

Теория картографических  
проекций. Локсодромия и её  
уравнение. Анализ уравнения  
локсодромии.

# 1. Картографические проекции и их классификация

**Карта** - плоское, искаженное изображение земной поверхности, на котором искажения подчинены определенному математическому закону. Положение любой точки на плоскости может быть определено пересечением двух координатных линий, которые однозначно соответствовали бы координатным линиям на Земле ( $j$ ,  $l$ ). Отсюда следует, что для получения плоского изображения земной поверхности нужно сначала нанести на плоскость систему координатных линий, которая соответствовала бы таким же линиям на сфере. Имея нанесенную на плоскость систему меридианов и параллелей, можно теперь нанести на эту сетку любые точки Земли.

**Картографическая сетка** - условное изображение географической сетки земных меридианов и параллелей на карте в виде прямых или кривых линий.

**Картографическая проекция** - способ построения картографической сетки на плоскости и изображение на ней сферической поверхности Земли, подчиненный определенному математическому закону.

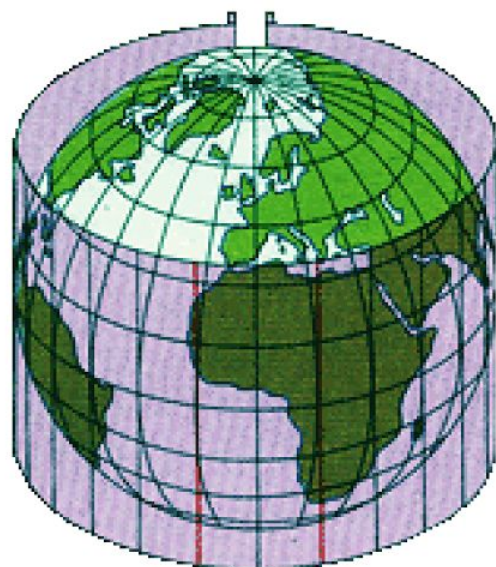
## 1.1. Картографические проекции по характеру искажений делятся на:

- **Равноугольные** (конформные) проекции, не искажающие углов. Сохраняется подобие фигур. Позволяет передавать на картах углы без искажений и сохранять в каждой точке постоянный масштаб по всем направлениям, хотя в разных местах карты масштаб различен. Масштаб проекции зависит только от положения точки и не зависит от направления, изменяясь с изменением широты ( $\phi$ ) и долготы ( $\lambda$ ) (обычно увеличиваясь по мере удаления от центральной точки или линии проекции). Отношение площадей не сохраняется на карте. Угол на местности всегда равен углу на карте.
- **Равновеликие** (эквивалентные) проекции, на которых масштаб площадей везде одинаков и площади на картах пропорциональны соответствующим площадям в натуре. Равенства углов и подобия фигур не сохраняются. Масштаб длин в каждой точке не сохраняется по разным направлениям.
- **Произвольные** проекции, заданные несколькими условиями, но не обладающие ни свойствами равноугольности, ни свойствами равновеликости. Ортодромическая проекция<sup>®</sup> дуга большого круга изображается прямой линией.

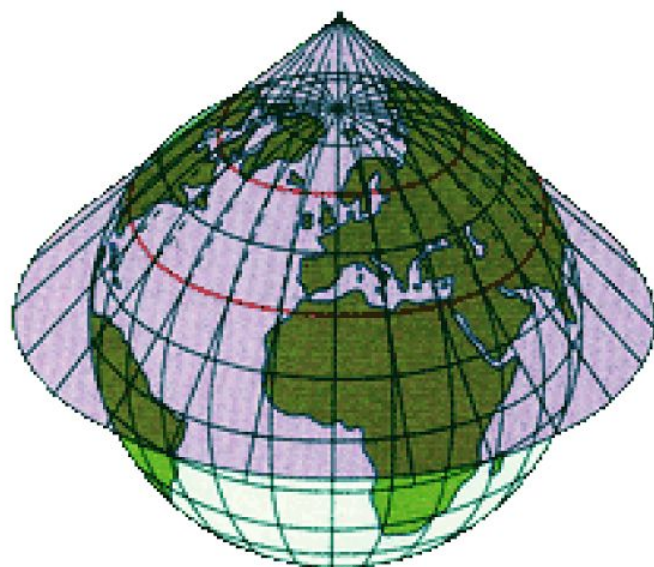
## 1.2. Картографические проекции по способу построения картографической сетки делятся на:

