Системы счисления

ВИДЫ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

В современном мире известно множество способов представления чисел.

Любое число имеет значение (содержание) и форму представления. Значение числа задает его отношение к значениям других чисел ("больше", "меньше", "равно") и, следовательно, порядок расположения чисел на числовой оси.

Форма представления определяет порядок записи числа с помощью предназначенных для этого знаков. При этом значение числа является инвариантом, т.е. не зависит от способа его представления.

Число можно представить группой символов некоторого алфавита.

Способ представления числа определяется системой счисления.

Система счисления **- это правило записи чисел с помощью заданного набора специальных знаков - цифр.**

В разные исторические периоды многие народы использовали другие системы счисления.

Людьми использовались различные способы записи чисел, которые можно объединить в несколько групп:

Системы счисления

- Непозиционные
  - Унарная
  - Древнеегипетская
  - Алфавитная
  - Римская
- Позиционные
  - Вавилонская
  - Система Майя
  - Десятичная
  - Двоичная

НЕПОЗИЦИОННАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Непозиционная - это система счисления, в которой значение цифры не зависит от ее позиции в записи числа.

VVV = 15_{10} , на каком бы месте не стояла V, ее «вес» всегда один и равен 5

Общим для унарной и римской систем счисления является то, что значение числа в них определяется посредством операций сложения и вычитания базисных цифр, из которых составлено число, независимо от их позиции в числе. Такие системы получили название ***аддитивных***.

УНАРНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Унарная - это система счисления, в которой для записи чисел используется только один знак –I (палочка, узелок, зарубка, камушек). Следующее число получается из предыдущего добавлением новой I; их количество равно самому числу.

Узелковая письменность Инков (кипу)

Именно такая система применяется для начального обучения счету детей (можно вспомнить «счетные палочки»).

Унарная система важна также в теоретическом отношении, поскольку в ней число представляется наиболее простым способом и просты операции с ним.

Кроме того, именно унарная система определяет значение целого числа количеством содержащихся в нем единиц, которое, как было сказано, не зависит от формы представления.

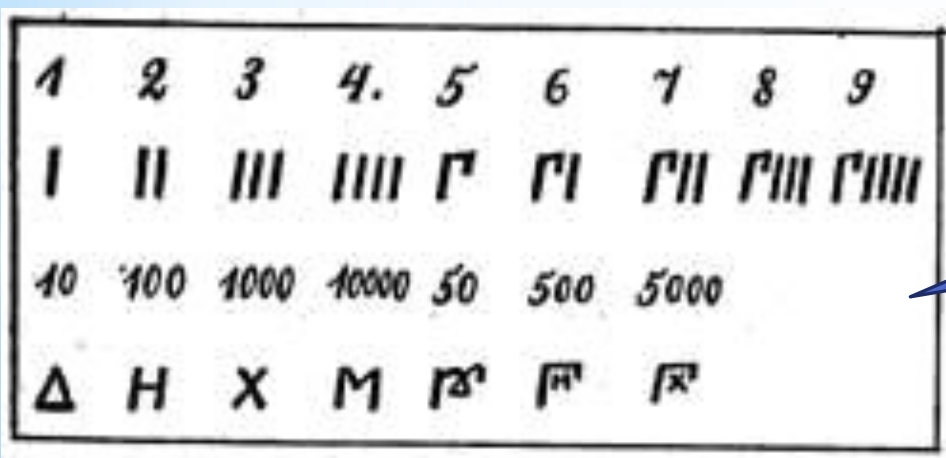
ДРЕВНЕЕГИПЕТСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Древнеегипетская десятичная непозиционная система возникла во второй половине третьего тысячелетия до н.э. Бумагу заменяла глиняная дощечка, и именно поэтому цифры имеют такое начертание.

Для обозначения ключевых чисел 1, 10, 100 и т.д. использовались специальные значки - иероглифы. Все остальные числа составлялись из этих ключевых при помощи операции сложения.

Система счисления Древнего Египта является десятичной, но непозиционной.

Например, чтобы изобразить 3252 рисовали три цветка лотоса (три тысячи), два свернутых пальмовых листа (две сотни), пять дуг (пять десятков) и два шеста (две единицы). Величина числа не зависела от того, в каком порядке располагались составляющие его знаки.



Древнеегипетская нумерация

АЛФАВИТНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

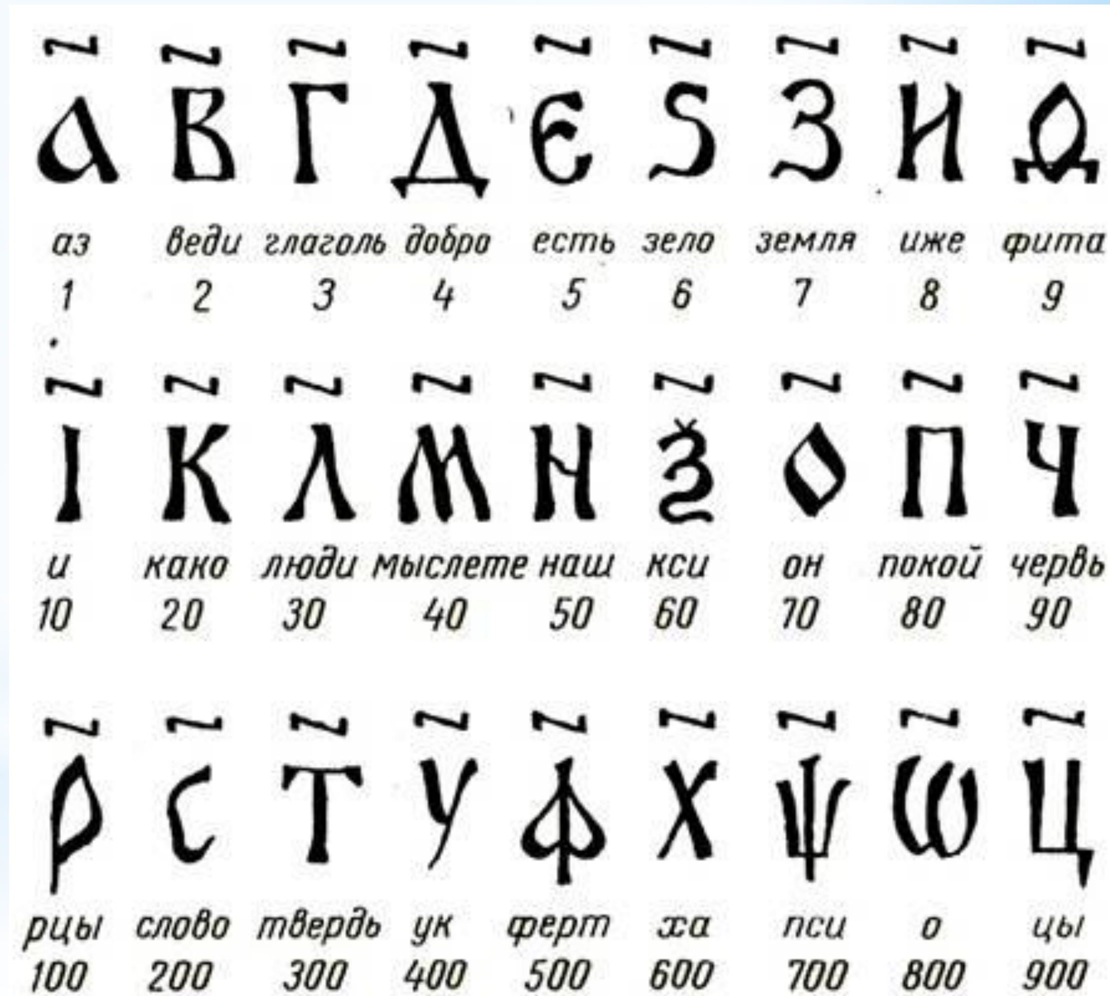
К ним относятся: славянская, ионийская (греческая), финикийская и другие.

