Задачи с параметрами

Определение

Уравнение $f(x;a)=0$, где x- переменная, a – произвольное действительное число, называют уравнением с параметром a.

Аналитический способ решения задач с параметрами

- Этот способ повторяет стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра.
- Аналитический способ решения задач с параметрами – самый трудный, он требует высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

1) Решить уравнение: $ax=1$

- На первый взгляд представляется возможным сразу дать ответ: $x = 1/a$
- Однако при $a=0$ данное уравнение решений не имеет.
- Ответ:

Если $a=0$, то нет решений;

Если $a\neq0$, то $x = 1/a$

2) Решить уравнение $\dfrac{a}{x-2}=\dfrac{x+1}{x^2-4}$

$x \neq \pm 2$, $ax+2a = x+1$, $(a-1)x=1-2a$, $a\neq 1$.

$$x=\frac{1-2a}{a-1}$$

Найдем значения a, которые приводят к недопустимым значениям x.

$$x=2,\ \ 2=\frac{1-2a}{a-1}$$

$$2a-2=1-2a$$

$$4a=3,\ \ a=\frac{3}{4}$$

Следовательно, *a* не может равняться $\dfrac{3}{4}$.

$$x = -2, \quad -2 = \frac{1-2a}{a-1},$$

$$-2a + 2 = 1 - 2a, \quad 0a = -1,$$

0a = - 1   невозможно ни при каких значениях а

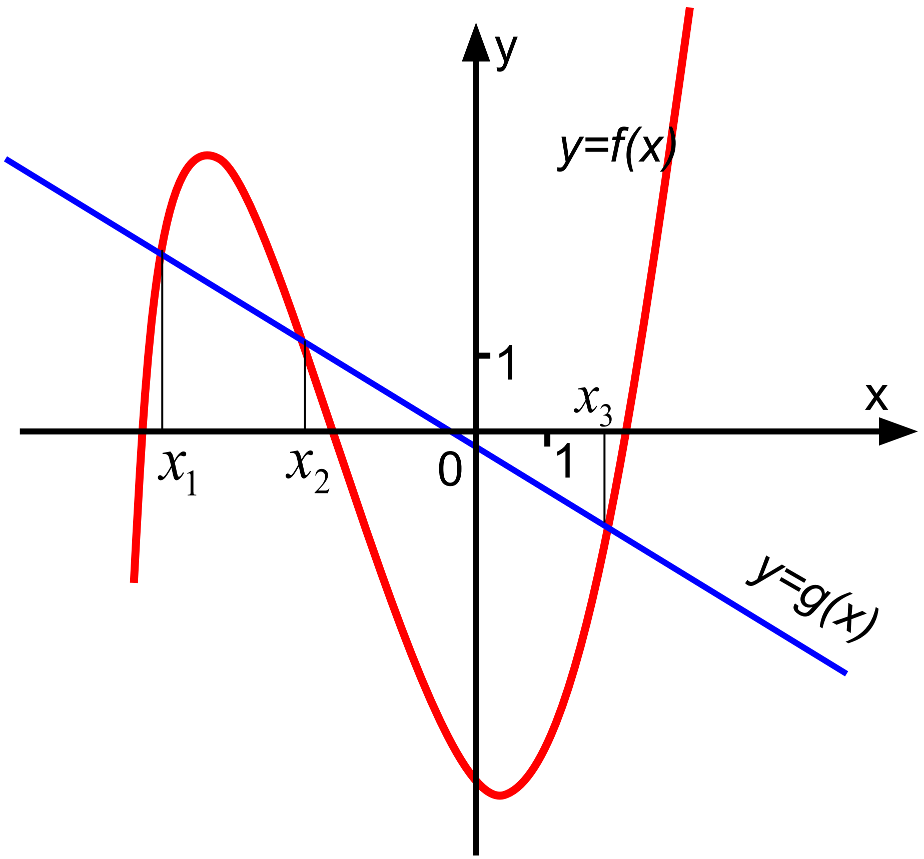
Ответ:

Если $a \neq 1 \;\; и \;\; a \neq \frac{3}{4}, \;\; то \;\; x = \frac{1-2a}{a-1}$

Если $a \neq 1 \;\; и\, при \;\; a = \frac{3}{4},$ решений нет.

