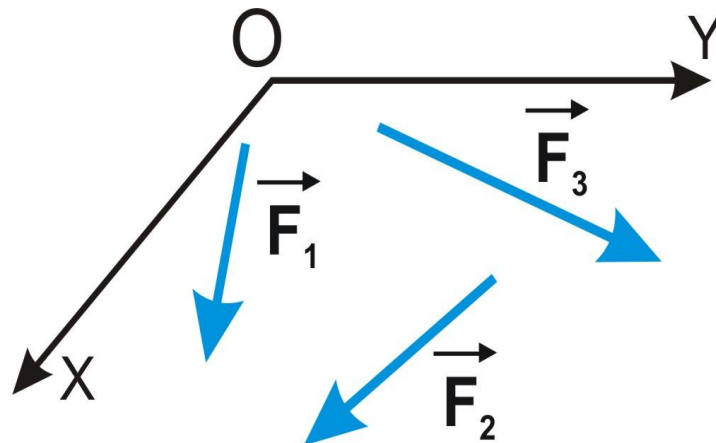
$$\sum_i M_A(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_i M_B(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_i M_A(\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum_i M_B(\vec{F}_i) = 0$$

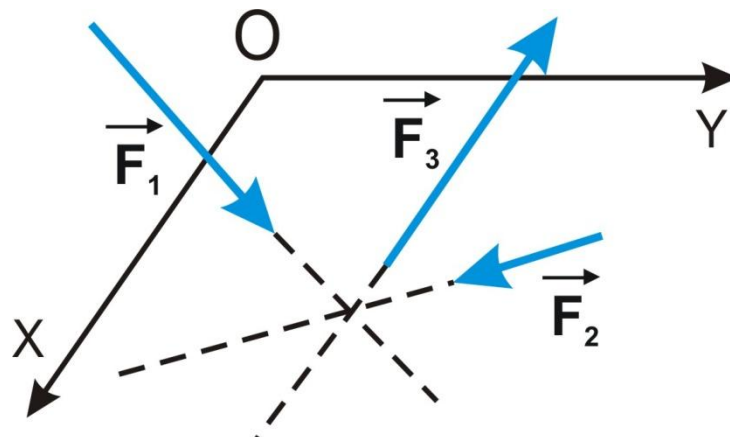
$$\sum_i M_C(\vec{F}_i) = 0$$



### 5. Плоская система сходящихся сил.

$$\sum_i X_i = 0$$

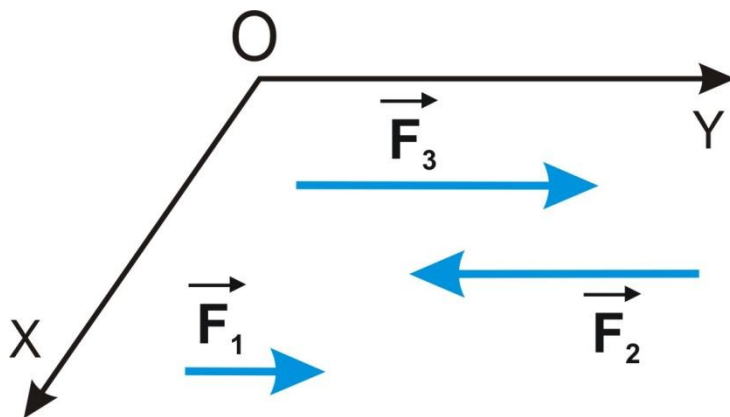
$$\sum_i Y_i = 0$$



### 6. Плоская система параллельных сил.

$$\sum_i Y_i = 0$$

$$\sum_i M_O(\vec{F}_i) = 0$$



## Трение.

### Трение скольжения. Трение сцепления.

**Силой трения скольжения** называется сила сопротивления относительно скольжению при стремлении двигать одно тело по поверхности другого.

Максимальное значение **силы трения** равно

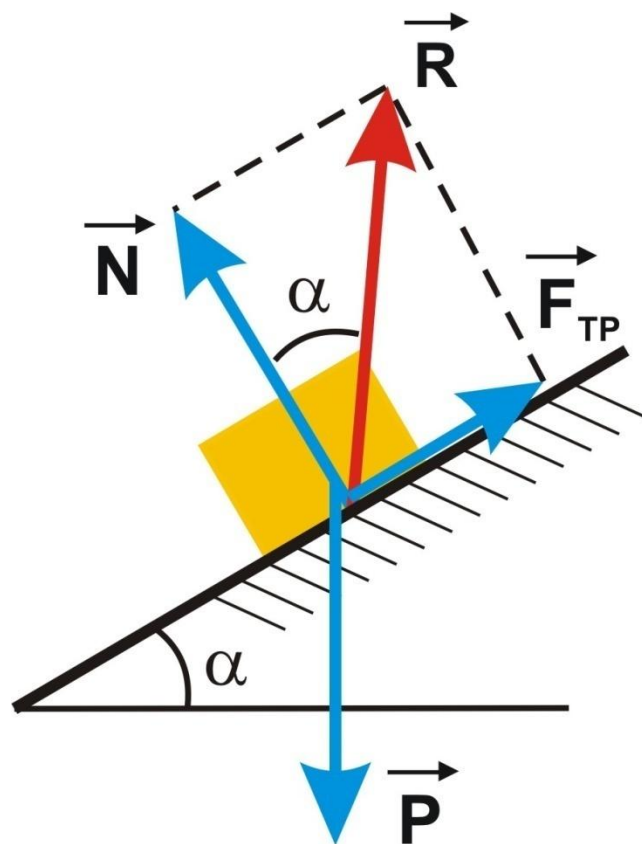
$$F_{mp} = fN, \quad 0 \leq F_{mp} \leq fN$$

$f$  – коэффициент трения скольжения;

$\alpha$  – угол трения, при котором тело начинает скользить по плоскости, град;

$N$  – реакция гладкой поверхности, Н.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{mp}}{N} = f$$



## Трение.

### Трение качения.

**Парой сил (моментом) сопротивления качению** называют такой момент, который возникает при качении одного тела по поверхности другого за счет деформаций.