- **Цилиндрические** проекции, на которых картографическая сетка меридианов и параллелей получается путем проецирования земных координатных линий на поверхность цилиндра, касающегося условного глобуса (или секущего его), с последующей разверткой этого цилиндра на плоскость.
  - Прямая цилиндрическая проекция ось цилиндра совпадает с осью Земли;
  - Поперечная цилиндрическая проекция ось цилиндра перпендикулярна оси Земли;
  - Косая цилиндрическая проекция ось цилиндра расположена к оси Земли под углом отличным от  $0^\circ$  и  $90^\circ$ .
  
- **Конические** проекции, на которых картографическая сетка меридианов и параллелей получается путем проецирования земных координатных линий на поверхность конуса, касающегося условного глобуса (или секущего его), с последующей разверткой этого конуса на плоскость. В зависимости от положения конуса относительно оси Земли различают:
  - Прямую коническую проекцию ось конуса совпадает с осью Земли;
  - Поперечную коническую проекцию ось конуса перпендикулярна оси Земли;
  - Косую коническую проекцию ось конуса расположена к оси Земли под углом отличным от  $0^\circ$  и  $90^\circ$ .
  
- **Азимутальные** проекции, в которых меридианы – радиальные прямые, исходящие из одной точки (центральной), под углами равными соответствующим углам в натуре, а параллели концентрические окружности, проведенные из точки схождения меридианов (ортографические, внешние, стереографические, центральные, полярные, экваториальные, горизонтные).