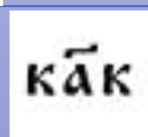
В них числа от 1 до 9, целые количества десятков (от 10 до 90) и целые количества сотен (от 100 до 900) обозначались буквами алфавита.

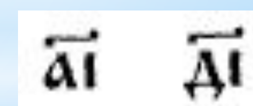
Славянская система была принята в древней Руси с IX века и использовалась до конца XVII века (до реформ Петра I).

В алфавитной славянской системе счисления в качестве "цифр" использовались 27 букв кириллицы, над которыми ставился знак "титло".

Это делалось для того, чтобы отличить числа от обычных слов.



	Тысяча	1000
	Тьма	10 000
	Легион	100 000
	Леодр	1 000 000
 	Ворон	10 000 000
	Колода	100 000 000



Числа от 11 (один - на десять) до 19 (девять - на десять) записывали так же, как говорили. Если число не содержало десятков, то "цифру" десятков не писали.

Остальные числа записывались буквами слева направо. Например, числа 244 и 1993:

Такой способ записи чисел можно рассматривать как зачатки позиционной системы, так как в нем для обозначения единиц разных разрядов применялись одни и те же символы, к которым лишь добавлялись специальные знаки для определения значения разряда.

Недостатки алфавитной системы:

- Для записи больших чисел необходимо вводить новые буквы;
- Трудно записывать большие числа;
- Нельзя записать дробные и отрицательные числа;
- Нет нуля;
- Очень сложно выполнять арифметические операции

ИОНИЙСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Примерно в третьем веке до нашей эры аттическая система счисления в Греции была вытеснена другой, так называемой "Ионийской" системой (она возникла в Милеете – греческая малоазиатская колония Ионии).

В ней числа 1 - 9 обозначаются первыми буквами древнегреческого алфавита:

$$\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 3,\ \delta = 4,\ \varepsilon = 5,\ \varsigma = 6,\ \zeta = 7,\ \eta = 8,\ \vartheta = 9$$

числа 10, 20, … 90 изображались следующими девятью буквами:

$$\iota = 10,\ \varkappa = 20,\ \lambda = 30,\ \mu = 40,\ \nu = 50,\ \xi = 60,\ o = 70,\ \pi = 80,\ \upsilon = 90$$

числа 100, 200, … 900 последними девятью буквами:

$$\rho = 100,\ \sigma = 200,\ \lambda = 300,\ \upsilon = 400,\ \varphi = 500,\ \chi = 600,\ \psi = 700,\ \omega = 800,\ \text{ϡ} = 900$$

Для обозначения тысяч и десятков тысяч пользовались теми же цифрами, но только с добавлением особого значка ‘ . Любая буква с этим значком сразу же становилась в тысячу раз больше. Для отличия цифр и букв писали черточки над цифрами.

$$\overline{\sigma\xi\varepsilon} = 265,\ \overline{\varphi\gamma} = 503,\ \overline{\psi\lambda\alpha} = 731$$

Древние евреи, арабы и многие другие народы Ближнего Востока имели такие же системы счисления.

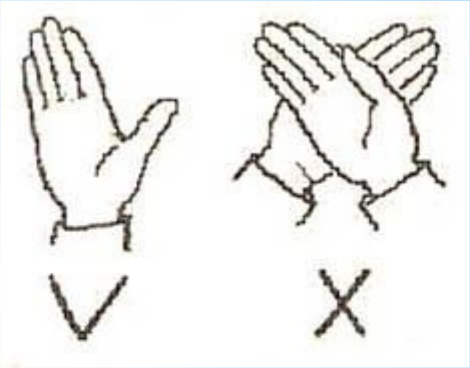
При ее помощи можно было просто записать числа до ста миллионов (100 000 000). Эта система по быстроте счета мало отличается от «арабской». И хоть она не позиционная, но в ней есть мультипликативность.

РИМСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

В ней для обозначения чисел используются заглавные латинские буквы , являющиеся одновременно "цифрами" этой системы счисления. Число в римской системе счисления обозначается набором стоящих подряд "цифр".

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000
один палец	**раскрытая ладонь**	**две сложенные ладони**		Centum	Demimille	Mille

Например, запись XIX соответствует числу 19, MDXLIX - числу 1549.



Правила записи чисел:

1. Все целые числа (до 5000) записываются с помощью повторения алфавита.
2. Цифры I, X, C и M могут следовать подряд не более трех раз каждая;
3. Цифры V, L и D могут использоваться в записи числа не более одного раза.
4. "Цифры" могут повторяться в записи не более 3-х раз
5. Если "цифра" обозначающая большее количество стоит перед меньшей, то их значения складываются.
6. Если "цифра" обозначающая меньшее количество стоит слева от большей (в таком случае она не может повторяться), то в этом случае от значения большей "цифры" отнимается значение меньшей "цифры". Заметим, что левая "цифра" может быть меньше правой максимум на один порядок.