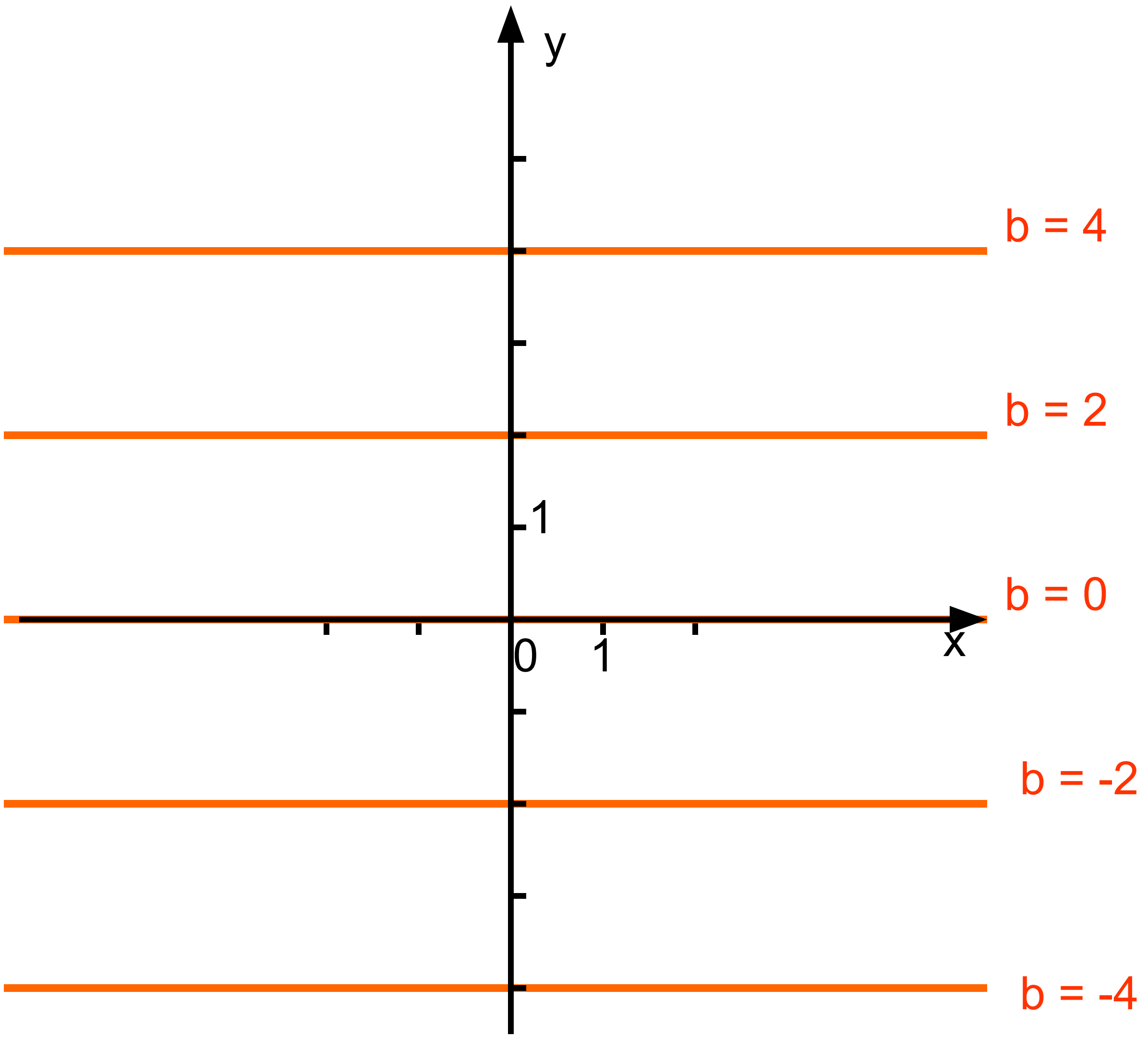
Графический способ

- При решении уравнения f(x)=g(x) графическим способом строятся графики функций y=f(x) и y=g(x) в одной системе координат.
- Как известно, число корней уравнения совпадает с количеством точек пересечения графиков построенных функций.
- Если график функции не зависит от параметра, то он неподвижен, а если зависит- то представляет собой семейство графиков, иначе - «подвижный» график.