Условие равновесия:

$$Q \cdot r = N \cdot \delta, \quad M_c = N \cdot \delta$$

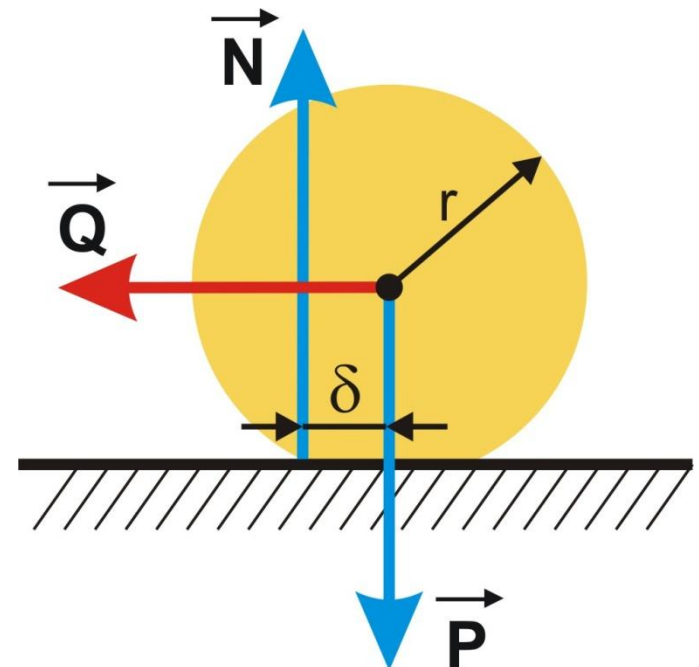
$Q$  – активная сила, Н;

$\delta$  – коэффициент трения качения, см;

$N$  – реакция гладкой поверхности, Н.

Для основных материалов твердых тел:

$$f \approx \frac{\delta}{r}$$



## Центр тяжести. Центр масс.

**Центром тяжести** системы называется точка приложения равнодействующей системы сил тяжести

$$\vec{r}_C \times \vec{R} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{P}_i,$$

$$\vec{R} = \sum_i \vec{P}_i,$$

$$\text{или } \vec{r}_C = \frac{\sum_i \vec{r}_i \cdot P_i}{\sum_i P_i}$$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i \gamma_i \cdot \Delta \tau_i \cdot \vec{r}}{P}$$

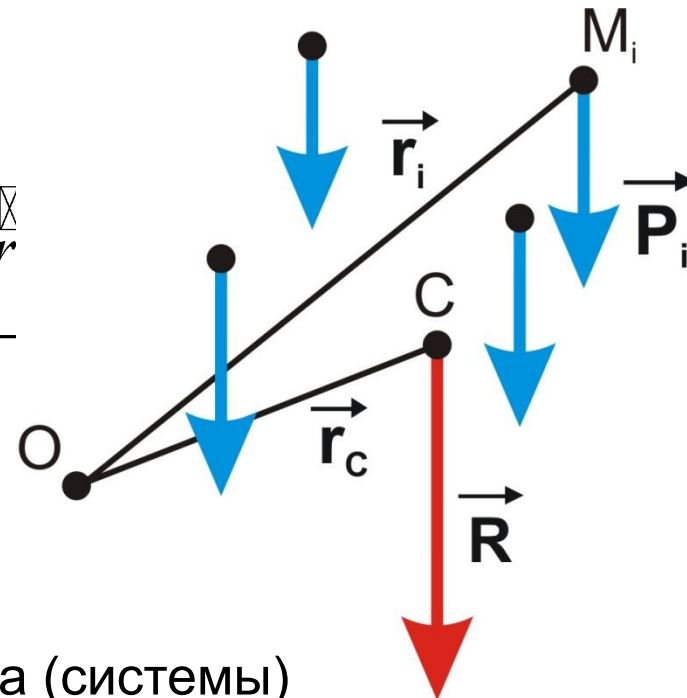
$\Delta \tau_i$  — объем частицы тела;  
 $\gamma_i$  — удельный вес.

Координаты центра тяжести твердого тела (системы)

$$x_C = \frac{\sum_i x_i \cdot P_i}{\sum_i P_i}$$

$$y_C = \frac{\sum_i y_i \cdot P_i}{\sum_i P_i}$$

$$z_C = \frac{\sum_i z_i \cdot P_i}{\sum_i P_i}$$





## Динамика.

### Динамика материальной точки.

**Динамика** – раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел под действием приложенных к ним сил.

### Основные законы Динамики:

**Закон инерции.** Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние.

### Закон пропорциональности силы и ускорения.

Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление (основное уравнение динамики).

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

### Закон равенства действия и противодействия.

Всякому действию соответствует равное по величине, противоположно направленное противодействие.

