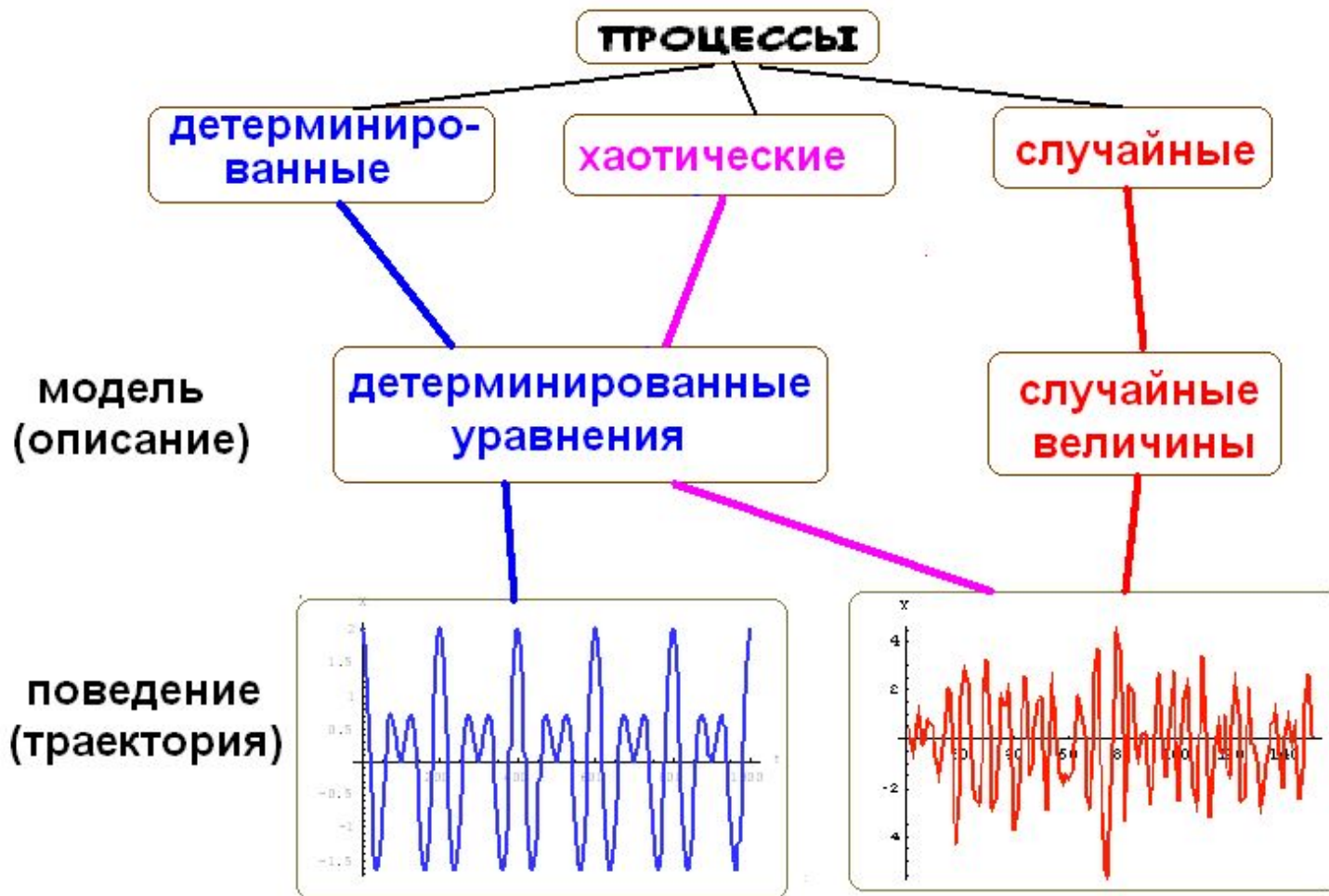
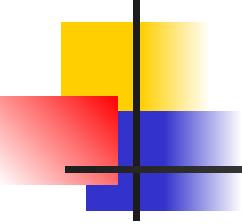


Лекция 8

Случайные процессы

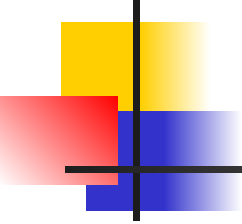
Классификация процессов





Классификация процессов

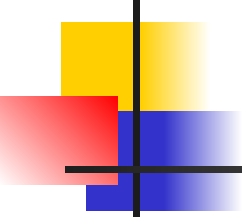
С практической точки зрения решение о **случайности** или **детерминированности** процесса основывается на способности воспроизвести процесс в ходе контролируемого эксперимента. Если это приводит к одним и тем же результатам, то процесс считается детерминированным.



Классификация процессов

Детерминированные процессы – это процессы, которые можно описать математическими формулами (т.е. мы можем определить положение системы в любой момент времени с разумной точностью).

▶ Движение спутника на околоземной орбите, измерение температуры воды при нагревании.



Классификация процессов

Процессы, такие как высота волн, напряжение в нашей электросети, изменение численности жителей в Харькове с течением времени, не являются детерминированными – положение системы в таких процессах точно определить невозможно. Для описания этих процессов требуются **вероятностные понятия и статистические характеристики.**

Теорией случайных процессов называется математическая наука, изучающая случайные явления в динамике их развития.

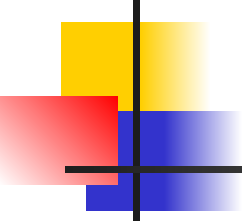
Марков Андрей Андреевич



1856-1922

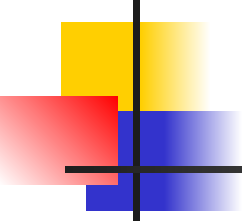
Русский математик.

Написал около 70 работ по теории чисел, теории приближения функций, теории вероятностей. Существенно расширил сферу применения закона больших чисел и центральной предельной теоремы. Является основоположником теории случайных процессов.