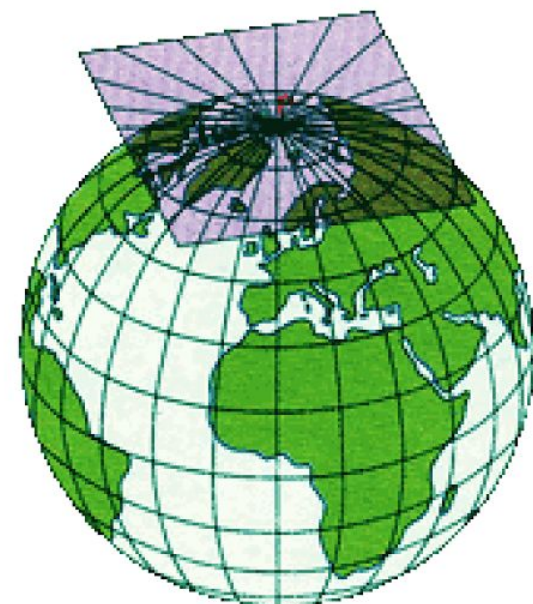
Цилиндрическая

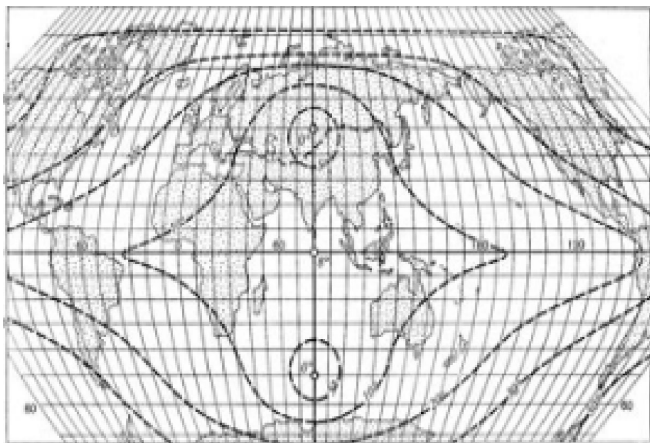


Коническая

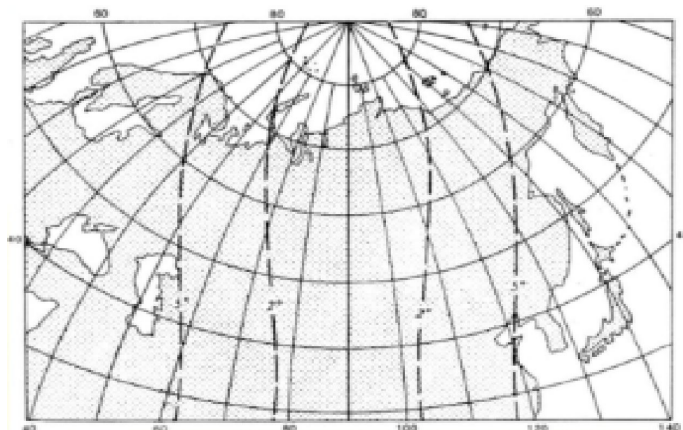


Азимутальная

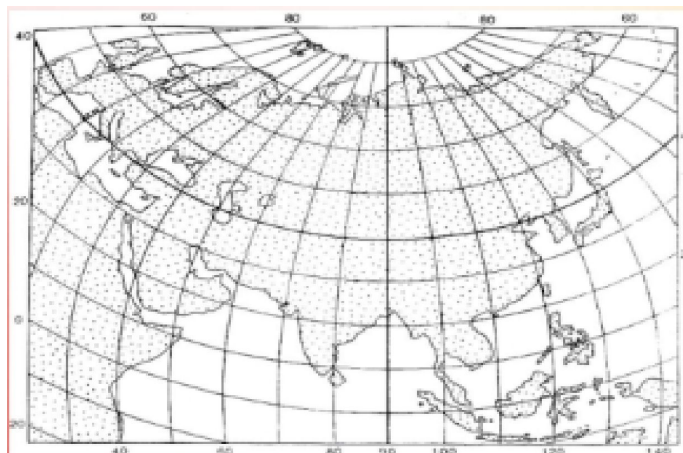




**Псевдоцилиндрическая  
проекция**



**Поликоническая  
проекция**



**Псевдоконическая  
проекция**

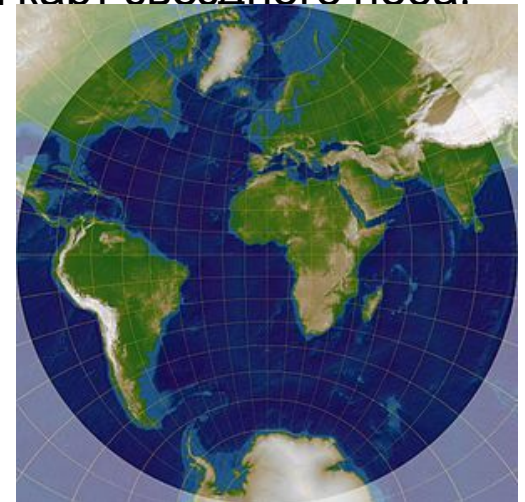
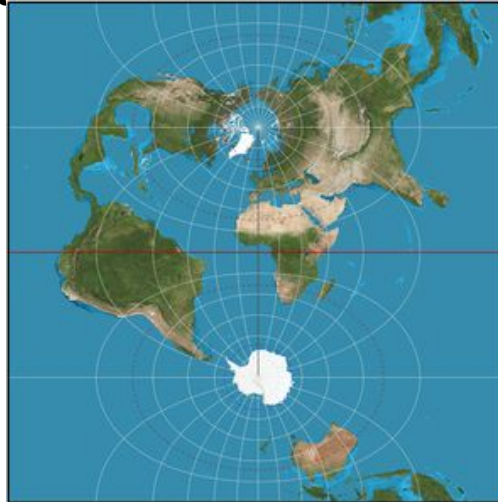


Главными примерами **равноугольных картографических проекций** являются:

**Проекция Меркатора** (зачастую просто «равноугольной проекцией» называют именно её) — нашла широкое применение в морском деле, в том числе и для карт мира.

**Проекция Гаусса — Крюгера** (также известная как поперечно-цилиндрическая проекция Меркатора) — используется для топографических карт.

**Стереографическая проекция** — используется для карт звездного неба.



**Равноугольная цилиндрическая проекция Меркатора** — одна из основных картографических проекций. Разработана Герардом Меркатором для применения в его «Атласе».

«Равноугольная» в названии проекции подчёркивает то, что проекция сохраняет углы между направлениями. Меридианы в проекции Меркатора представляются параллельными равноотстоящими линиями. Параллели же представляют собой параллельные линии, расстояние между которыми вблизи экватора равно расстоянию между меридианами и быстро увеличивается при приближении к полюсам.

Сами полюсы не могут быть изображены на проекции Меркатора, поэтому обычно карту в проекции Меркатора ограничивают областями до 80—85° северной и южной широты.