## Закон независимости действия сил.

Несколько одновременно действующих на материальную точку сил сообщают точке такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = m\vec{a} \quad \dots, \quad \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \vec{a}$$

## Дифференциальное уравнение движения свободной материальной точки.

В проекции на оси декартовой системы координат:

$$\ddot{m}x = X \quad \ddot{m}y = Y \quad \ddot{m}z = Z$$

В проекции на оси естественной системы координат:

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = F_\tau \quad m \frac{1}{\rho} \left( \frac{dS}{dt} \right)^2 = F_n \quad 0 = F_b$$

### Основные задачи динамики:

**Прямая задача** – зная уравнение движение материальной точки или системы, ее массу, определяются силы, действующие на эту точку или систему. Задача решается дифференцированием основного уравнения динамики.

**Обратная задача (основная)** – зная силы, действующие на данную материальную точку или систему, ее массу, начальные координаты и скорость движения, определяется уравнение движение точки или системы (закон). Задача решается интегрированием основного уравнения динамики.

$$\ddot{m}x = X \qquad \ddot{m}y = Y \qquad \ddot{m}z = Z$$

Результат первого интегрирования – скорость как функция времени

$$\dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3) \qquad \dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3) \qquad \dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3)$$

Результат второго интегрирования – уравнения движения

$$x = x(t, C_1, C_2, \dots, C_6) \quad y = y(t, C_1, C_2, \dots, C_6) \quad z = z(t, C_1, C_2, \dots, C_6)$$

### Последовательность решения задач динамики:

1. Выделяют тело, движение которого должно быть рассмотрено.
2. Выбирают систему координат и устанавливают связи, наложенные на тело, заменяя их реакциями.
3. Изображают расчетную схему, включающую в себя: рассматриваемое тело, активные силы приложенные к телу, реакции связей наложенные на тело.
4. Записывают дифференциальные уравнения движения в выбранной системе координат.
- 5.1 Для обратной задачи динамики: интегрируют дифференциальные уравнения движения.
- 5.2 Для прямой задачи динамики: определяют ускорение движения тела (точки), используя ускорение определяют силы действующие на тело.
6. Из условий задачи определяют начальные условия интегрирования при  $t_0=0$ , рассчитывают константы интегрирования.
7. По полученным уравнениям движения определяют неизвестные

# Динамика механической системы.

## Динамика механической системы.

**Силы, действующие на механическую систему** можно разделить на «активные» и «реакции связей» или «внешние» -  $F^e$  и «внутренние» -  $F^j$ .

Движение механической системы зависит и от внешних, и от внутренних сил, поэтому основное уравнение динамики

$$\overset{\rceil}{F}^e + \overset{\rceil}{F}^j = m\overset{\rceil}{a}$$

Главный момент системы внутренних сил и главный вектор системы сил

$$\overset{\rceil}{R}^j = \sum_i \overset{\rceil}{F}_i^j = 0 \quad \overset{\rceil}{M}_0^j = \sum_i \overset{\rceil}{M}_{0i}^j(\overset{\rceil}{F}_i) = 0$$

Внутренние силы не уравниваются, так как приложены вдоль одной прямой к разным точкам и могут вызывать относительное перемещение этих точек.

## Моменты инерции твердого тела.

**Момент инерции** ( $I$ ) характеризует распределение массы тела и является мерой инертности твердого тела при их вращении.

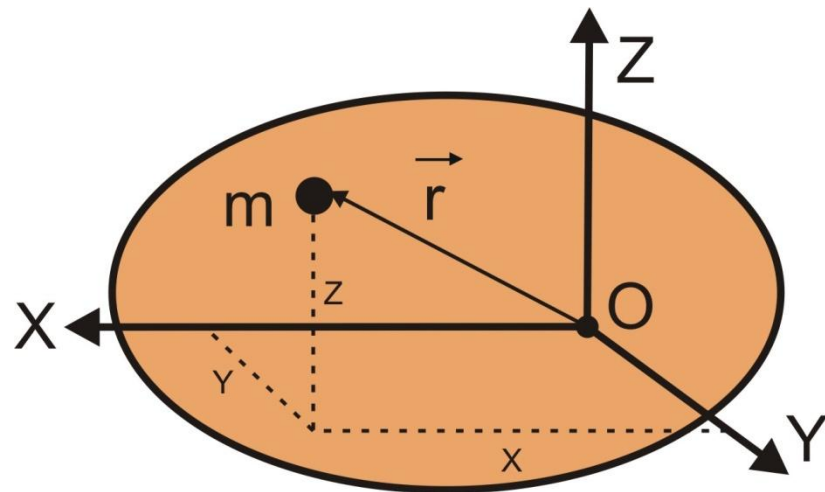
**Моментом инерции твердого тела относительно оси и точки** называется скалярная величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от этой точки соответственно до оси и точки.