Число 33

XXXIII = (X + X + X) + (I + I+I) = 30 + 3

Число 444

CDXLIV = (D - C) + (L - X) + (V - I) = 400 + 40 + 4

Число 1974

MCMLXXIV = M + (M - C) + L + (X + X) + (V - I) = 1000 + 900 + 50 + 20 + 4

Задание:

Первые три римские цифры — I, V, X. Их легко изобразить, используя палочки или спички. Ниже написано неверное равенство. Как можно получить верные равенства, если разрешается переложить с одного места на другое только одну спичку (палочку)?

IX — V = VI;

XI — V = VI;

IX — V = IV;

Такой способ записи чисел можно рассматривать как зачатки позиционной системы, так как в нем для обозначения единиц разных разрядов применялись одни и те же символы, к которым лишь добавлялись специальные знаки для определения значения разряда.

Недостатки римской системы:

- Запись чисел в такой системе громоздка и неудобна;
- Нет нуля;
- Отсутствие знаков для чисел больше М;
- Очень сложно выполнять арифметические операции;

ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Позиционными называются системы счисления, в которых значение каждой цифры в изображении числа определяется ее положением (позицией) в ряду других цифр.

В позиционных системах счисления вес каждой цифры изменяется в зависимости от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающих число.

Например, в десятичном числе 757,7 первая семерка означает 7 сотен, вторая - 7 единиц, а третья - 7 десятых долей единицы. Сама же запись числа 757,7 означает сокращенную запись суммы

$$700 + 50 + 7 + 0{,}7 = 7 * 10^2 + 5 * 10^1 + 7 * 10^0 + 7 * 10^{-1} = 757{,}7$$

Любая позиционная система счисления характеризуется:

- алфавитом
- основанием.

Основание позиционной системы счисления - это количество различных знаков или символов, используемых для изображения цифр в данной системе.

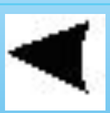
В современной информатике используются в основном три системы счисления (все - позиционные): двоичная,шестнадцатеричная и десятичная.

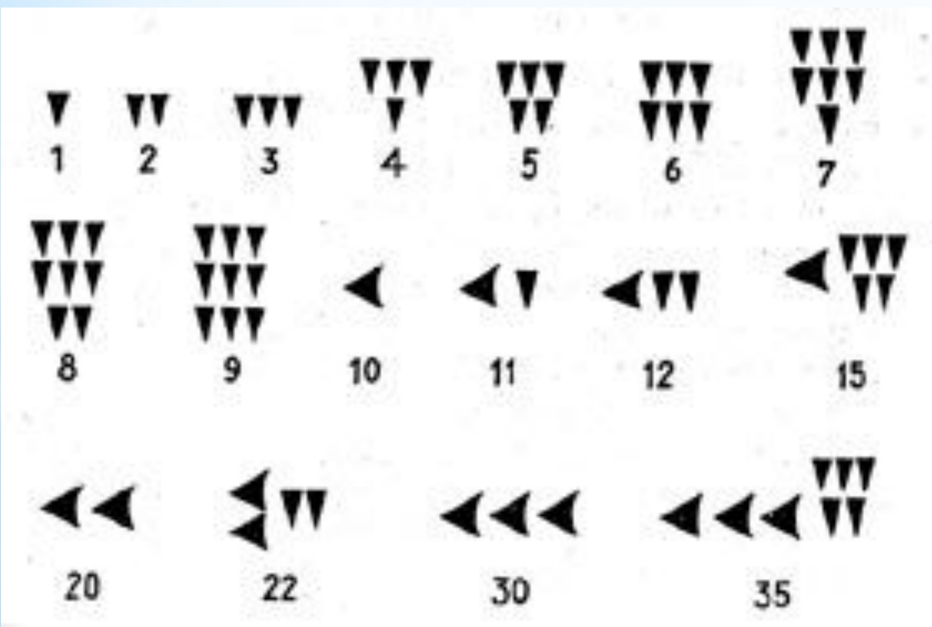
Соответствие между первыми несколькими натуральными числами всех трех систем счисления представлено в таблице перевода:

Десятичная система	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Двоичная система	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000
Шестнадцатеричная система	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10

ВАВИЛОНСКАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

В другой великой цивилизации (вавилонской) люди записывали цифры по-другому.
Числа в этой системе счисления составлялись из знаков двух видов:

прямой клин служил для обозначения единиц		
лежачий клин- для обозначения десятков.		



Так в Древнем Вавилоне изображались цифры и числа.

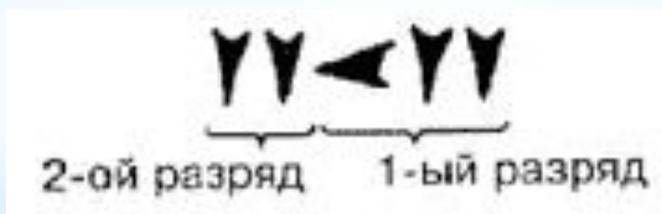
Число 60 снова обозначалось тем же знаком ,  что и 1.

Число 32, например, записывали так: 

Этим же знаком обозначались числа 3600 = 602, 216000 = 603 и все другие степени 60.

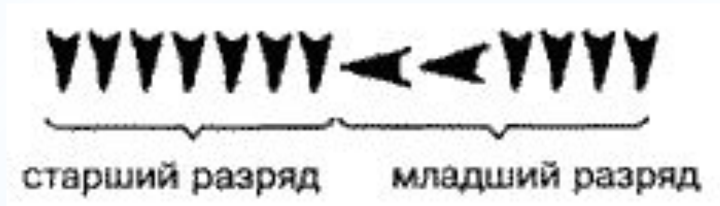
Поэтому вавилонская система счисления получила название шестидесятеричной.

Для определения значения числа надо было изображение числа разбить на разряды справа налево. Чередование групп одинаковых знаков ("цифр") соответствовало чередованию разрядов:



Значение числа определяли по значениям составляющих его "цифр", но с учетом того, что "цифры" в каждом последующем разряде значили в 60 раз больше тех же "цифр" в предыдущем разряде.