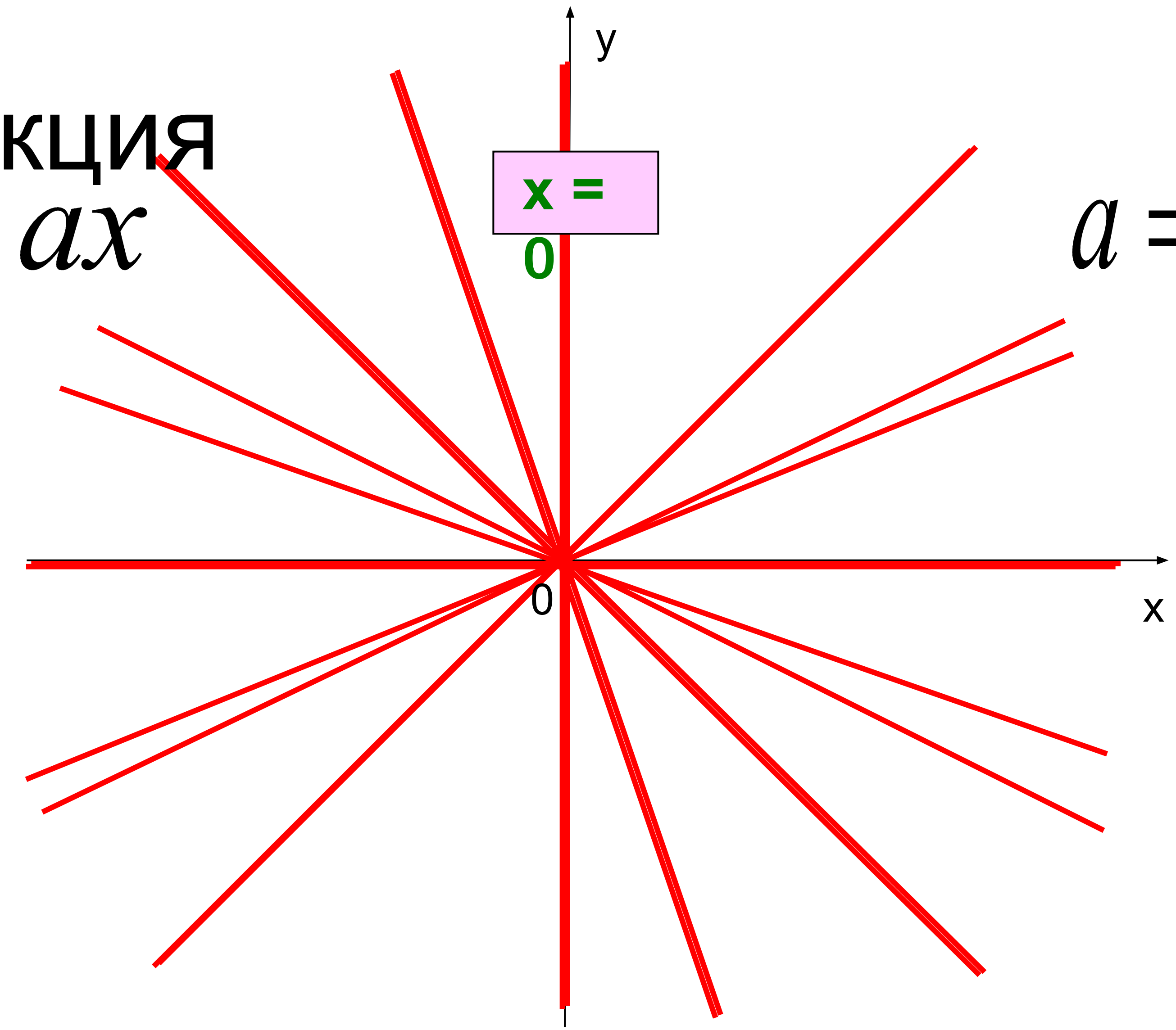
Функция
$y = b$

Графики таких функций – семейство параллельных оси Ох прямых.



Функция $y = ax$

$a =$



Графики таких функций – семейство прямых, проходящих через начало координат.