Классификация процессов

Третий вид процессов - **хаотические**. С одной стороны – **детерминированные**. Но очень **нелинейные**, с **сильной зависимостью от начальных условий**. В реальности начальные условия точно повторить нельзя, и поведение системы через некоторое время становится непредсказуемым. На выходе такие системы имеют случайные траектории и к ним требуются вероятностные подходы.

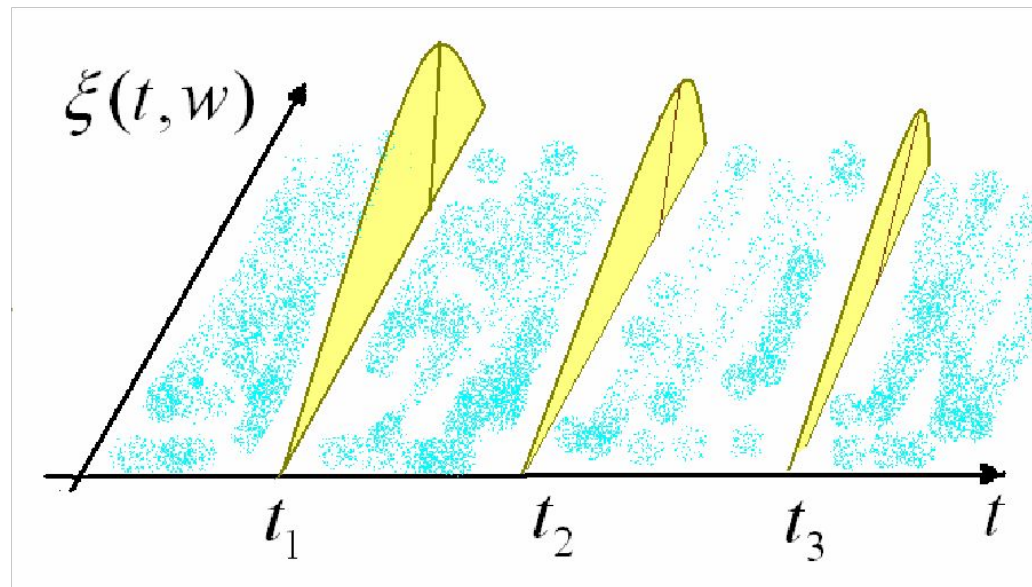


Определение случайного процесса

Случайные процессы являются математическими моделями для описания случайных явлений, развивающихся во времени. При этом предполагается, что состояние в текущий момент времени есть случайная величина $\xi(t, \omega)$. На пространстве элементарных событий Ω определена σ -алгебра его подмножеств F и для любого события $A \subset F$ определена его вероятность $P(A)$. Таким образом задано вероятностное пространство $\langle \Omega, F, P \rangle$.

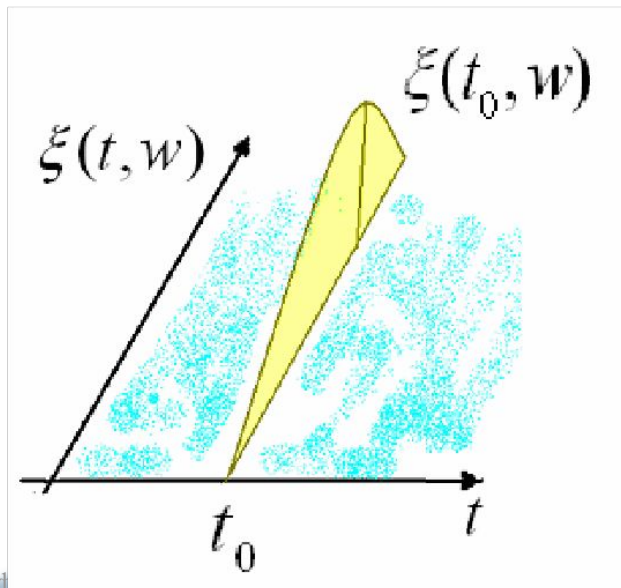
Определение случайного процесса

Случайный процесс есть семейство случайных величин $\{\xi(t, \omega)\}$, определённых на $\langle \Omega, F, P \rangle$, где под параметром t понимается время.



Определение случайного процесса

Пусть t_0 - фиксированный момент. Случайная величина $\xi(t_0, \omega)$ называется **сечением случайного процесса** в точке t_0 .

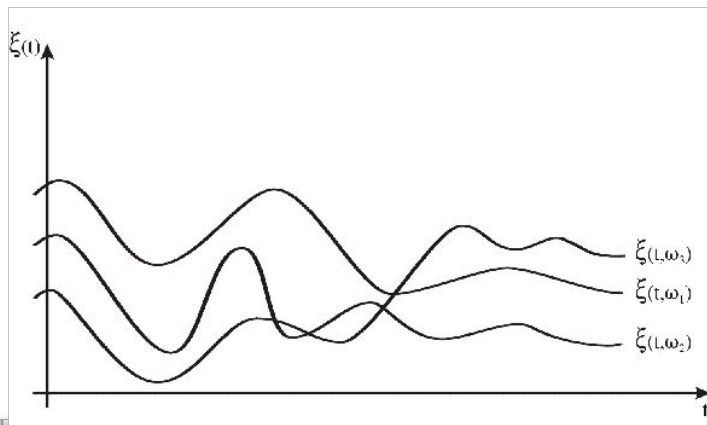


Случайный процесс можно рассматривать как совокупность случайных величин, зависящих от параметра t .

Определение случайного процесса

Пусть $\omega_0 \in \Omega$ - фиксируемый результат испытания. Тогда **неслучайная функция** $\xi(t, \omega_0)$ (в которую превращается процесс в результате испытания) называется **реализацией** (траекторией, выборочной функцией) процесса.