444 = 7-60 + 24. Это число состоит из двух разрядов



Запись числа у вавилонян была неоднозначной, так как не было "цифры" для обозначения нуля.

Запись числа 92, приведенная выше, могла обозначать не только

92 = 60 + 32, но и 3632 =3600 + 32 = 602 + 32 и т. д.

Для определения абсолютного значения числа требовались еще дополнительные сведения.

Шестидесятеричная вавилонская система - первая известная нам система счисления, основанная на позиционном принципе.

Система вавилонян сыграла большую роль в развитии математики и астрономии, ее следы сохранились до наших дней.

Так, мы до сих пор делим час на 60 минут, а минуту на 60 секунд.

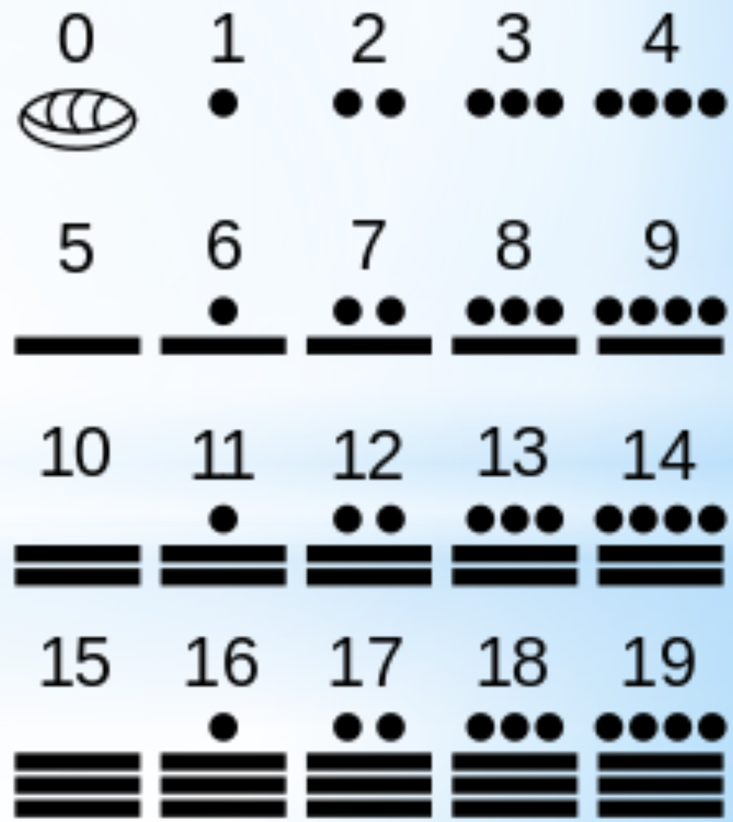
Точно так же, следуя примеру вавилонян, окружность мы делим на 360 частей (градусов).

СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ МАЙЯ

Майя использовали 20-ричную систему счисления за одним исключением: во втором разряде было не 20, а 18 ступеней, то есть за числом (17)(19) сразу следовало число (1)(0)(0).

Это было сделано для облегчения расчётов календарного цикла, поскольку (1)(0)(0) = 360 примерно равно числу дней в солнечном году.

Цифры майя состояли из нуля (знак ракушки) и 19 составных цифр. Эти цифры конструировались из знака единицы (точка) и знака пятерки (горизонтальная черта).



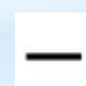
Числа свыше 19 писались согласно позиционному принципу снизу вверх по степеням 20. Например:

32 писалось как (1)(12) = 1×20 + 12

429 как (1)(1)(9) = 1×400 + 1×20 + 9

4805 как (12)(0)(5) = 12×400 + 0×20 + 5

Для записи цифр от 1 до 19 иногда также использовались изображения божеств. Такие цифры использовались крайне редко, сохранившись лишь на нескольких монументальных стелах.

Третий разряд (четырёхсотки)			
Второй разряд (двадцатки)			
Первый разряд (единицы)			
	32	429	4805

ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Наиболее распространенной и привычной является система счисления, в которой для записи чисел используется 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

Число представляет собой краткую запись многочлена, в который входят степени некоторого другого числа - основания системы счисления.

$$272{,}12 = 2\cdot10^{2}+7\cdot10^{1}+2\cdot10^{0}+ 1\cdot10^{-1}+2\cdot10^{-2}$$

Количество цифр для построения чисел, очевидно, равно основанию системы счисления. Также очевидно, что максимальная цифра на 1 меньше основания.

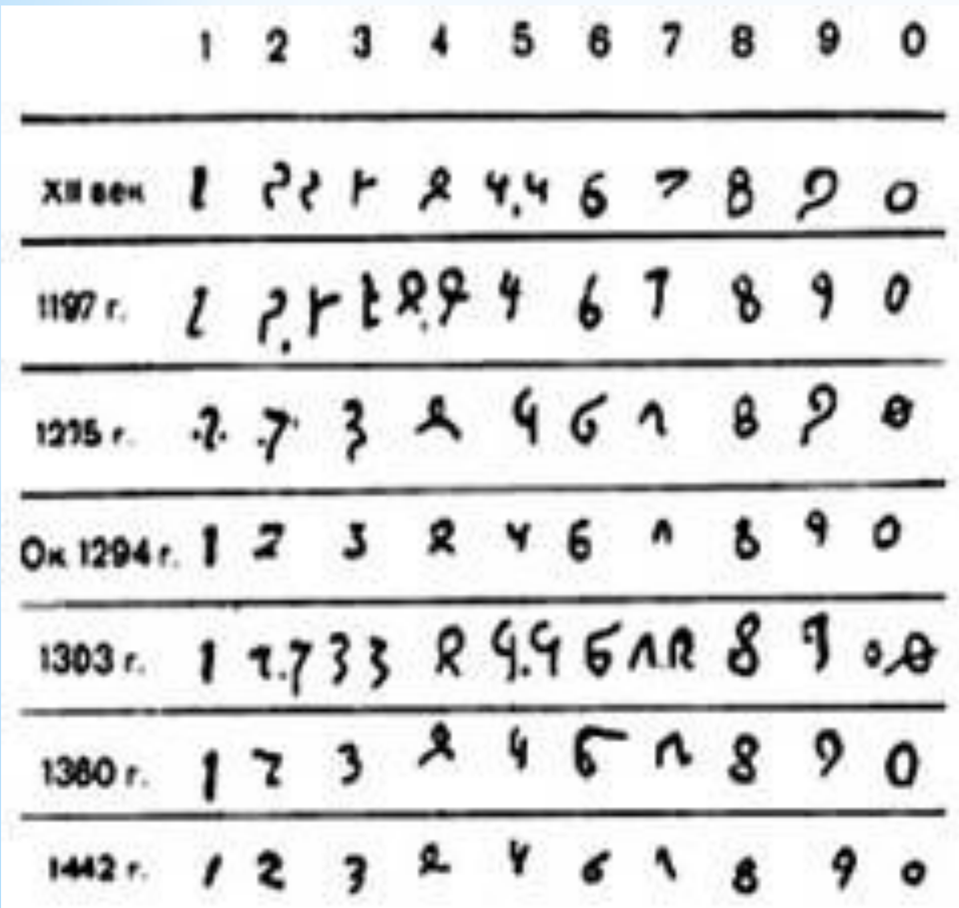
Десятичная система счисления используется в информатике для кодирования дискретного сигнала, потребителем которого является так называемый конечный пользователь - неспециалист в области информатики.