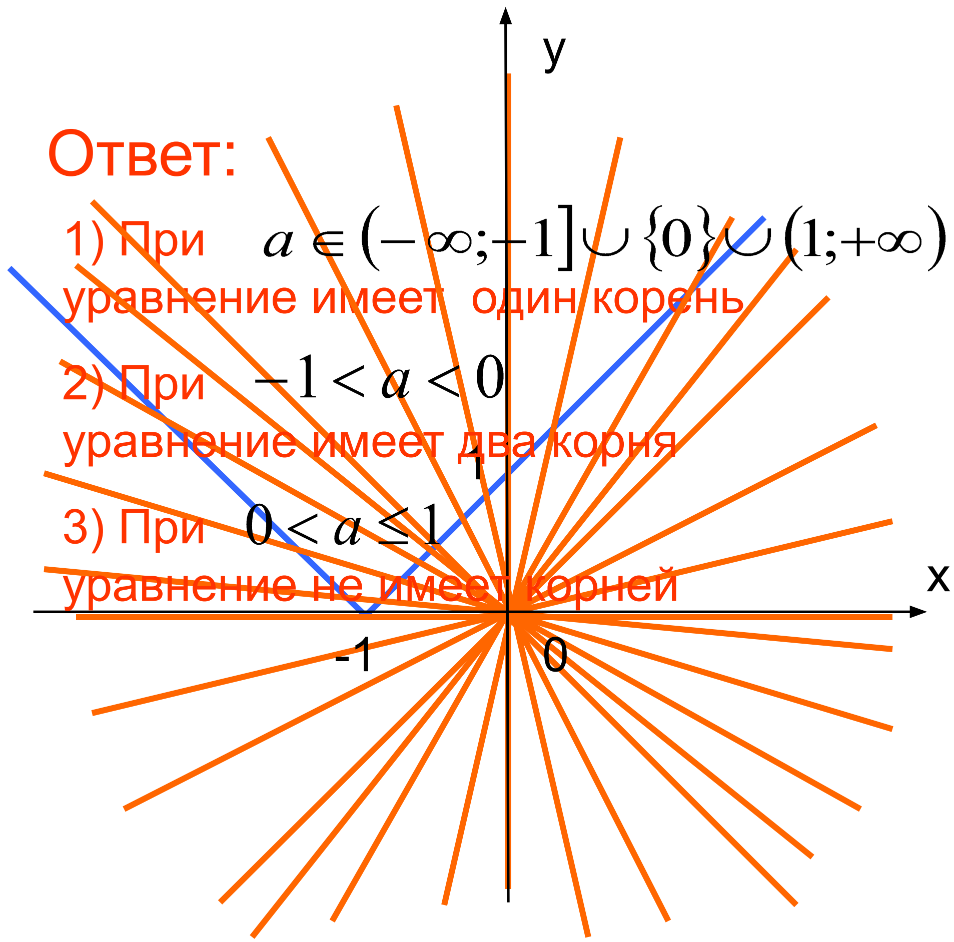
Задача. Сколько корней имеет уравнение $|x+1| = ax$ для каждого из значений параметра a ?

Решение.

1. Построим график функции $y = |x+1|$

2. Построим графики функции $y = ax$ и рассмотрим различные случаи в зависимости от параметра a.

Значения параметра	Количество корней уравнения
$-\infty < a \le -1$	1
$-1 < a < 0$	2
$a = 0$	1
$0 < a \le 1$	Нет корней
$1 < a < +\infty$	1



Ответ:

1) При $a \in (-\infty; -1] \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$ уравнение имеет один корень

2) При $-1 < a < 0$ уравнение имеет два корня

3) При $0 < a \le 1$ уравнение не имеет корней

Найдите все значения параметра *р*, при которых уравнение $p \cdot ctg^2 x + 2\sin x + p = 3$ имеет хотя бы один корень.

Решение.

$$p \cdot ctg^2 x + 2\sin x + p = 3,$$

$$p \cdot \left(ctg^2 x + 1\right) + 2\sin x = 3,$$

$$\frac{p}{\sin^2 x} + 2\sin x = 3, \qquad 2\sin^3 x - 3\sin^2 x + p = 0.$$

Пусть $t = \sin x,\ -1 \le t \le 1,\ t \ne 0,$ *тогда*

$$2t^3 - 3t^2 + p = 0, \qquad 2t^3 - 3t^2 = -p.$$

Построим график функции $y = 2t^3 - 3t^2$ *на отрезке* $-1 \le t \le 1$, *причем* $t \ne 0$