$$I_x = \sum_i m_i (z_i^2 + y_i^2)$$

$$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_y = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

$$I_O = \sum_i m_i r_i^2 \quad ( \text{ относительно точки } O )$$



### Радиус инерции.

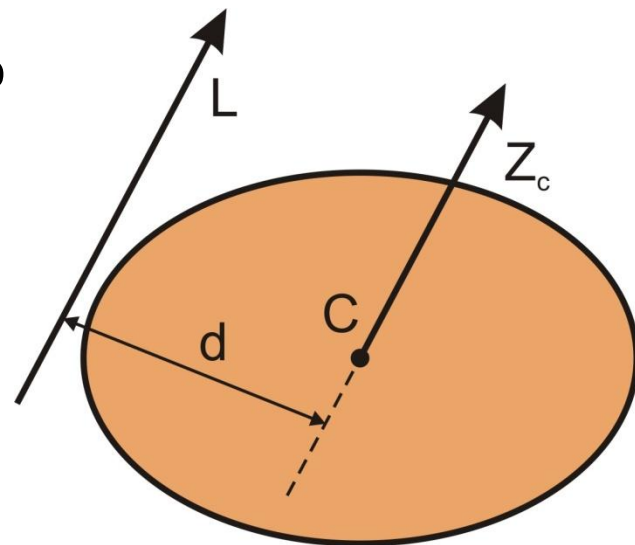
Момент инерции относительно заданной оси, например оси  $Z$  можно представить в виде произведения массы тела  $m$  на квадрат линейной величины  $i_z$ , называемой **радиусом инерции тела** относительно этой оси:

$$I_z = m \cdot i_z^2$$

### Теорема Штейнера.

Момент инерции твердого тела относительно некоторой оси равен моменту инерции твердого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.

$$I_L = I_{cz} + md^2$$



## Моменты инерции однородных тел.

Моменты инерции относительно осей проходящих через центр масс и являющихся осями симметрии (центральная ось).

**Однородный тонкий стержень:** Масса стержня  $m = \rho \cdot S \cdot L$

где  $\rho$ - плотность,  $S$ -площадь поперечного сечения,  $L$ - длина.

Разобьем стержень на малые элементы  $dx$ , тогда  $dm = \rho \cdot S \cdot dx$

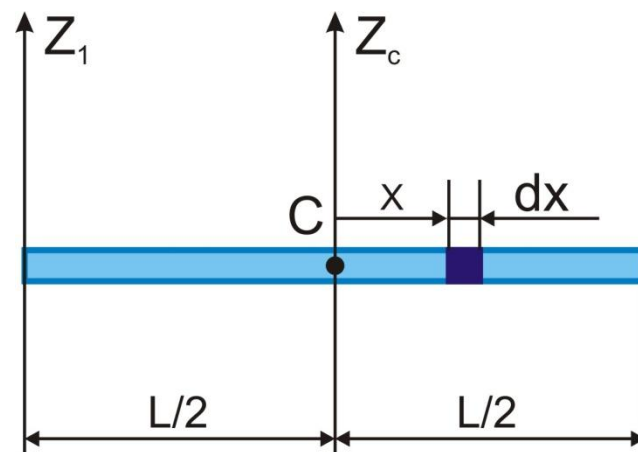
Момент инерции стержня относительно центральной оси

$$dI_{cz} = x^2 dm = \rho \cdot S \cdot x^2 dx$$

$$I_{cz} = 2 \int_0^{L/2} \rho \cdot S \cdot x^2 dx = 2 \rho \cdot S \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{L/2} = 2 \rho \cdot S \cdot \frac{L^3}{3 \cdot 8} = \frac{mL^2}{12} \quad (\text{м}^2)$$

Согласно теореме Штейнера, момент инерции однородного стержня относительно оси  $Z_1$ :

$$I_{Z_1} = \frac{mL^2}{12} + m \frac{L^2}{4} = \frac{mL^2}{3} \quad (\text{м}^2)$$

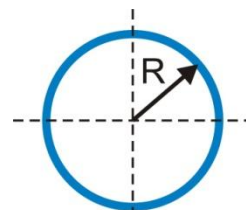




## Моменты инерции простейших однородных тел.

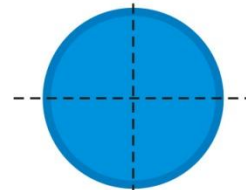
Полый тонкостенный цилиндр  
или кольцо с радиусом  $R$   
и массой  $m$ :

$$I_z = mR^2$$



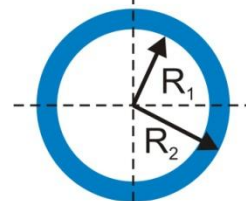
Сплошной цилиндр или диск  
с радиусом  $R$  и массой  $m$ :

$$I_z = \frac{mR^2}{2}$$



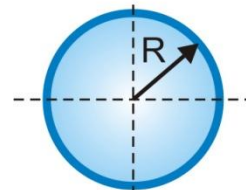
Полый толстостенный цилиндр  
массы  $m$  с внешним радиусом  
 $R_2$  и внутренним радиусом  $R_1$ :

$$I_z = \frac{m(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$



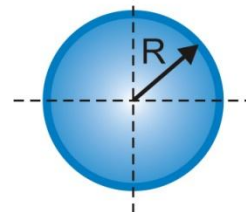
Тонкостенная сфера  
радиуса  $R$  и массы  $m$ :

$$I_z = \frac{2mR^2}{3}$$



Шар радиуса  $R$  и массы  $m$ :

$$I_z = \frac{2mR^2}{5}$$



## Работа силы. Мощность.

**Работа** ( $A$ ) силы  $F$  - мера действия силы, зависящая от величины и направления силы, и от перемещения точки ее приложения.