Масштаб на карте в этой проекции не является постоянным, он увеличивается от экватора к полюсам (как обратный косинус широты), однако масштабы по вертикали и по горизонтали всегда равны, чем, собственно, и достигается равноугольность проекции. На картах в данной проекции всегда указывается, к какой параллели относится основной масштаб карты.

Поскольку проекция Меркатора **имеет различный масштаб на разных участках**, эта проекция не сохраняет площади. Если основной масштаб относится к экватору, то **наибольшие искажения размеров объектов будут у полюсов**. Это хорошо заметно на картах в этой проекции: на них Гренландия кажется в 2—3 раза больше Австралии и сравнима по размерам с Южной Америкой. В реальности Гренландия втрое меньше Австралии и в 8 раз меньше Южной Америки.

Проекция Меркатора оказалась весьма удобной для нужд мореходства, особенно в старые времена. Объясняется это тем, что траектория движения корабля, идущего под одним и тем же румбом к меридиану (т.е. с неизменным положением стрелки компаса относительно шкалы) изображается прямой линией на карте в проекции Меркатора.

**Гномоническая проекция морских карт** принадлежит к одному из видов азимутальных (перспективных) проекций.

Гномоническая карта – центральная перспективная проекция – получается при проектировании земной поверхности на плоскость, касательную к ней, при условии, что глаз наблюдателя расположен в центре Земли.

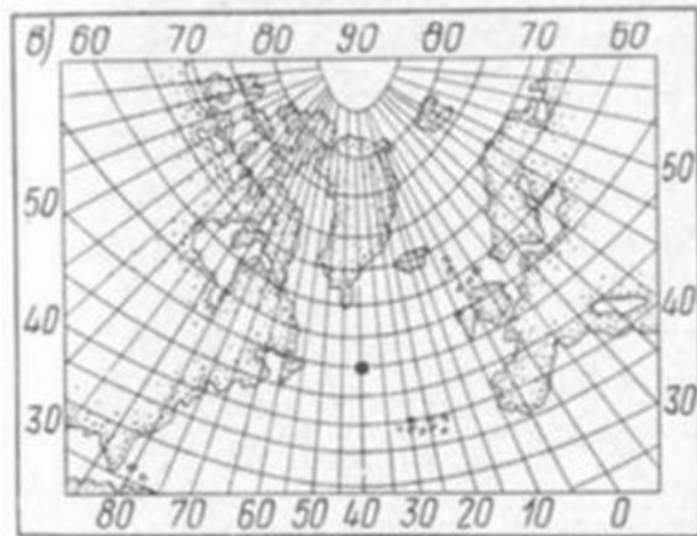
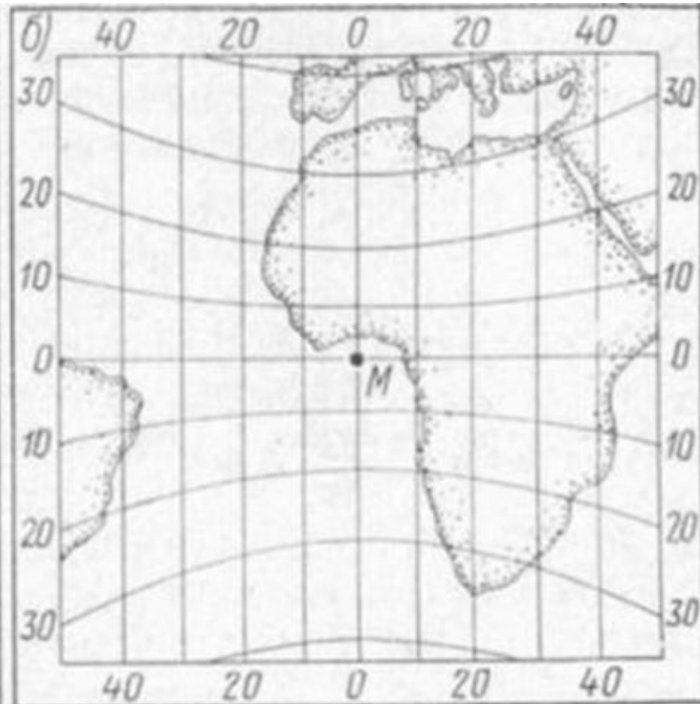
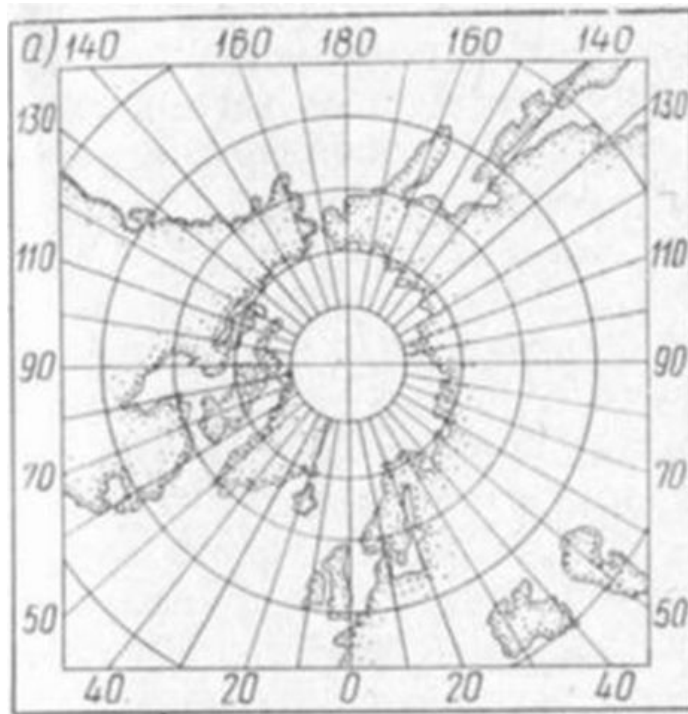
Гномонические Проекции делят на три типа:

- нормальной, прямой или полярной – называют проекцию, если центральная точка совпадает с одной из географических полюсов Земли;
- горизонтальная или косая проекции – центральная точка находится между полюсами и экватором;
- поперечная или экваториальная - если центральная точка находится на экваторе.

Карты в гномонической проекции широко применяются в судовождении из-за из «ортодромичности».

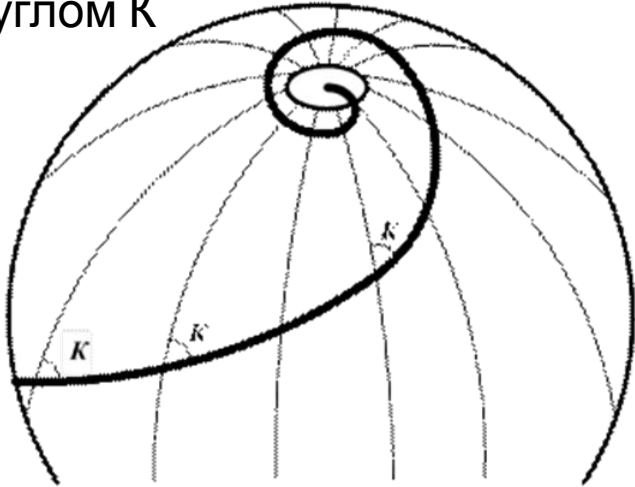
Известно, что большой круг есть кривая, плоскость которой проходит через центр сферы, т.е. через точку зрения, поэтому любая дуга большого круга на центральной проекции изобразится обязательно только в виде прямой линии.

Следовательно, на Гномонических картах все меридианы и ортодромии изображаются прямыми линиями. Поэтому эти карты используются при плавании по дуге большого круга, т.е. для прокладки на них ортодромических курсов и пеленгов, изображающихся на таких картах в виде прямых линий.