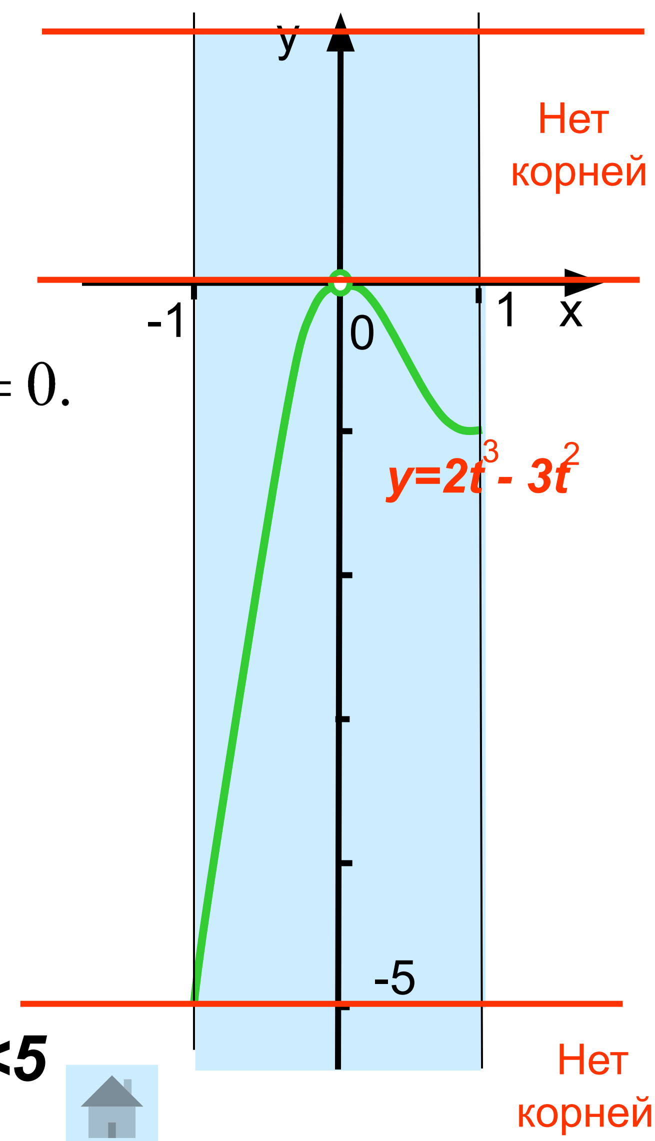
Графики функции **$y = -p$** ***- семейство параллельных оси Ох прямых.***

$-p \ge 0$, $p \le 0$ *-уравнение не имеет корней*

$-5 \le -p < 0$, $0 < p \le 5$ *– уравнение имеет один или два корня*

$-p < -5$, $p > 5$ *- уравнение не имеет корней*

Ответ: ***$0 < p < 5$***



Решение уравнений относительно параметра

- При решении задач этим способом переменные x и a принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и a и заканчиваем решение.

Задача. Решить уравнение

$$x^4 - 2ax^2 + a^2 - 1 = 0$$

- Решение.

Данное уравнение четвертой степени относительно переменной x и является квадратным относительно параметра a .

$$x^4 - 2ax^2 + a^2 - 1 = 0$$

$$a^2 - 2x^2a + x^4 - 1 = 0$$

$$D = 4x^4 - 4\left(x^4 - 1\right) = 4.$$

$$a_{1,2} = \frac{2x^2 \pm 2}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = x^2 + 1, \\ a = x^2 - 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = a - 1, \\ x^2 = a + 1. \end{array}\right.$$

Возможны различные случаи. Результаты исследования этих случаев запишем в таблицу:

a	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$
$x^2=a-1$	-	-	-	0	+
$x^2=a+1$	-	0	+	+	+
x	Нет действитель-ных	$x=0$	$x_1=\sqrt{a+1},$ $x_2=-\sqrt{a+1}$	$x_1=0$ $x_2=\sqrt{2},$ $x_3=-\sqrt{2}$	$x_{1,2}=\pm\sqrt{a-1},$ $x_{3,4}=\pm\sqrt{a+1}$

Ответ: если a<-1, то действительных корней нет;

если a= -1, то $x=0$;

если -1<a<1, то $x_1=\sqrt{a+1},\ x_2=-\sqrt{a+1}$;

если a=1, то $x_1=0,\ x_2=\sqrt{2},\ x_3=-\sqrt{2}$;

если a>1, то $x_{1,2}=\pm\sqrt{a-1},\ x_{3,4}=\pm\sqrt{a+1}$.

Задача 1. Найдите все значения a, при которых область определения функции

$$y=\left(a^{x}\cdot x^{(x+3)\log_{x}a}+a^{8+3\log_{a}x}-\left(\sqrt[3]{x}\right)^{9+6x\log_{x}a}-\sqrt{a^{22}}\right)^{-0,5}$$

содержит ровно три целых числа.

Решение.