Элементарной работой  $\delta A$  силы  $F$  на элементарном перемещении  $dr$  называется скалярное произведение этой силы на  $dr$

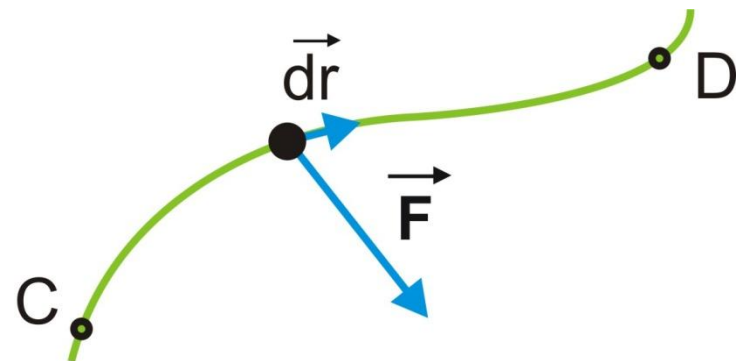
$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad ( \quad \cdot \quad = \quad )$$

На прямолинейном участке при  $F = \text{const}$ :

$$A = F \cdot s \cdot \cos(\angle F, s)$$

Работой силы  $F$  при перемещении материальной точки из точки C в точку D называется:

$$A = \int_C^D \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



**Мощность** ( $P$ ) - физическая величина, измеряемая отношением элементарной работы  $\delta A$  к промежутку времени  $dt$ , в течение которого она произведена:

$$P = \frac{\delta A}{\delta t} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{\delta t} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

## Работа силы тяжести.

Материальная точка перемещается из точки С в точку D по произвольной траектории. Рассмотрим элементарную работу силы тяжести на элементарном перемещении  $dr$

$$\delta A_T = \vec{F}_T \cdot d\vec{r} = \vec{F}_T \cdot (d\vec{r})_F$$

где  $(d\vec{r})_F$  – проекция элементарного перемещения  $d\vec{r}$  на направление силы тяжести  $\vec{F}_T$

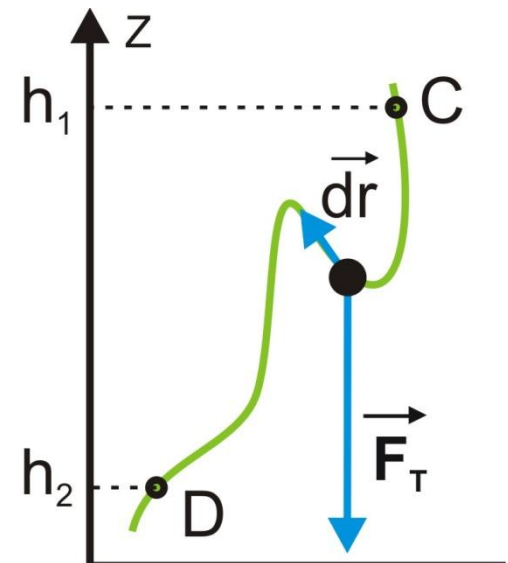
$$\delta A_T = \vec{F}_T \cdot (-dz) = -mg \cdot dz$$

где  $(-dz)$  – проекция элементарного перемещения  $d\vec{r}$  на ось  $z$ .

Тогда работа силы тяжести по перемещению материальной точки из точки С в точку D будет равна:

$$A_T = \int_{h_1}^{h_2} -mg \cdot dz = -mg \int_{h_1}^{h_2} dz = mgh_1 - mgh_2$$

Отсюда следует, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положением материальной точки в пространстве.



## Работа силы трения.

Материальная точка перемещается из точки С в точку D по произвольной траектории. Рассмотрим элементарную работу силы трения на элементарном перемещении  $dr$

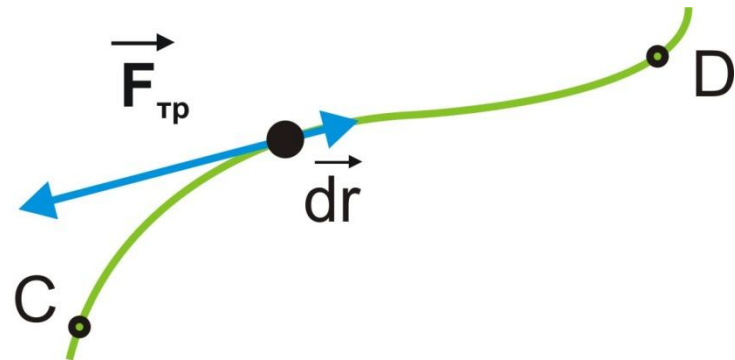
Элементарная работа силы трения:

$$\delta A_{mp} = \vec{F}_{mp} \cdot d\vec{r} = \vec{F}_{mp} \cdot d\vec{S}$$

Работа силы трения при перемещении материальной точки из точки С в точку D, при постоянной  $F_{mp}$ :

$$A_{mp} = - \int_C^D F_{mp} \cdot dS = -F_{mp} \cdot S$$

Работа силы трения зависит от формы траектории.



## Работа сил, приложенных к твердому телу.

Скорость при произвольном движении тела:  $\vec{V} = \vec{V}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

$$\vec{V} dt = \vec{V}_o dt + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) dt$$

$$\delta A = \sum F_i \cdot d\vec{r}_i = \sum F_i \cdot d\vec{r}_o + \sum F_i (d\varphi \times \vec{r}_i)$$

Элементарная работа равнодействующей сил:

$$\delta A = \sum \delta A_i = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_o + \sum \vec{F}_i (d\varphi \times \vec{r}_i) =$$

$$\left( \sum \vec{F}_i^e + \sum \vec{F}_i^j \right) \cdot d\vec{r} + \left( \sum \vec{F}_i^e + \sum \vec{F}_i^j \right) (d\varphi \times \vec{r}_i)$$

Элементарная работа всех сил приложенных к телу:

$$\delta A = (\vec{R}^e + \vec{R}^j) d\vec{r}_o + (\vec{M}^e + \vec{M}^j) d\varphi$$