## 2. Локсодромия и её свойства.

**Локсодромия** - кривая, пересекающая все меридианы под одним и тем же углом  $K$

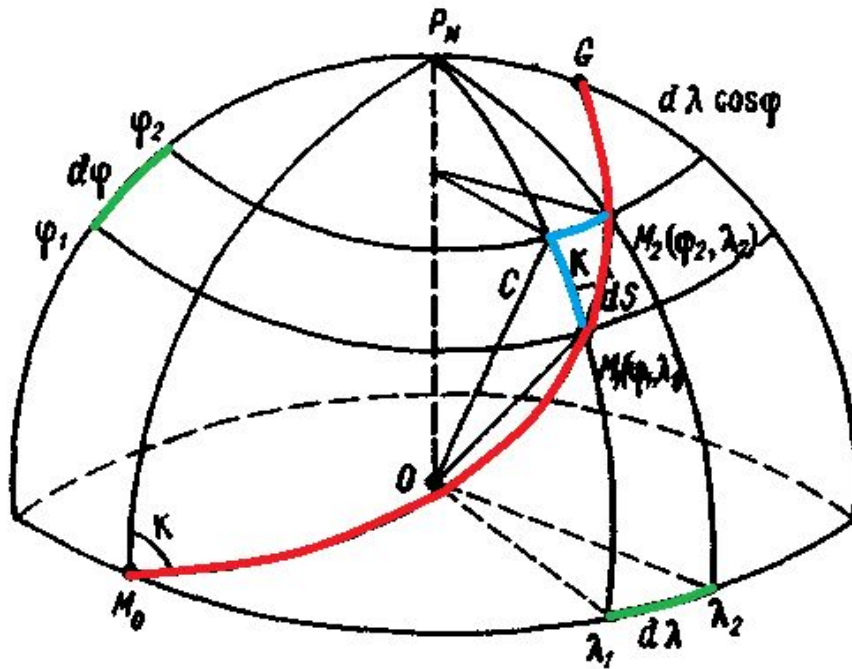


Судно, совершающее плавание постоянным курсом, перемещается именно по локсодромии. Расстояние между двумя точками на сфере по локсодромии не является кратчайшим и ее применение в мореплавании объясняется исключительным удобством использования компасов. Эта кривая чрезвычайно важна в практике навигации.

Основные свойства локсодромии:

1. Если  $K = 0$  или  $180^\circ$ , то очевидно, что локсодромия совпадает с меридианом, т. е. с большим кругом;
2. Если  $K = 90$  или  $270^\circ$ , то локсодромия совпадает с параллелью или экватором, т. е. образует малый или большой круг на поверхности сферы;
3. При любых других курсах локсодромия спиралеобразно стремится к полюсу, никогда его не достигая.

### 3. Уравнение локсодромии



Выведем уравнение кривой на поверхности сферы. Для этого рассмотрим рисунок, на котором изображен отрезок локсодромии, пересекающей меридианы под углом  $K$ . Выберем на локсодромии две точки  $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$  и  $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$ , разделенные элементарным расстоянием  $ds$  друг от друга, и проведем через них параллели и меридианы. Таким образом, на сфере зафиксирован элементарный треугольник  $M_1M_2C$ , в котором

$$\operatorname{tg} K = \frac{d\lambda \cos \varphi}{d\varphi}, \quad (3.1)$$

$$\text{откуда} \quad d\lambda = \operatorname{tg} K \frac{d\varphi}{\cos \varphi}. \quad (3.2)$$

Интегрируем (3.2), используя табличный интеграл в правой части:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda = \operatorname{tg} K \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\cos \varphi}. \quad (3.3)$$

Получаем уравнение локсодромии, проходящей через две заданные точки  $M_1(\varphi_1, \lambda_1)$  и  $M_2(\varphi_2, \lambda_2)$  на сфере:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \operatorname{tg} K \left[ \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right]. \quad (3.4)$$

Из этого уравнения следует, что при  $K = 0^\circ$  или  $K = 180^\circ$   $\operatorname{tg} K = 0$ , тогда и  $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$ , следовательно, на истинных курсах  $0$  или  $180^\circ$  долгота точек не изменяется и локсодромия совпадает с меридианом, превращаясь в дугу большого круга, и в данном случае проходит через земные полюса.



Если уравнение написать в виде

$$\operatorname{tg} K = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_2}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left( 45^\circ + \frac{\varphi_1}{2} \right)}$$

и принять  $K = 90^\circ$  или  $K = 270^\circ$ , то при этих значениях  $\operatorname{tg} K = \infty$ . Так как разность долгот  $\lambda_2 - \lambda_1$  находящаяся в числителе, не может быть равна бесконечности, то должен быть равен нулю знаменатель, а он может быть равен нулю при  $45^\circ + \varphi_1/2 = 45^\circ + \varphi_2/2$  т. е. когда  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

Следовательно, при  $K = 90^\circ$  или  $K = 270^\circ$  широта точек не изменяется и локсодромия совпадает с параллелью или с экватором.