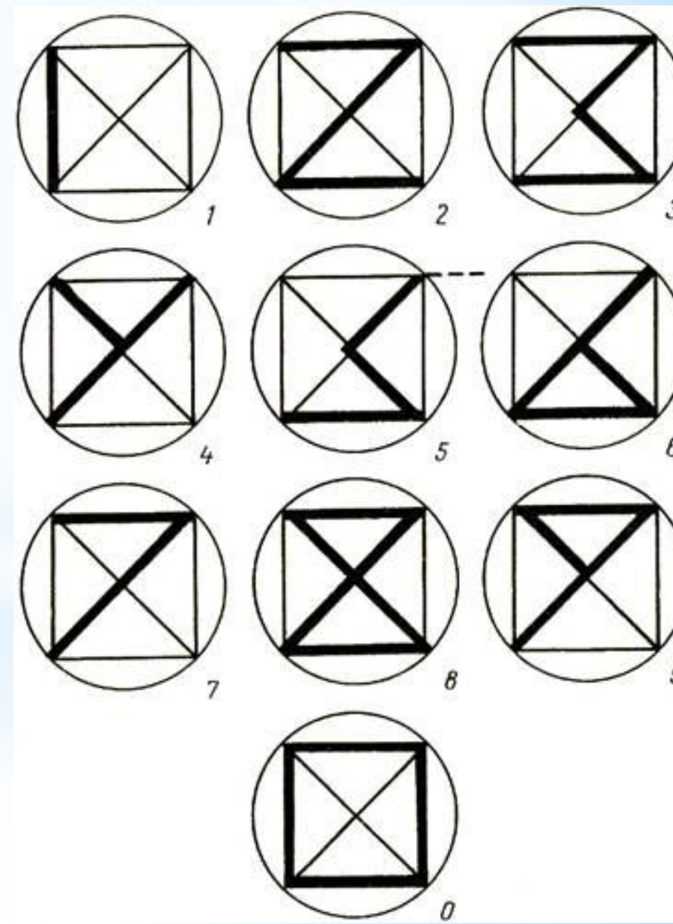
Причина, по которой десятичная система счисления стала общепринятой, вовсе не математическая. Десять пальцев рук - вот аппарат для счета, которым человек пользуется с доисторических времен.

Древнее изображение десятичных цифр не случайно: каждая цифра обозначает число по количеству углов в ней. Например, 0 - углов нет, 2 - два угла и т.д.

Написание десятичных цифр претерпело существенные изменения. Форма, которой мы пользуемся, установилась в XVI веке.

Даже Пушкин предложил свой вариант формы арабских чисел. Он решил, что все десять арабских цифр, включая нуль, помещаются в магическом квадрате.





ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Самая замечательная система счисления - двоичная. В ней используются только две цифры 0 и 1. И значит, имеется только два однозначных числа.

В 1703г. - немецкий математик Лейбниц ввел в математику двоичную систему счисления.

1936 - 1938гг. - американский инженер и математик Клод Шеннон предложил использовать двоичную систему счисления для конструирования электронных схем.

Двоичная система счисления используется для кодирования дискретного сигнала, потребителем которого является вычислительная техника. Такое положение дел сложилось исторически, поскольку двоичный сигнал проще представлять на аппаратном уровне.

Для различения систем счисления, в которых представлены числа, в обозначение двоичных и шестнадцатеричных чисел вводят дополнительные реквизиты:

для двоичных чисел - нижний индекс справа от числа в виде цифры 2 или букв B либо b (binary - двоичный), либо знак B или b справа от числа.

Например: $101000_2 = 101000_b$

Преимущества двоичной системы:

- для ее реализации нужны технические устройства с двумя устойчивыми состояниями (есть ток - нет тока, намагничен - не намагничен и т. п.), а не, например, с десятью, как в десятичной;
- представление информации посредством только двух состояний надежно и помехоустойчиво;
- возможно применение аппарата булевой алгебры для выполнения логических преобразований информации;
- двоичная арифметика намного проще десятичной.

Недостаток двоичной системы:

- быстрый рост числа разрядов, необходимых для записи чисел.
- **для человека неудобна из - за ее громоздкости и непривычной записи.**
- **перевод чисел из десятичной системы счисления в двоичную и наоборот выполняет машина.**

ТАБЛИЦА СТЕПЕНЕЙ ЧИСЛА 2

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

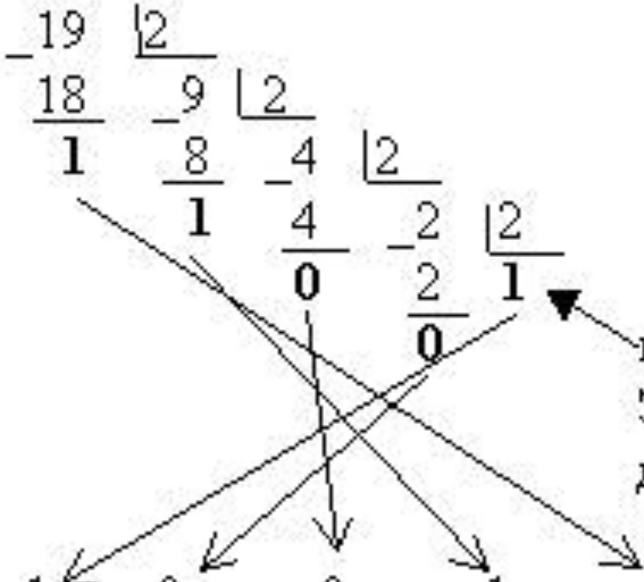
О какой системе счисления идёт речь в данном стихотворении?