Так как внутренние силы  $\vec{R}^j = 0, \vec{M}^j = 0 \Rightarrow \delta A = (\vec{R}^e) d\vec{r}_o + (\vec{M}^e) d\varphi$

Работа при поступательном движении:

$$\delta A_{пр}(\vec{R}^e) d\vec{r}_o \text{ const } A = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos(\alpha, \beta)$$

Работа при вращательном движении:

$$\delta A_{пр}(\vec{M}^e) d\varphi \text{ const } A = \vec{M} \cdot \vec{\varphi} = M \cdot (\varphi - \varphi_o)$$

Работа при плоском движении:

$$A = (\vec{R}^e) d\vec{r}_o + (\vec{M}^e) d\varphi$$

## Кинетическая энергия.

Кинетическая энергия точки определяется как половина произведения массы на квадрат величины ее скорости. Кинетическая энергия механической системы равна сумме энергий отдельных ее точек.

$$H = \sum_i \frac{m_i V_i^2}{2} \quad T = \sum_i \frac{m_i V_i^2}{2} \quad \left( V = \frac{dx}{dt} \right), \quad \text{где } V_i = V_o + V_{ir}$$

**Теорема Кёнига.** Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетической энергии центра масс системы, масса которой равна массе всей системы, и кинетической энергии этой системы в ее относительном движении вокруг центра масс.

$$T = \sum_i \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_i m_i V_i \cdot V_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i (V_c + V_{ir})(V_c + V_{ir}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i V_c^2 + \sum_i m_i V_c \cdot V_{ir} + \frac{1}{2} \sum_i m_i V_{ir}^2$$

$$m \cdot \sum_i m_i r_i = m \cdot r_c \Rightarrow \sum_i m_i V_{ir} = 0 \quad T = \frac{1}{2} \sum_i m_i V_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i V_{ir}^2$$

### Кинетическая энергия твердого тела.

Кинетическая энергия – мера механического движения, поэтому вид формул зависит от вида движения твердого тела.

Кинетическая энергия при поступательном движении:

$$T = \sum_i \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{m V^2}{2}$$

Кинетическая энергия при вращательном движении:

$$T = \sum_i \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i V_{ir}^2}{2} = \sum_i \frac{m_i (\omega R_i)^2}{2}$$

*м.к.*  $I_z = \sum_i m_i R_i^2 \Rightarrow T = \frac{I_z \omega^2}{2}$

Кинетическая энергия при плоском движении:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i V_c^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i V_{ir}^2 = \frac{m V_c^2}{2} + \frac{I_{cz} \omega^2}{2}$$

Если плоское движение представить в виде вращательного вокруг мгновенного центра скоростей, то согласно теореме Штейнера

$$T = \frac{I_{Pz} \omega^2}{2}$$

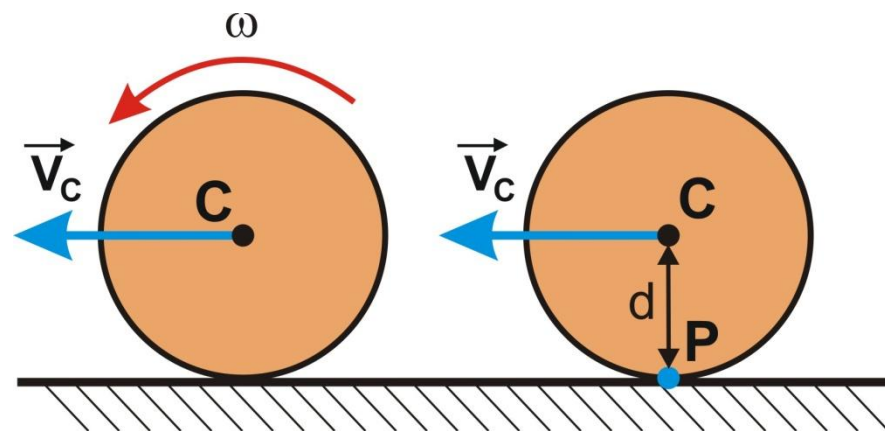
где  $I_{pz}$  – момент инерции относительно оси  $z$ , проходящей через мгновенный центр скоростей  $P$ .

**Пример:** Момент инерции однородного диска относительно центральной оси

$$I_{cz} = \frac{mR^2}{2} \Rightarrow T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{I_{cz} \omega^2}{2} = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \frac{V_c^2}{d^2} = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{mV_c^2}{4} = \frac{3(mV_c^2)}{4}$$

$$I_{Pz} = I_{cz} + md^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2 \Rightarrow$$

$$T = \frac{I_{Pz} \omega^2}{2} = \frac{3}{2} mR^2 \frac{1}{2} \frac{V_c^2}{d^2} = \frac{3(mV_c^2)}{4}$$





### Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.

Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно работе силы, действующей на точку, на том же перемещении.

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= F; & m \frac{dV}{dt} \cdot dr &= F \cdot dr; & m \frac{dV}{dt} \cdot V dt &= F \cdot dr; \\ m \cdot V dV &= F \cdot dr; & m \cdot d \frac{V^2}{2} &= F \cdot dr \end{aligned}$$

Интегрируем полученное выражение:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_o^2}{2} = A$$

### Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

Изменение кинетической энергии механической энергии на некотором ее перемещении равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему, на том же перемещении.