Преобразуем выражение в скобках:

$$a^{x}\cdot x^{(x+3)\log_{x}a}+a^{8+3\log_{a}x}-\left(\sqrt[3]{x}\right)^{9+6x\cdot\log_{x}a}-\sqrt{a^{22}}=$$

$$=a^{x}\cdot a^{x+3}+a^{8}\cdot x^{3}-x^{3}\cdot a^{2x}-a^{11}=a^{2x}\cdot a^{3}+a^{8}\cdot x^{3}-x^{3}\cdot a^{2x}-a^{11}=$$

$$=a^{2x}\left(a^{3}-x^{3}\right)+a^{8}\left(x^{3}-a^{3}\right)=\left(a^{3}-x^{3}\right)\left(a^{2x}-a^{8}\right).$$

Областью определения данной функции является множество решений системы неравенств:

$$\begin{cases}\left(a^{3}-x^{3}\right)\left(a^{2x}-a^{8}\right)>0,\\ x>0,\\ x\neq 1.\end{cases}$$

Решим первое неравенство: $\left(a^3-x^3\right)\left(a^{2x}-a^8\right)>0.$

Пусть $g(x)=a^3-x^3$, $f(x)=a^{2x}-a^8$.

Функция $g(x)$ - убывающая при любом значении параметра a.
$g(x)=0$ при $x=a$.

Функция $f(x)$ - монотонно убывает или возрастает в зависимости от значения параметра a. $f(x)=0$ при $x=4$.

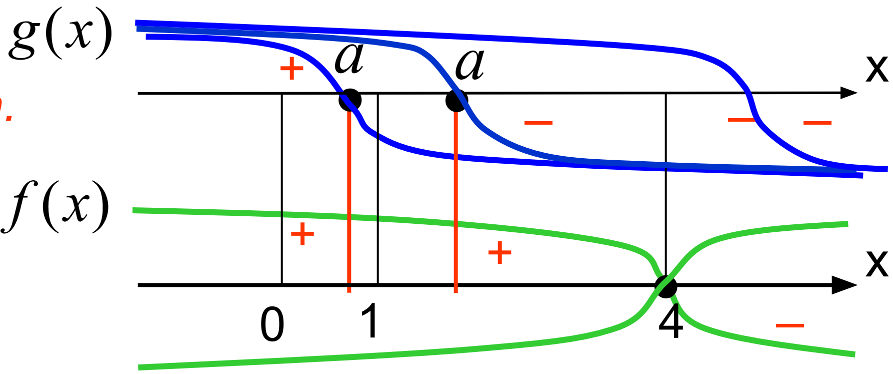
Рассмотрим различные случаи в зависимости от значений параметра a.

1. $0<a<1$, $x\in(0;a)\cup(4;+\infty)$

Это множество включает в себя бесконечное число целых чисел.

2. $1<a<4$ $x\in(a;4)$

Это множество может содержать только два целых числа.



3. $a>4$, $x\in(4;a)$

Данное множество содержит три целых числа, если $7<a\le 8$

Ответ: $a\in(7;8]$

Задача 2. Найдите все положительные значения параметра b, при которых число 1 принадлежит области определения функции

$$y = \left(b^{2+5bx} - b^{b^2x+6x}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

Решение.

Найдем область определения данной функции.