Ей было 1100 лет.
Она в 101 класс ходила.
В портфеле по 100 книг носила.
Всё это правда, а не бред.

И 10 тёмно-синих глаз
Оглядывали мир привычно.
Но станет всё совсем обычно
Когда поймёте наш рассказ.

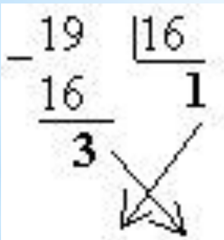
ПЕРЕВОД ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДВОИЧНУЮ И ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНУЮ:

а) исходное целое число делится на основание системы счисления, в которую переводится; получается частное и остаток;
б) если полученное частное меньше основания системы счисления, в которую выполняется перевод, процесс деления прекращается, переходят к шагу (в). Иначе над частным выполняют действия, описанные в шаге (а);
в) все полученные остатки и последнее частное преобразуются в соответствии с таблицей перевода в цифры той системы счисления, в которую выполняется перевод;
г) формируется результирующее число: его старший разряд - полученное последнее частное, каждый последующий младший разряд образуется из полученных остатков от деления, начиная с последнего и кончая первым.

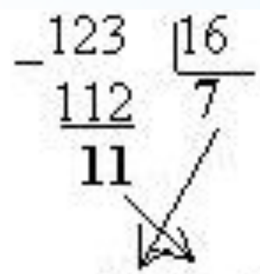


последнее частное от деления, поскольку 1<2. Это старший разряд результирующего двоичного числа.

1 0 0 1 1 – результирующее число.



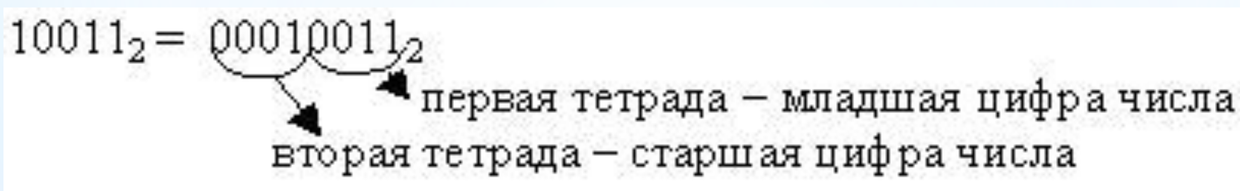
1 3 – результирующее число



7 B – результирующее число.

ПЕРЕВОД ИЗ ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНУЮ

а) исходное число разбивается на тетрады (т.е. 4 цифры), начиная с младших разрядов.
Если количество цифр исходного двоичного числа не кратно 4, оно дополняется слева незначащими нулями до достижения кратности 4;
б) каждая тетрада заменятся соответствующей шестнадцатеричной цифрой в соответствии с таблицей.



Пример

Выполнить перевод числа 10011_2 в шестнадцатеричную систему счисления.
Поскольку в исходном двоичном числе количество цифр не кратно 4, дополняем его слева незначащими нулями до достижения кратности 4 числа цифр. Имеем:

В соответствии с таблицей $0011_2 = 11_2 = 3_{16}$ и $0001_2 = 1_2 = 1_{16}$.
Тогда $10011_2 = 13_{16}$.

Таблица кодов различных систем счисления.

Двоичная (Основание 2)	Восьмеричная (Основание 8)		Десятичная (Основание 10)	Шестнадцатеричная (Основание 16)	
		триады			тетрады
0	0	000	0	0	0000
1	1	001	1	1	0001
	2	010	2	2	0010
	3	011	3	3	0011
	4	100	4	4	0100
	5	101	5	5	0101
	6	110	6	6	0110
	7	111	7	7	0111
			8	8	1000
			9	9	1001
				A	1010
				B	1011
				C	1100
				D	1101
				E	1110
				F	1111

Примеры.

1) Перевод шестнадцатеричных чисел в двоичную систему.

$1A3,F_{16} = 0001\ \ 1010\ \ 0011\ ,\ 1111_2$

$\qquad\qquad 1 \quad A \quad 3 \quad F$

2) Перевод числа из двоичной системы в восьмеричную: разбить влево и вправо от запятой на триады, и каждую триаду заменить восьмеричной цифрой.