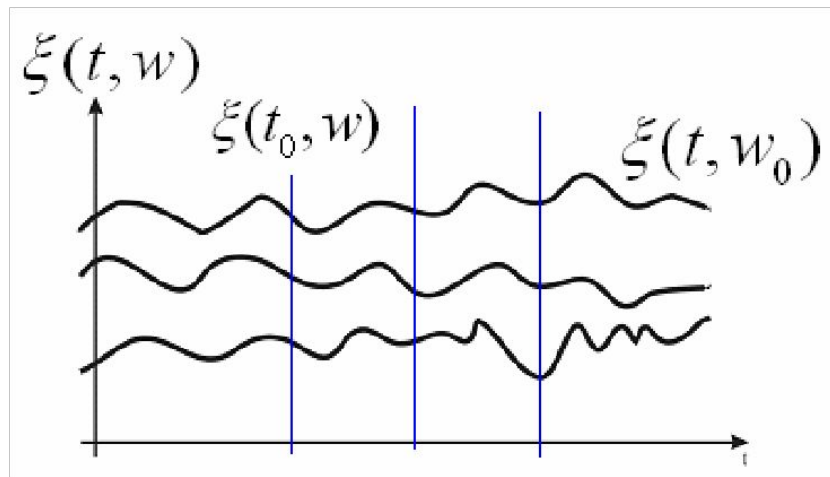
С реализациями мы чаще всего имеем дело на практике.



Таким образом, случайный процесс можно рассматривать как **совокупность всех возможных его реализаций**.

Определение случайного процесса

Случайный процесс можно рассматривать как **совокупность случайных величин**, зависящих от параметра t .



Случайный процесс можно рассматривать как **совокупность всех возможных реализаций**.

Непрерывность и дискретность случайных процессов

Случайный процесс называется **процессом с дискретным временем** (или случайной последовательностью) если система, в которой он протекает, может менять своё состояние только в дискретные моменты времени.

► Некто купил всяких лотерейных билетов. Выигрыши происходят в определённые дни. Случайный процесс $\xi(t)$ - число билетов, выигравших до момента времени t .

Случайный процесс называется **процессом с непрерывным временем**, если переходы системы могут происходить в любой момент t .

Непрерывность и дискретность случайных процессов

Случайный процесс называется **процессом с дискретными состояниями**, если в любой момент времени множество его состояний конечно или счётно (если **любое его сечение – дискретная случайная величина**).

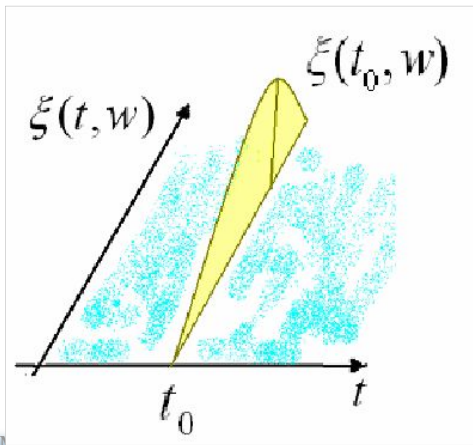
► Техническое устройство может иметь три состояния: работает нормально, работает с перебоями, ремонтируется. Случайный процесс $\xi(t)$ - состояние устройства в момент времени t

Случайный процесс называется **процессом с непрерывными состояниями**, если множество его состояний несчётно (если **любое его сечение – непрерывная случайная величина**).

Законы распределения случайного процесса

Универсальной, исчерпывающей характеристикой **случайной величины** является её **функция распределения** $F(x) = P(\xi < x)$.

При любом фиксированном t получим сечение случайного процесса. Это случайная величина, которая имеет закон распределения.



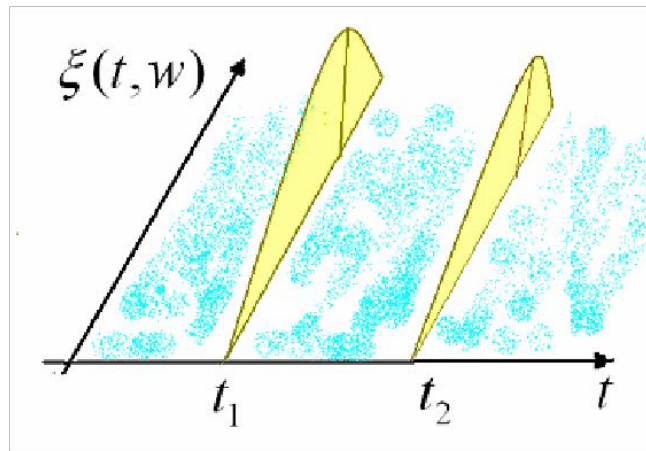
$$F_{\xi}(x, t) = P(\xi(t) < x) \quad -$$

одномерный закон распределения. Функция зависит от двух аргументов (t и x) и характеризует свойства одного отдельного сечения.

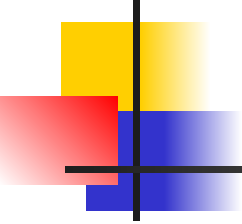
Законы распределения случайного процесса

Двумерный закон распределения

$F_{\xi}(x_1, t_1, x_2, t_2) = P(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2)$ - функция 4-х аргументов. Это уже неприятно.



Далее – трехмерные и т.д. Теоретически число сечений можно увеличивать неограниченно.



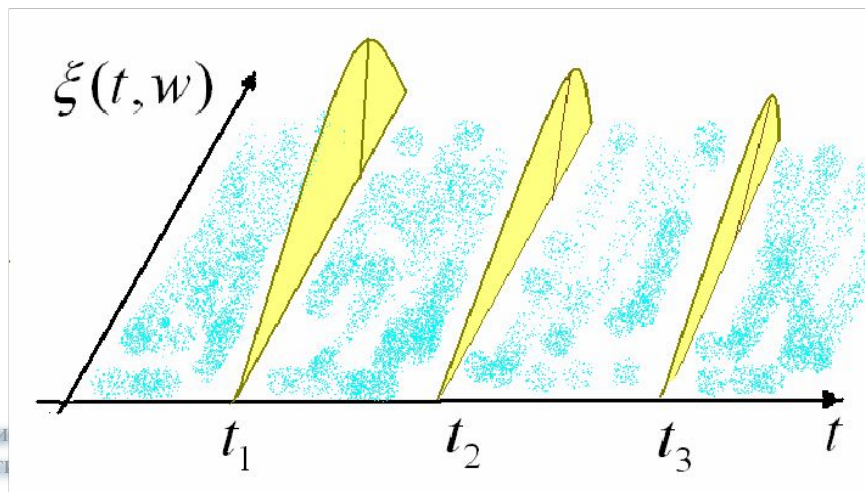
Законы распределения случайного процесса