Запишем уравнение теоремы для каждой точки системы:

$$\frac{m_i V_i^2}{2} - \frac{m_i V_{io}^2}{2} = A_i^e + A_i^j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Суммируем записанные выражения по всем точкам системы:

$$T - T_o = \sum_i A_i^e + \sum_i A_i^j$$

В частном случае твердого тела при  $\sum_i A_i^j = 0$

$$T - T_o = \sum_i A_i^e$$

## Принцип Даламбера для материальной точки.

При движении точки в любой момент времени геометрическая сумма активных сил, реакций связи и силы инерции равна нулю.

$$\vec{F}^a + \vec{N} = m\vec{a},$$

$$\vec{F}^a + \vec{N} - m\vec{a} = 0,$$

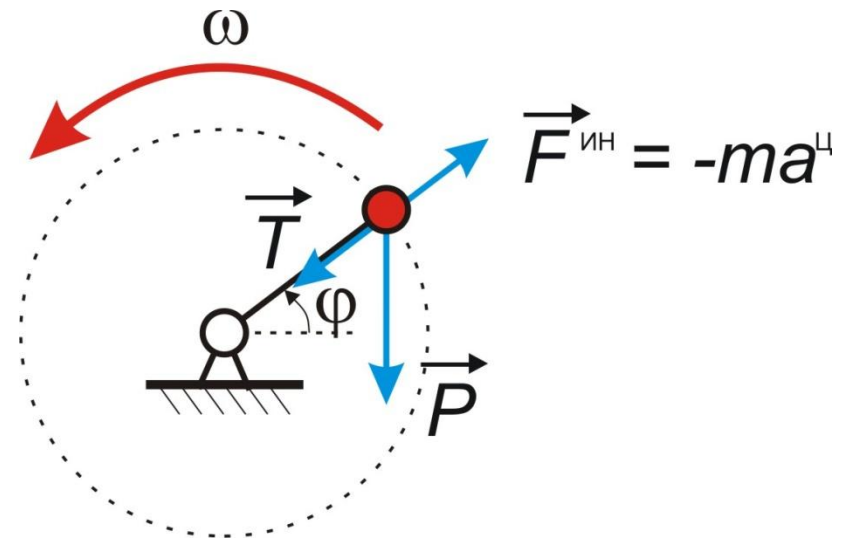
Дано:  $P=9,8$  (Н),  $L=1$  (м),  $\omega=8$  (1/с),  $\phi=90$  (град)

Найти:  $T$ -?

$$T + P \cdot \sin \phi - m\vec{a}_y = 0$$

$$\text{где } m\vec{a}_y = m\omega^2 L = \frac{P}{g}\omega^2 L \Rightarrow$$

$$T = \frac{P}{g}\omega^2 L - P \cdot \sin \phi =$$



## Принцип Даламбера для системы материальных точек.

Если в любой момент времени к каждой точке механической системы, кроме действующих на нее внешних и внутренних сил, добавить силы инерции этих точек, то полученная система сил будет уравновешенная.

$$\vec{F}_i^{\text{вн}} + \vec{F}_i^{\text{вн}} + \vec{F}_i^{\text{ин}} = 0$$

$\vec{F}_i^{\text{вн}}, \vec{F}_i^{\text{вн}}$  – равнодействующие внешних и внутренних сил.

$\vec{F}_i^{\text{ин}} = -m_i \vec{a}_i$  – сила инерции точки.

## Момент сил относительно произвольного центра.

$$M_o(\overset{\rceil}{F}_i^{\text{вн}}) + M_o(\overset{\rceil}{F}_i^j) + M_o(\overset{\rceil}{F}_i) = 0$$

Рассматривая принцип Даламбера для системы точек

$$\sum \overset{\rceil}{F}_i^{\text{вн}} + \sum \overset{\rceil}{F}_i = 0$$

$$M_o(\overset{\boxtimes}{F}_i^{\text{вн}}) + M_o(\overset{\boxtimes}{F}_i) = 0$$

Главный вектор и главный момент внутренних сил = 0

$$\sum M_o(\overset{\rceil}{F}_i^j) = 0 \quad \sum \overset{\rceil}{F}_i^j = 0$$

## Силы инерции приложенные к твердому телу.

При поступательном движении силы инерции точек твердого тела приводятся к равнодействующей, равной

$$\vec{F}_i^{ин} = -m\vec{a}_c$$

При вращательном движении (центр масс тела лежит на оси вращения) силы инерции точек твердого тела приводятся к паре сил с моментом, равным

$$M_c(\vec{F}_i^{ин}) = -I_{cz} \cdot \varepsilon$$

При плоском движении твердого тела система сил инерции точек приводится к силе приложенной в центре масс тела и паре сил

$$\vec{F}_i^{ин} = -m\vec{a}_c \quad M_c(\vec{F}_i^{ин}) = -I_{cz} \cdot \varepsilon$$

### Связи.

Связями в динамике считают любого вида ограничения, которые налагаются на положения и на скорости точек механической системы и выполняются независимо от того, какие силы действуют на систему.

Математически связи выражаются уравнениями и неравенствами, зависящие от координат скоростей точек и времени

$$f'(x_i, y_i, z_i, \dots, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0,$$

$$f''(x_i, y_i, z_i, \dots, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) > 0.$$

## Классификация связей.

1. Связи, не изменяющиеся с течением времени называются **стационарными**, а изменяющиеся – **нестационарными** (функция времени-  $t$ ).
2. Связи, налагающие ограничения только на координаты точек системы называются **геометрическими**, а налагающие ограничения еще и на скорости точек **кинематическими** (**дифференциальными**).
3. Связи, налагающие ограничения, которые сохраняются при любом положении механической системы, называются **удерживающими** (математически выражаются уравнениями), связи от которых система может освободиться – **неудерживающими** (математически выражаются неравенствами).