$10101001,10111_2 = 010\ \ 101\ \ 001\ ,\ 101\ \ 110\ _2 = 251,56_8$

$\qquad\qquad 2 \quad 5 \quad 1 \quad 5 \quad 6$

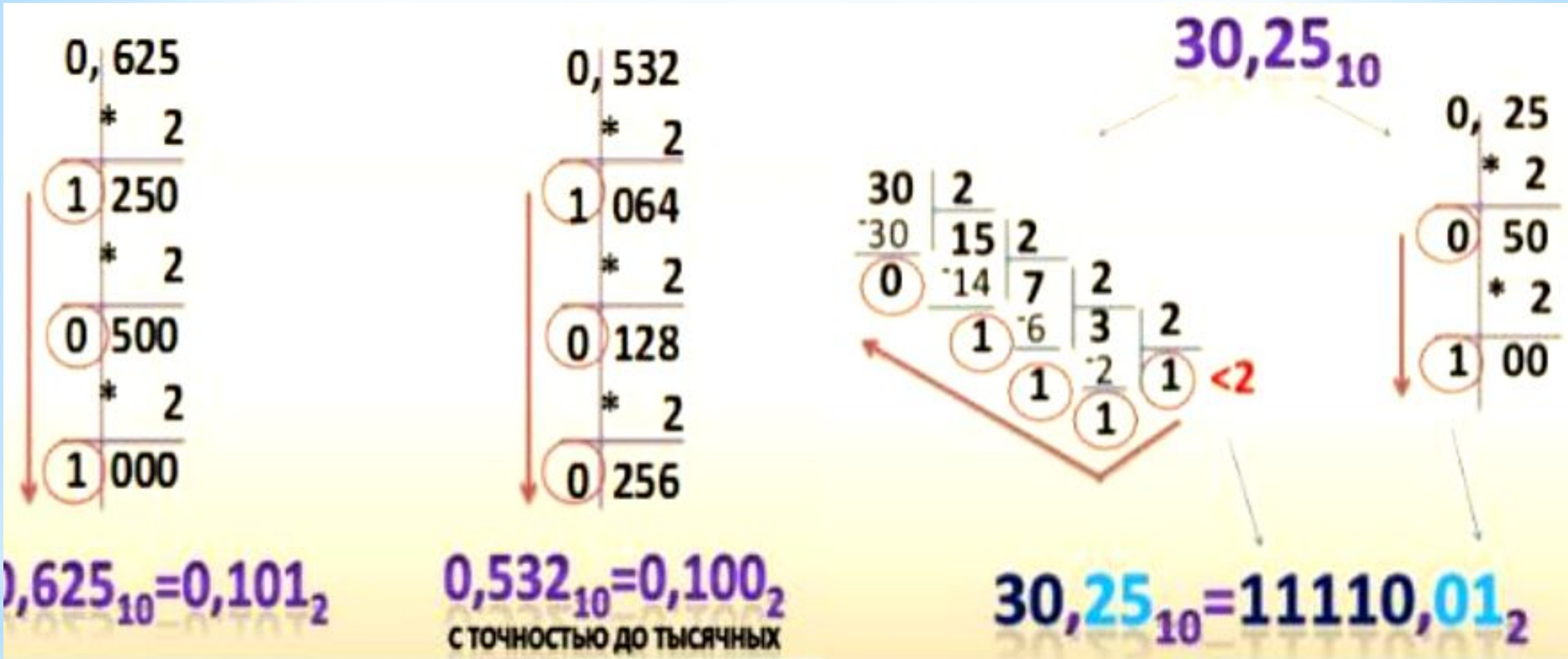
3) Перевод числа из двоичной системы в шестнадцатеричную:

$10101001,10111_2 = 1010\ \ 1001\ ,\ 1011\ \ 1000\ _2 = A9B8_{16}$

$\qquad\qquad A \quad 9 \quad B \quad 8$

ПЕРЕВОД ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДВОИЧНУЮ И ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНУЮ:

1. исходная дробь умножается на основание системы счисления, в которую переводится (2 или 16);
2. в полученном произведении целая часть преобразуется в соответствии с таблицей в цифру нужной СС и отбрасывается - она является старшей цифрой получаемой дроби;
3. оставшаяся дробная часть (это правильная дробь) вновь умножается на нужное основание СС с последующей обработкой полученного произведения в соответствии с шагами 1 и 2.
4. процедура умножения продолжается до тех пор, пока ни будет получен **нулевой результат** в дробной части произведения или **ни будет достигнуто требуемое количество цифр** в результате;
5. формируется искомое число: последовательно отброшенные в шаге 2 цифры составляют дробную часть результата, причем в порядке уменьшения старшинства.


0,625
1 250
0 500
1 000
0,625₁₀=0,101₂
0,532
1 064
0 128
0 256
0,532₁₀=0,100₂
с точностью до тысячных
30,25₁₀
30 2
15 2
7 2
3 2
1 <2
0,25
0 50
1 00
30,25₁₀=11110,01₂

Пример 1.

Выполнить перевод числа 0,847 в двоичную систему счисления. Перевод выполнить до четырех значащих цифр после запятой.

Пример 2.

Выполнить перевод числа 0,847 в шестнадцатеричную систему счисления. Перевод выполнить до трех значащих цифр.

ПРАВИЛА ПЕРЕВОДА ДРОБНЫХ ЧИСЕЛ (НЕПРАВИЛЬНЫХ ДРОБЕЙ).

При переводе отдельно переводится целая часть числа, отдельно - дробная. Результаты складываются.

Пример 1.

Выполнить перевод из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную числа 19,847. Перевод выполнять до трех значащих цифр после запятой.

Представим исходное число как сумму целого числа и правильной дроби:

$19,847 = 19 + 0,847$.

1) $19 = 13_{16}$,

2) $0,847 = 0,D8D_{16}$.

Тогда имеем:

$19 + 0,847 = 13_{16} + 0,D8D_{16} = 13,D8D_{16}$.

Таким образом, $19,847 = 13,D8D_{16}$.

Задание 1: перевести $17{,}25_{10}$ в двоичную систему счисления.
Решение:
1) $17_{10} = 10001_2$
2) $0{,}25_{10} = 0{,}01_2$

$$17{,}25_{10} = 10001{,}01_2$$

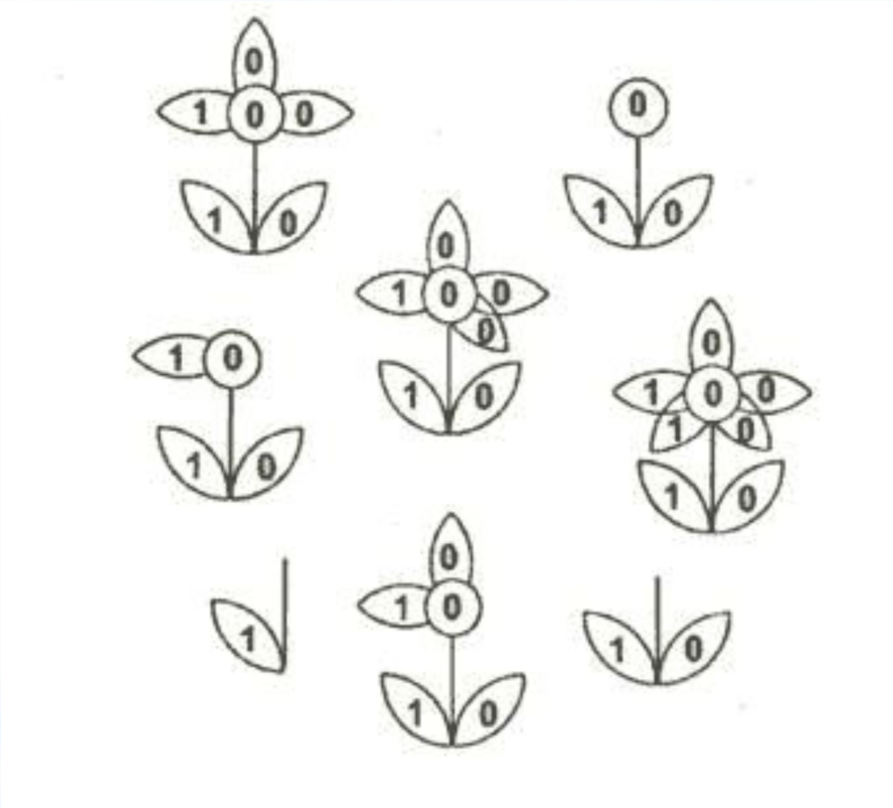
Задание 2: переведите в двоичную систему счисления число $40{,}5_{10}$.
Решение:
1) $40_{10} = 101000_2$
2) $0{,}5_{10} = 0{,}1_2$