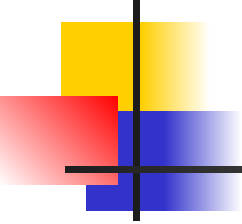
Однако на практике очень часто вполне можно ограничиться двумерным законом. Например, огромный класс **марковских процессов** (процессы без последствия), **гауссовские процессы** (очень широкий класс процессов, которые являются моделями сигналов и помех в радиотехнике), для которых двумерный закон распределения является исчерпывающей характеристикой.

Законы распределения случайного процесса

Пусть $\xi(t)$ - случайный процесс и задано некоторое произвольное множество моментов времени. Соответствующая совокупность случайных величин $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$ имеет n – мерную функцию распределения

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = P\{\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n\}.$$



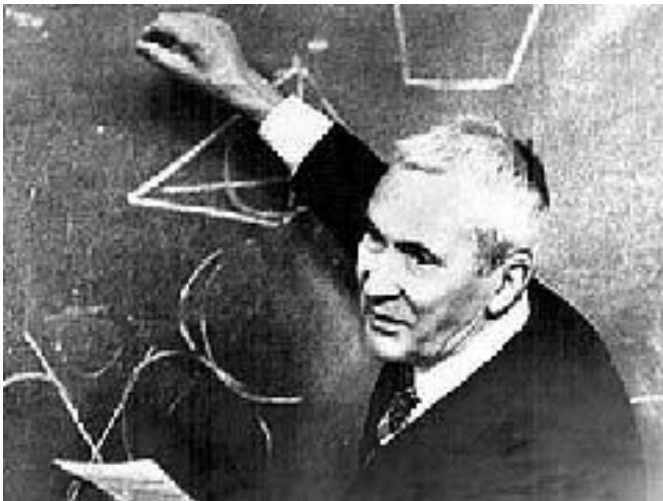


Законы распределения случайного процесса

Семейство конечномерных распределений случайного процесса – это совокупность n -мерных функций распределения для различных n и моментов t .

Семейство конечномерных распределений является основной характеристикой случайного процесса, полностью определяющей его свойства. Говорят, что случайный процесс, задан, если задано его семейство конечномерных распределений.

Колмогоров Андрей Николаевич



1903-1987

Великий русский
математик.

Моментные характеристики

Для характеристики случайной величины были определены неслучайные числовые характеристики – математическое ожидание $M[\xi]$ - среднее значение случайной величины; дисперсия $D[\xi]$ - разброс значений относительно $M[\xi]$; корреляционный момент $COV[\xi, \eta] = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$, который характеризует степень линейной зависимости между случайными величинами ξ и η .

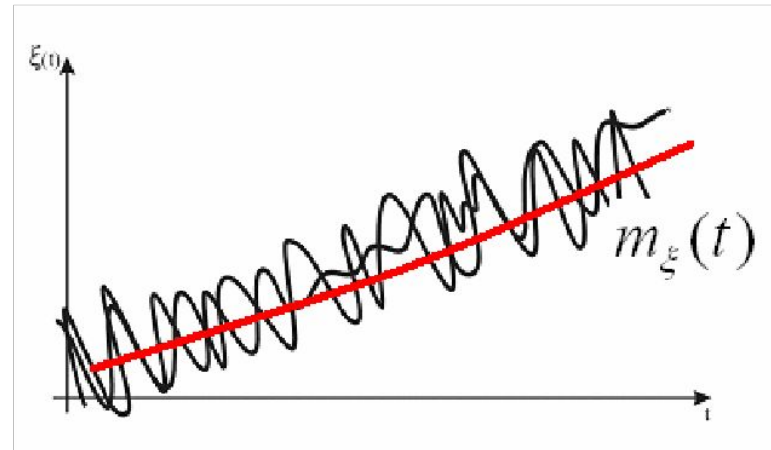
Так как сечения случайного процесса представляют собой случайные величины, мы можем определить основные моментные характеристики случайного процесса.

Моментные характеристики

Неслучайная функция $m_\xi(t)$, которая $\forall t$ равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса $m_\xi(t) = M[\xi(t)]$, называется **математическим ожиданием случайного процесса**.

Его можно найти через одномерный закон распределения:

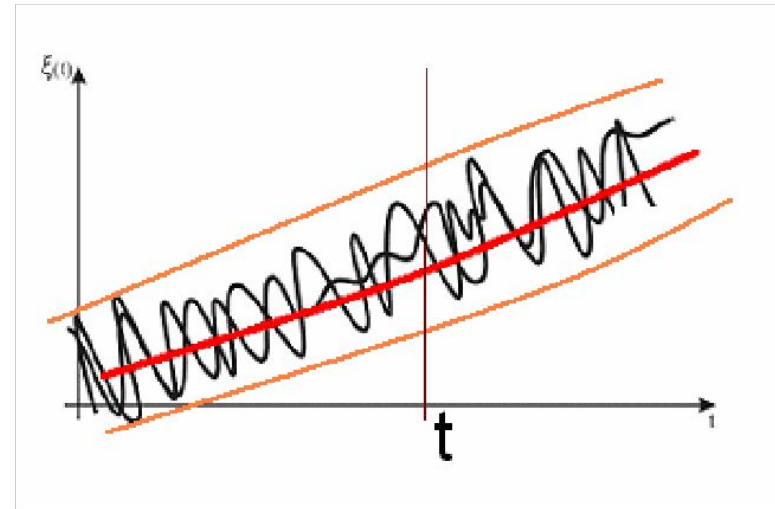
$$m_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x, t) dx.$$