Для всех истинных курсов, отличных от  $0 - 180^\circ$  и  $90 - 270^\circ$ , локсодромия по спирали приближается к одному из полюсов, но никогда его не достигает

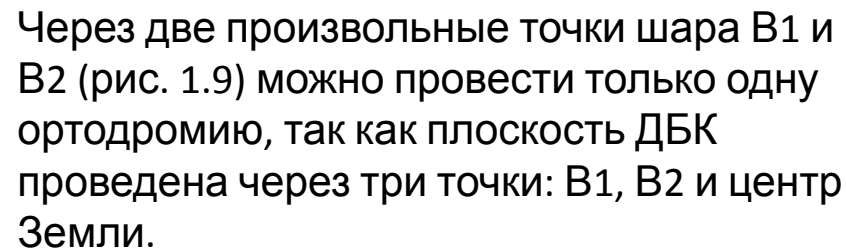
#### 4. Ортодромия, ее уравнение и свойства

**Длина отрезка локсодромии**, пройденного судном на данном курсе, **не является кратчайшим расстоянием** на земной поверхности.

**Кратчайшим расстоянием** на земной поверхности при переходе судна из одной точки до другой будет дуга большого круга, называемая **ортодромией** (что в переводе с греческого означает «прямой бег»).

Ортодромия с каждым меридианом составляет переменные углы. Поэтому плавание по ортодромии требует предварительного вычисления как ее положения, так и курсов, которыми ведут судно по дуге большого круга

При необходимости решения задач на эллипсоиде пользуются поправками за сфероидичность Земли, выбираемыми из специальных таблиц, помещенных в сборнике "Мореходные таблицы".



Применяя к треугольнику MB1b1 формулу тангенса катета прямоугольного сферического треугольника, можно

Это выражение справедливо для любой точки ортодромии, поэтому полученное выражение является ее уравнением

где  $\lambda_0$  и  $A_0$  — параметры ДБК ( $\lambda_0$  — долгота пересечения ДБК с экватором,  $A_0$  — направление ДБК в этой точке).

Для определения  $A_0$  и  $\lambda_0$  используют формулы:

$$\operatorname{tg} A_0 = \operatorname{ctg} \varphi_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_0);$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} - \lambda_0\right) = \operatorname{tg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \operatorname{cosec}(\varphi_2 - \varphi_1).$$

ДБК достигает максимальной широты в точке  $V$ , которая называется "вертекс". Вертексов два: один в северном полушарии (виден на рисунке), другой — в южном.

Координаты вертекса:

$$\varphi_V = 90^\circ - A_0;$$

$$\lambda_V = \lambda_0 + 90^\circ.$$

Проанализируем полученные выражения с целью определения свойств ортодромии.

## Свойства ортодромии

Из выражения

$$\begin{aligned}\varphi_V &= 90^\circ - A_0; \\ \lambda_V &= \lambda_0 + 90^\circ.\end{aligned}$$

и рисунка видно:

- \* меридиан вертекса является плоскостью симметрии ортодромии. То есть ортодромия пересекает каждый меридиан два раза
- \* если  $A_0 = 90^\circ$  ( $270^\circ$ ), то ортодромия совпадает с меридианом, если  $A_0 = 0^\circ$  ( $180^\circ$ ), то ортодромия совпадает с экватором.
- \* если неоднократно изменять долготу  $\lambda$  на  $360^\circ$  (предположим, что совершается кругосветное путешествие по ортодромии), то правая часть уравнения не изменяется. Не изменится и левая часть — широта постоянна. Значит ортодромия пересекает каждый меридиан каждый раз в одной и той же точке. Ортодромия — замкнутая кривая.

Судоводителей особо интересует направление ортодромии, то есть угол  $A$ , под которым ортодромия пересекает меридианы (курс ортодромии). Применяя теорему четырех рядом лежащих элементов сферической тригонометрии к треугольнику  $B_1PNB_2$ , после преобразования

$$\operatorname{ctg} A_1 = \operatorname{tg} \varphi_2 \cos \varphi_1 \operatorname{cosec} \Delta \lambda - \sin \varphi_1 \operatorname{ctg} \Delta \lambda.$$

Видно, что  $A = f(\varphi, \lambda)$ , т. е. курс ДБК зависит от координат точек  $B_1$  и  $B_2$ . Следовательно, ортодромия пересекает все меридианы под различными углами:

$$A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq \dots \neq A_n.$$