$$40{,}5_{10} = 101000{,}1_2$$

Задание 3: переведите в двоичную систему счисления числа: $37{,}35_{10}$. До 5 знака после запятой.
Решение:
1) $37_{10} = 100101_2$
2) $0{,}35_{10} = 0{,}\ 01011_2$

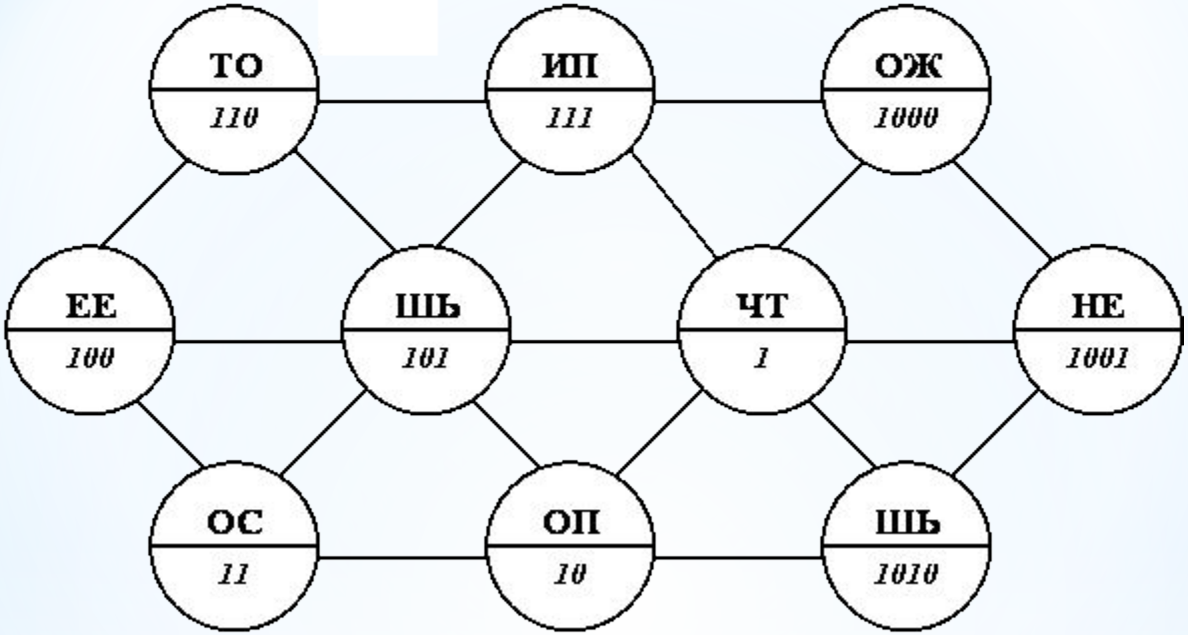
$$37{,}35_{10} = 100101{,}01011_2$$

Сначала появился один листочек, затем второй … и вот распустился бутон. Постепенно подрастая, цветок показывает нам некоторое двоичное число. Если вы до конца проследите за ростом цветка, то узнаете, сколько дней ему понадобилось, чтобы вырасти.



Ответ: 10010001_2 = 145 дней

Здесь зашифрована известная русская поговорка. Прочитайте ее, двигаясь с помощью двоичных цифр в определенной последовательности.



Десятичная система	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Двоичная система	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011

Ответ: Что посеешь, то и пожнешь.

ПЕРЕВОД ИЗ ЛЮБОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДЕСЯТИЧНУЮ:

В этом случае рассчитывается полное значение числа по известной формуле:

$$a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \ldots + a_1q^1 + a_0q^0 + a_{-1}q^{-1} + \ldots + a_{-m}q^{-m},$$

где ai - цифры системы счисления;
n и m - число целых и дробных разрядов соответственно.

1) **Выполнить перевод числа 10011_2 в десятичную систему счисления:**
   $10011_2 = 1*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0 = 16+0+0+2+1 = 19_{10}$
2) **Выполнить перевод числа 13_{16} в десятичную систему счисления:**
   $13_{16} = 1*16^1 + 3*16^0 = 16 + 3 = 19.$
3) $01001101_2 = 0*2^7 + 1*2^6 + 0*2^5 + 0*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = 77_{10}$

Рисуем по точкам. В таблице приведены номер точки и ее координаты, записанные в двоичной СС. Для каждой точки выполните перевод ее координат в десятичную систему счисления и отметьте точку на координатной плоскости.

№ точки	Координаты точки	
	X	Y
1	100_2	10_2
2	101_2	101_2
3	1_2	101_2
4	11_2	1010_2
5	100_2	1010_2
6	11_2	110_2
7	101_2	110_2
8	110_2	$101_2 + 100_2$
9	111_2	1001_2
10	110_2	110_2
11	$100_2 * 10_2$	110_2
12	1000_2	101_2
13	110_2	101_2
14	101_2	10_2

(4;2)

(5;5)

(1;5)

(3;10)

(4;10)

(3;6)

(5;6)

(6;9)

(7;9)

(6;6)

(8;6)

(8;5)

(6;5)

(5;2)