Моментные характеристики

Дисперсия случайного процесса — это неслучайная функция, которая $\forall t$ равна дисперсии соответствующего сечения. $D_{\xi}(t) = D[\xi(t)] = M[(\xi(t) - M\xi(t))^2]$ - можно найти через одномерный закон распределения.

$$D_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{\xi}(x, t) dx - m_{\xi}^2(t)$$

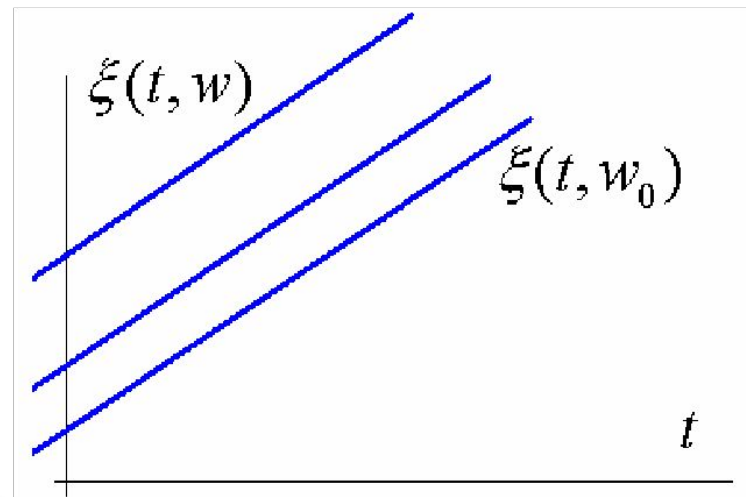


Моментные характеристики. Пример.

Задан случайный процесс:

$$x(t) = a \cdot \xi + t \quad \xi \sim N(m, \sigma)$$

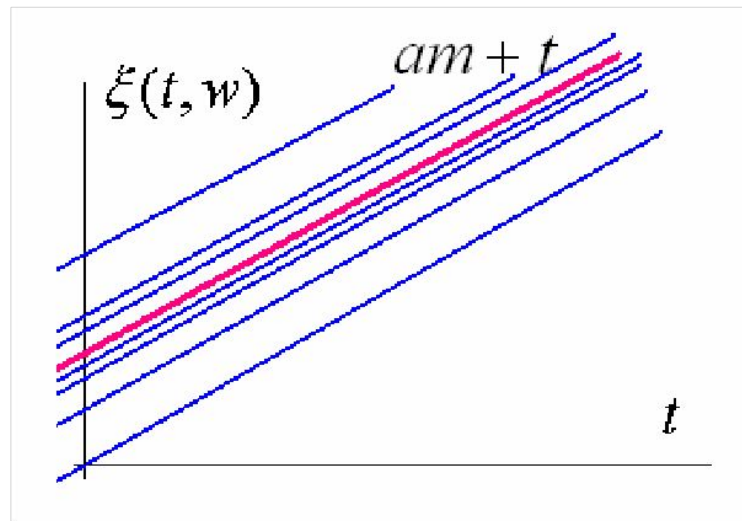
Найти его математическое ожидание и дисперсию.
Реализации процесса:



Моментные характеристики. Пример.

$$m_x(t) = M[a\xi + t] = am + t$$

$$D_x(t) = D[a\xi + t] = D[a\xi] + D[t] = a^2\sigma^2$$

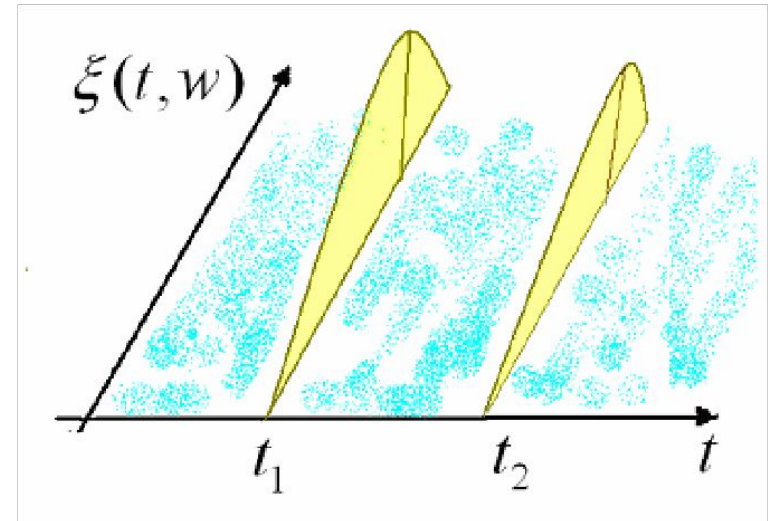


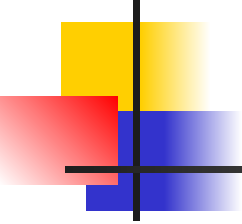
Корреляционная функция

Неслучайная функция

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = M[(\xi(t_1) - m_{\xi}(t_1))(\xi(t_2) - m_{\xi}(t_2))] = \\ M[(\xi(t_1)\xi(t_2))] - m_{\xi}(t_1)m_{\xi}(t_2)$$

называется
корреляционной функцией
случайного процесса.