## Возможные (виртуальные перемещения).

Возможным перемещением механической системы называют любую совокупность элементарных перемещений ее точек из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

Действительные перемещения  $d\vec{r}_i$  (реальные) за время  $dt$

Возможные перемещения  $\delta\vec{r}_i$

Число независимых между собой возможных перемещений механической системы называется **числом степеней свободы** системы.

## Возможная работа.

Элементарная работа, которая на материальную точку сила могла бы совершать на возможном перемещении этой точки.

Работа активной силы  $\delta A_i^a$ , работа реакций связей  $\delta A_i^r$

Для идеальных связей  $\sum \delta A_i^r = 0$

## Принцип возможных перемещений.

Для равновесия механической системы с идеальными стационарными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил на любом возможном перемещении системы была равна нулю

$$\sum \delta A_i^a = 0$$

## Принцип Даламбера - Лагранжа.

Представляет собой совмещение принципа Даламбера и принципа возможных перемещений.

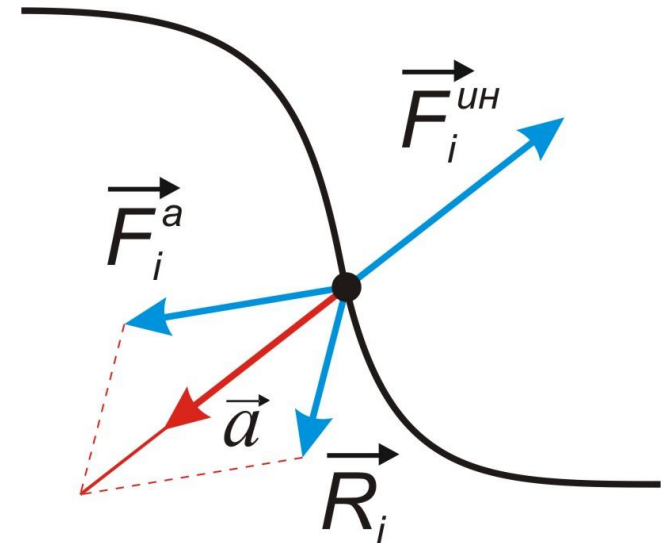
Рассмотрим движение системы материальных точек.

Связи наложенные на систему-  
**идеальные**

$\vec{F}_i^a$  равнодействующая  
активных сил;

$\vec{R}_i$  равнодействующая реакций связей;

$\vec{F}_i^{un} = -m\vec{a}$  сила инерции системы.



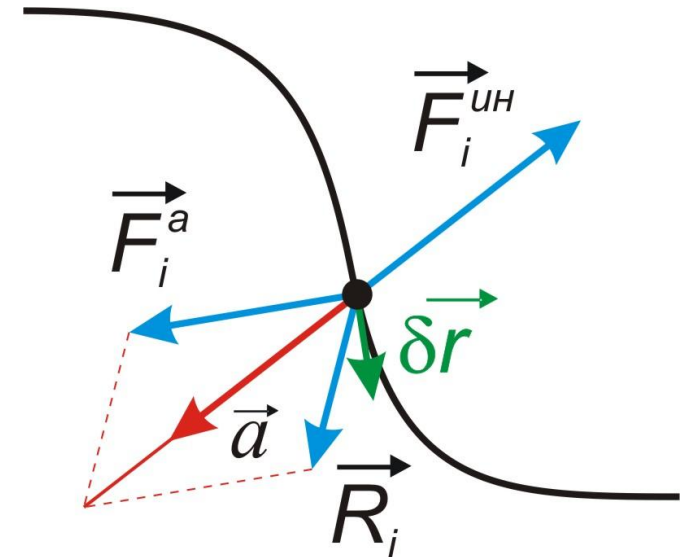
Согласно принципу Даламбера, для механической системы имеет место уравнение:

$$\sum \vec{F}_i^{\text{ан}} + \sum \vec{F}_i^{\text{ун}} = 0$$

или

$$\sum \vec{F}_i^a + \sum \vec{R}_i + \sum \vec{F}_i^{\text{ун}} = 0$$

Придадим точкам системы возможные перемещения  $\delta \vec{r}_i$



Сумма работ всех сил на возможном перемещении должна быть равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n \left( \vec{F}_i^a + \vec{R}_i + \vec{F}_i^{\text{ун}} \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Для идеальных связей: 
$$\sum_{i=1}^n R_i^{\square} \cdot \delta r^{\square} = 0$$

Следовательно: 
$$\sum_{i=1}^n \left( F_i^a{}^{\square} + F_i^{un}{}^{\square} \right) \cdot \delta r_i^{\square} = 0$$

$\sum_{i=1}^n F_i^a{}^{\square}$  элементарная работа равнодействующей  
активных сил, приложенных к точке, на возможном  
перемещении  $\delta r_i^{\square}$

$\sum_{i=1}^n F_i^{un}{}^{\square}$  элементарная работа равнодействующей  
силы инерции материальной точки, на возможном  
перемещении  $\delta r_i^{\square}$

## Общее уравнение динамики.

В любой момент времени сумма работ всех активных сил и сил инерции материальных точек несвободной механической системы с идеальными связями на любом возможном ее перемещении равна нулю.

$$\sum_{i=1}^n \delta A_i^{un} + \sum_{i=1}^n \delta A_i = 0$$