$$b^{2+5bx} - b^{b^2x+6x} > 0$$

$$b^{2+5bx} > b^{b^2+6x}$$

Для положительных значений b рассмотрим три различных случая

$$b^{2+5bx} > b^{b^2+6x}$$

0 < b <1

$$2+5bx < b^2x+6x$$

$$\left(b^2-5b+6\right)x > 2$$

b=1

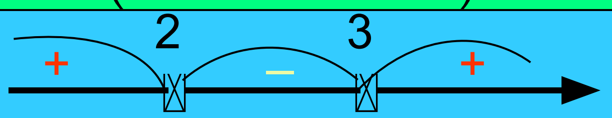
Нет решений

b>1

$$2+5bx > b^2x+6x$$

$$\left(b^2-5b+6\right)x < 2$$

$$\left(b^2-5b+6\right) = (b-2)(b-3)$$



b<2, b> 3

$$x > \frac{2}{(b-2)(b-3)}$$

2<b<3

b=2, b=3

b<2, b>3

$$x < \frac{2}{(b-2)(b-3)}$$

2<b<3

$$x > \frac{2}{(b-2)(b-3)}$$

b=2, b=3

$$x \in R$$

Число 1 принадлежит области определения функции

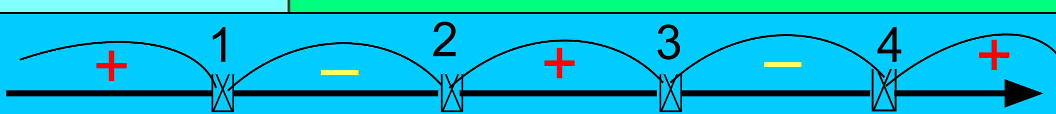
$$\frac{(b-1)(b-4)}{(b-2)(b-3)} > 0$$

$$\frac{(b-1)(b-4)}{(b-2)(b-3)} < 0$$

$$\frac{(b-1)(b-4)}{(b-2)(b-3)} > 0$$

$$1 \in R$$

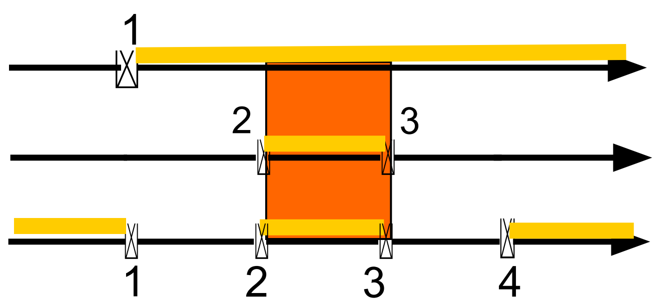
$$\frac{(b-1)(b-4)}{(b-2)(b-3)}$$



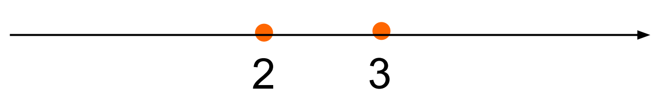
$$\begin{cases} 0 < b < 1, \\ b < 2, \\ b < 1;\ 2 < b < 3;\ b > 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b > 1, \\ b < 2;\ b > 3, \\ 1 < b < 2;\ 3 < b < 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b > 1, \\ 2 < b < 3, \\ b < 1;\ 2 < b < 3;\ b > 4; \end{cases}$$



$b = 2;\ b = 3.$

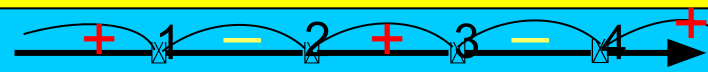


0 < b <1 | b>1

b<2 | b<2, b>3 | 2<b<3 | b=2, b=3

$$\frac{(b-1)(b-4)}{(b-2)(b-3)} > 0 \qquad \frac{(b-1)(b-4)}{(b-2)(b-3)} < 0 \qquad \frac{(b-1)(b-4)}{(b-2)(b-3)} > 0$$

$$\frac{(b-1)(b-4)}{(b-2)(b-3)}$$

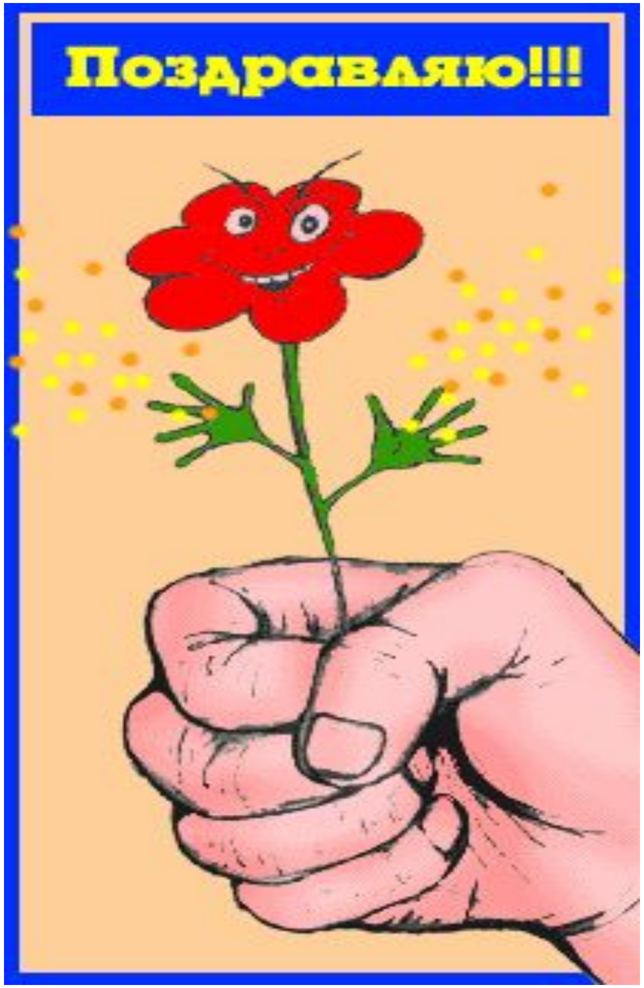


$2 < b < 3,$

$b = 2;\ b = 3.$

Ответ: при $b \in (0;1) \cup (1;4)$

число 1 принадлежит области определения функции.