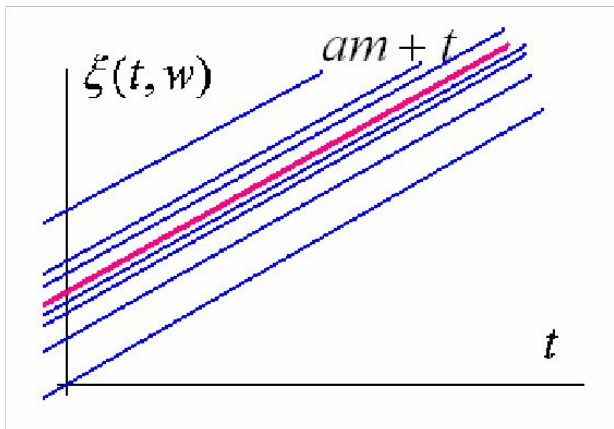
Корреляционная функция

Корреляционная функция для каждой пары чисел t_1 и t_2 равна **корреляционному моменту соответствующих сечений** и характеризует степень их линейной зависимости. Для расчёта корреляционной функции необходимо знать двумерное распределение:

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{\xi}(t_1))(x_2 - m_{\xi}(t_2)) p_{\xi}(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1, dx_2$$

Корреляционная функция. Пример.

$$x(t) = a \cdot \xi + t \quad \xi \sim N(m, \sigma)$$



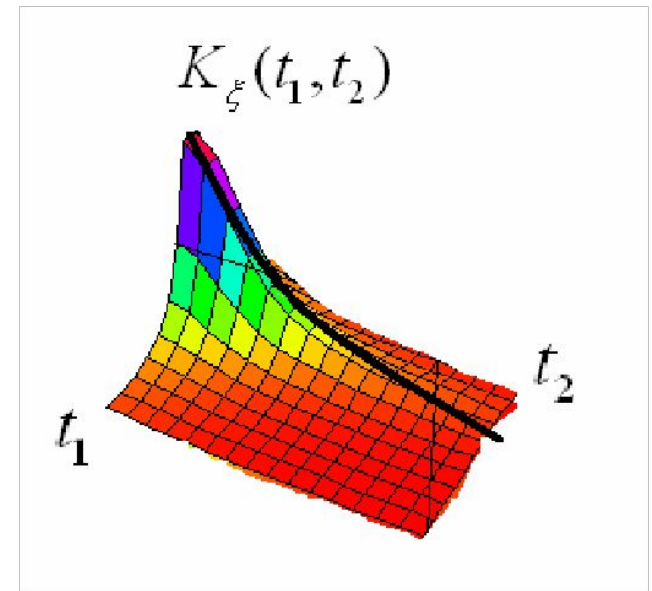
$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= M \left[(x(t_1) - m_x(t_1))(x(t_2) - m_x(t_2)) \right] = \\ &= M \left[(a\xi + t_1 - am - t_1)(a\xi + t_2 - am - t_2) \right] = \\ &= a^2 M \left[(\xi - m)^2 \right] = a^2 \sigma^2 \end{aligned}$$

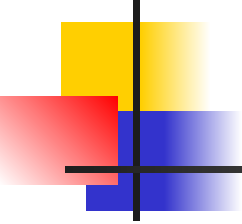
Свойства корреляционной функции

1. При равенстве аргументов $t_1 = t_2 = t$ $K_\xi(t, t) = D_\xi(t)$.
2. Корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов $K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi(t_2, t_1)$

3. Модуль корреляционной функции не превосходит произведение среднеквадратичных отклонений соответствующих сечений

$$|K_\xi(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_\xi(t_1)D_\xi(t_2)}$$





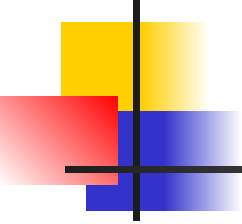
Свойства корреляционной функции

Нормированная корреляционная функция

$$r_{\xi}(t_1, t_2) = \frac{K_{\xi}(t_1, t_2)}{\sigma_{\xi}(t_1)\sigma_{\xi}(t_2)}$$

(аналог - коэффициент корреляции $\rho = \frac{COV(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$).

Свойства нормированной корреляционной функции следуют из свойств корреляционной функции.



Свойства корреляционной функции

1) При равенстве аргументов $t_1 = t_2$

$$r_{\xi}(t) = \frac{D_{\xi}(t)}{\sigma_{\xi}(t)\sigma_{\xi}(t)} = 1.$$

2) $r_{\xi}(t_1, t_2) = r_{\xi}(t_2, t_1).$

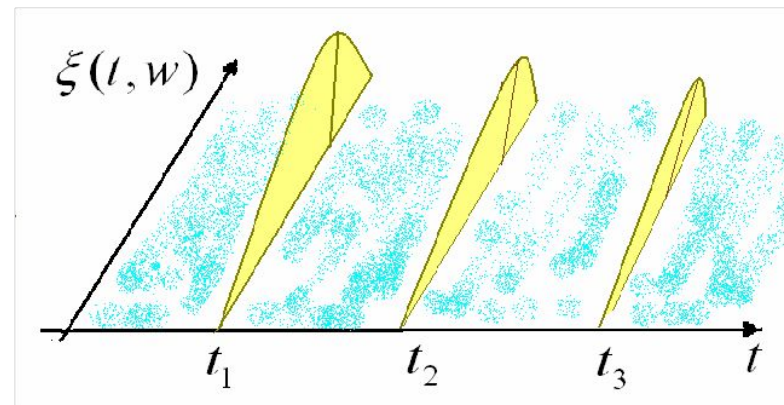
3) $|r_{\xi}(t_1, t_2)| \leq 1.$

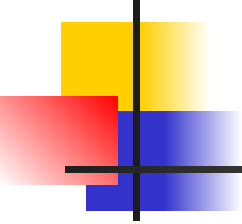
Стационарные процессы

Случайный процесс $\xi(t)$ называется **стационарным в узком смысле**, если многомерные законы распределения не меняются при сдвиге всех временных переменных на одно и то же число.

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F_{\xi}(x_1, \dots, x_n; t_1 + h, \dots, t_n + h)$$

$$\forall n \in N, \forall h \in R.$$





Стационарные процессы

Более обширный класс - процессы, стационарные в широком смысле. Чаще всего под стационарностью понимается стационарность в широком смысле.

Случайный процесс называется **стационарным в широком смысле** если:

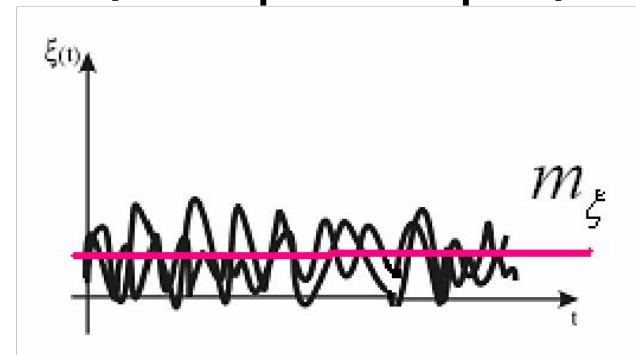
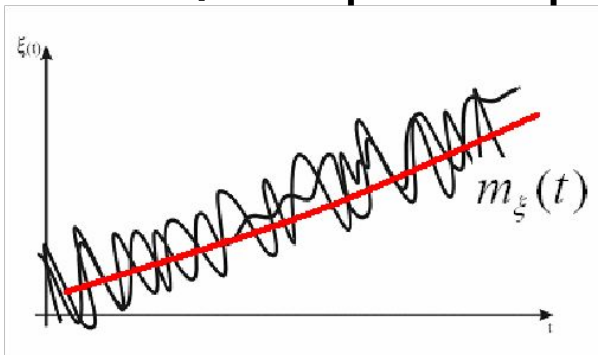
$$m_{\xi}(t) = m_{\xi} = \text{const},$$

$$D_{\xi}(t) = D_{\xi} = \text{const},$$

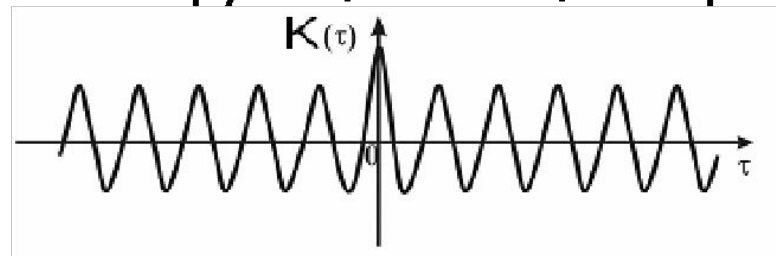
$$K_{\xi}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_2 - t_1) = K_{\xi}(\tau).$$

Стационарные процессы

Нестационарный процесс Стационарный процесс



Корреляционная функция стационарного процесса

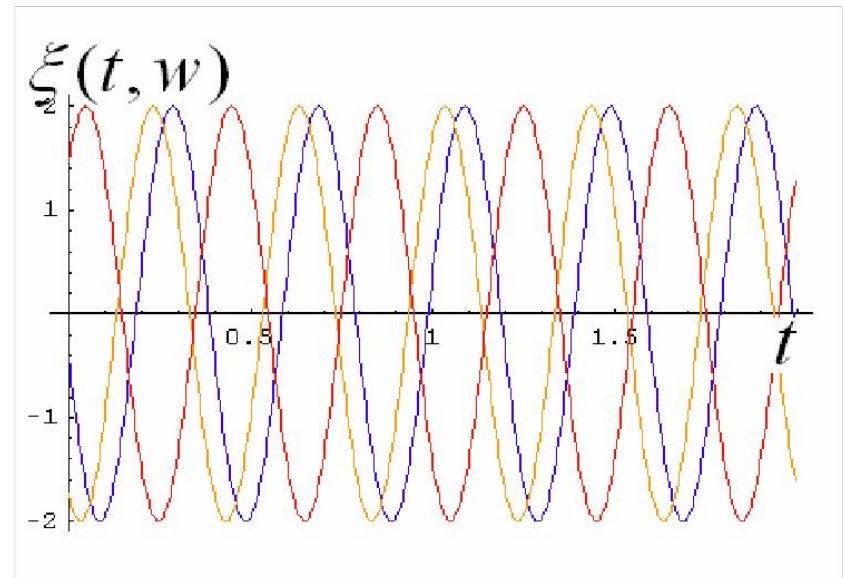


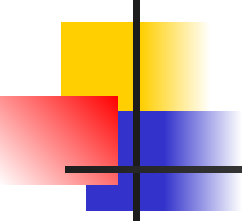
Стационарные процессы. Пример.

Задан случайный процесс:

$$\xi(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad \varphi \sim R[0, 2\pi]$$

Проверить, является ли
он стационарным.





Стационарные процессы. Пример.

Плотность распределения случайной величины ξ :

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{2\pi}.$$

Математическое ожидание процесса:

$$\begin{aligned} M_{\xi}(t) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} A \cos(\omega t + x) \cdot dx = \\ &= \frac{A}{2\pi} \sin(\omega t + x) \Big|_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Стационарные процессы. Пример.

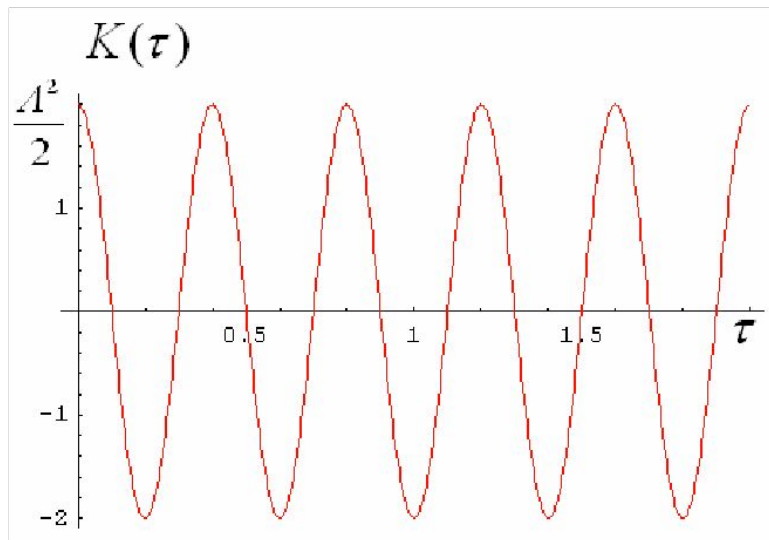
Корреляционная функция процесса:

$$\begin{aligned}
 K(t_1, t_2) &= M \left[\left(\xi(t_1) - m_\xi(t_1) \right) \left(\xi(t_2) - m_\xi(t_2) \right) \right] = M \left[\xi(t_1) \xi(t_2) \right] = \\
 &= \int_0^{2\pi} A \cos(\omega t_1 + x) A \cos(\omega t_2 + x) \cdot \frac{1}{2\pi} dx = \\
 &= \frac{A^2}{2\pi \cdot 2} \left(\int_0^{2\pi} x \cos(\omega t_1 - \omega t_2) dx + \int_0^{2\pi} \cos(\omega t_1 + \omega t_2 + 2x) dx \right) = \\
 &= \frac{2\pi A^2}{4\pi} \cos(\omega t_1 - \omega t_2) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega t_1 - \omega t_2) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega(t_1 - t_2))
 \end{aligned}$$