Способы решения задач с параметрами

Решение

$a^x \cdot x^{(x+3)\log_x a} + a^{8+3\log_a x} - \left(\sqrt[3]{\sqrt{x}}\right)^{9+6x\cdot\log_x a} - \sqrt{a^{22}}$

$= a^x \cdot a^{x+3} + a^8 \cdot x^3 - x^3 \cdot a^{2x} - a^{11}$

$= a^{2x} \cdot a^3 + a^8 \cdot x^3 - x^3 \cdot a^{2x} - a^{11}$

$= a^{2x}\left(a^3 - x^3\right) + a^8\left(x^3 - a^3\right)$

Аналитический

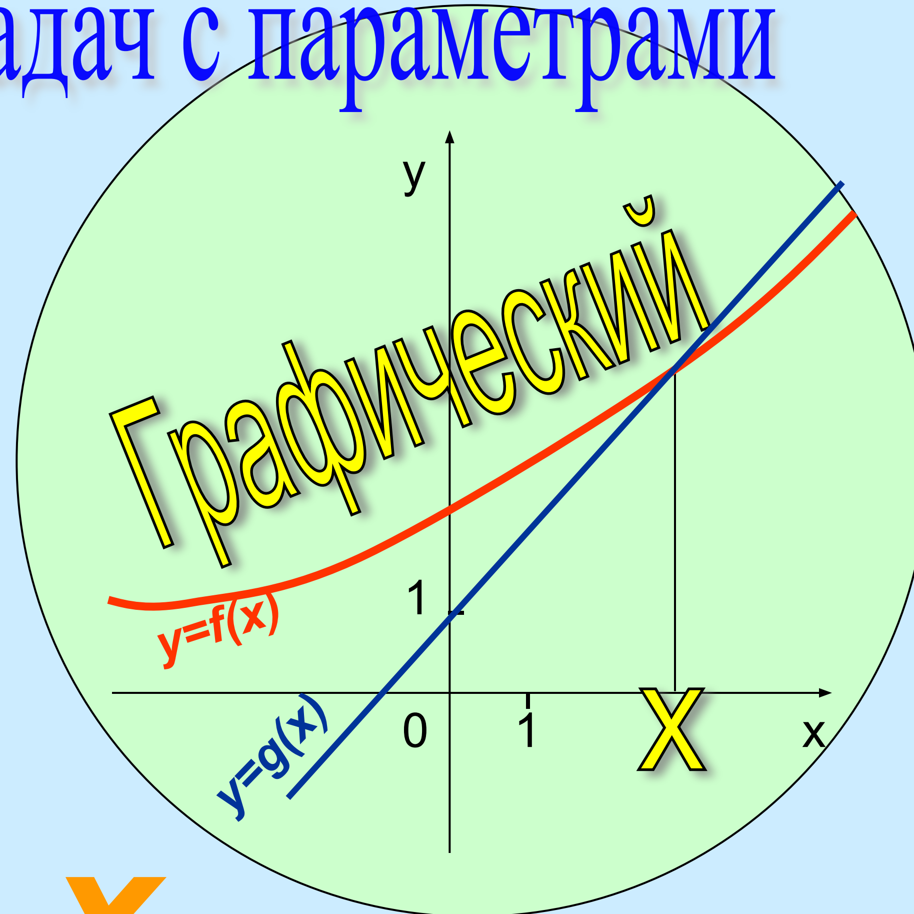
$= a^x \cdot a^{x+3} + a^8 \cdot x^3 - x^3 \cdot a^{2x} - a^{11}$

$= a^{2x} \cdot a^3 + a^8 \cdot x^3 - x^3 \cdot a^{2x} - a^{11}$

$= a^{2x}\left(a^3 - x^3\right) + a^8\left(x^3 - a^3\right)$

$= \left(a^3 - x^3\right)\left(a^{2x} - a^8\right)$

Ответ: $a=5$



x

неизвестная величина параметра *a*

Решение относительно параметра