Стационарные процессы. Пример.

Дисперсия процесса

$$D_{\xi}(t) = K(t, t) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega(t - t)) = \frac{A^2}{2}.$$

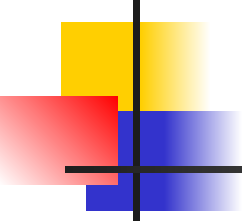


$$m_{\xi}(t) = m_{\xi} = \text{const},$$

$$D_{\xi}(t) = D_{\xi} = \text{const}$$

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = K_{\xi}(\tau).$$

Процесс стационарный.

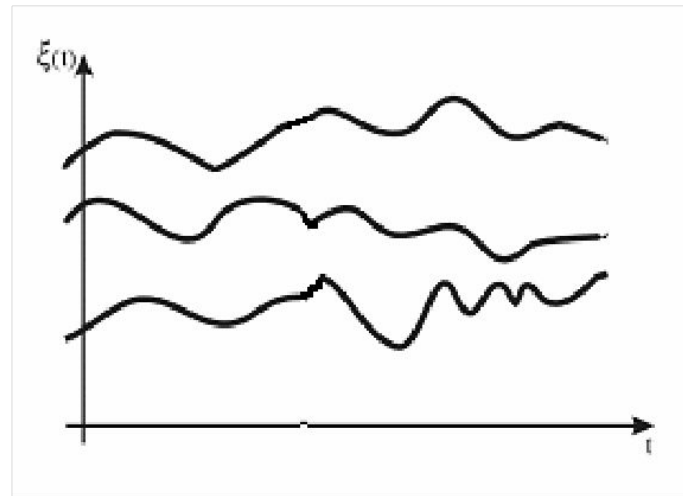
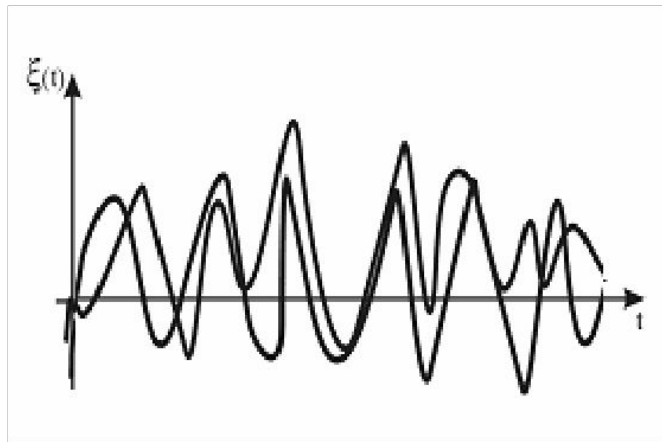


Эргодические процессы

Самыми важными (по прикладному значению) из стационарных процессов для нас являются эргодические. Стационарный случайный процесс называется **эргодическим**, если для него осреднение по ансамблю реализаций может быть заменено осреднением по времени по одной реализации.

Эргодические процессы

Т.е. по любой одной достаточно длинной реализации мы можем судить о свойствах всех реализаций случайного процесса.

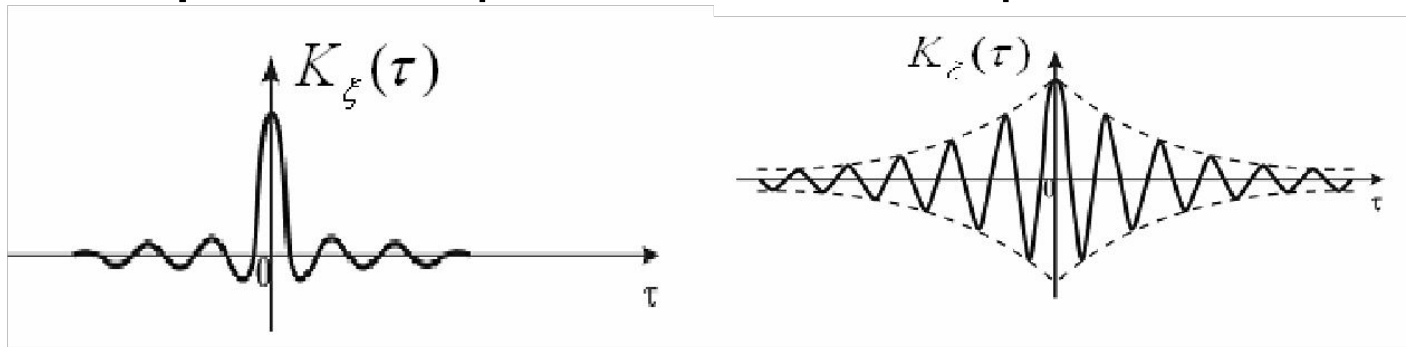


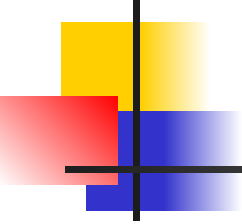
Эргодические процессы

Достаточное условие эргодичности:
если

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_{\xi}(\tau) = 0,$$

то случайный процесс является эргодическим.





СПАСИБО
ЗА ВНИМАНИЕ !!!

