# Системы с нечеткой логикой

Нечеткие множества и отношения, их классификация, показатель размытости нечетких множеств. Нечеткие меры.
Методы построения функций принадлежности нечетких переменных множествам. Классификация функций принадлежности. Нечеткая логика.
Нечеткие алгоритмы обучения, оптимизации, контроля и управления

Математическая теория нечетких множеств (fuzzy sets) и нечеткая логика (fuzzy logic) являются обобщениями классической теории множеств и классической формальной логики.

Нечеткая логика применяется в автомобильной, аэрокосмической и транспортной промышленности, в области изделий бытовой техники, в сфере финансов, анализа и принятия управленческих решений и многих других.

# Основные определения

- Пусть $\boldsymbol{U}$ — так называемое универсальное множество, из элементов которого образованы все остальные множества, рассматриваемые в данном классе задач, например множество всех целых чисел, множество всех гладких функций и т.д. Характеристическая функция множества $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{U}$ — это функция $\boldsymbol{\mu_A}$, значения которой указывают, является ли $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}$ элементом множества $\boldsymbol{A}$:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

- Особенностью этой функции является **бинарный** характер ее значений.

- С точки зрения характеристической функции, нечеткие множества есть естественное обобщение обычных множеств, когда мы отказываемся от бинарного характера этой функции и предполагаем, что она может принимать любые значения на отрезке [0,1]. В теории нечетких множеств характеристическая функция $\mu_A(x)$ называется ***функцией принадлежности***, а ее значение — **степенью принадлежности** элемента $x$ нечеткому множеству $A$.

Более строго, ***нечетким множеством*** называется совокупность пар

$$A = \{\langle x, \mu_A(x)\rangle \mid x \in U\},$$

где $\boldsymbol{\mu_A(x)}$ — функция принадлежности, т.е $\mu_A : U \to [0,1]$

*<u>Пусть, например</u>*,

$$U = \{a, b, c, d, e\},$$

$$A = \{\langle a,\ 0\rangle, \langle b,\ 0{,}1\rangle, \langle c,\ 0{,}5\rangle, \langle d,\ 0{,}9\rangle, \langle e,\ 1\rangle\}.$$

Будем говорить, что элемент ***a*** не принадлежит множеству , элемент ***b*** принадлежит ему в малой степени, элемент ***c*** более или менее принадлежит, элемент ***d*** принадлежит в значительной степени, ***e*** является элементом множества .

# Пример 1:

Формализуем неточное определение "горячий чай". В качестве ***x*** (область рассуждений) будет выступать шкала температуры в градусах Цельсия. Очевидно, что она будет изменяется от 0 до 100 градусов. Нечеткое множество для понятия "горячий чай" может выглядеть следующим образом:

***C={0/0; 0/10; 0/20; 0,15/30; 0,30/40; 0,60/50; 0,80/60; 0,90/70; 1/80; 1/90; 1/100}.***

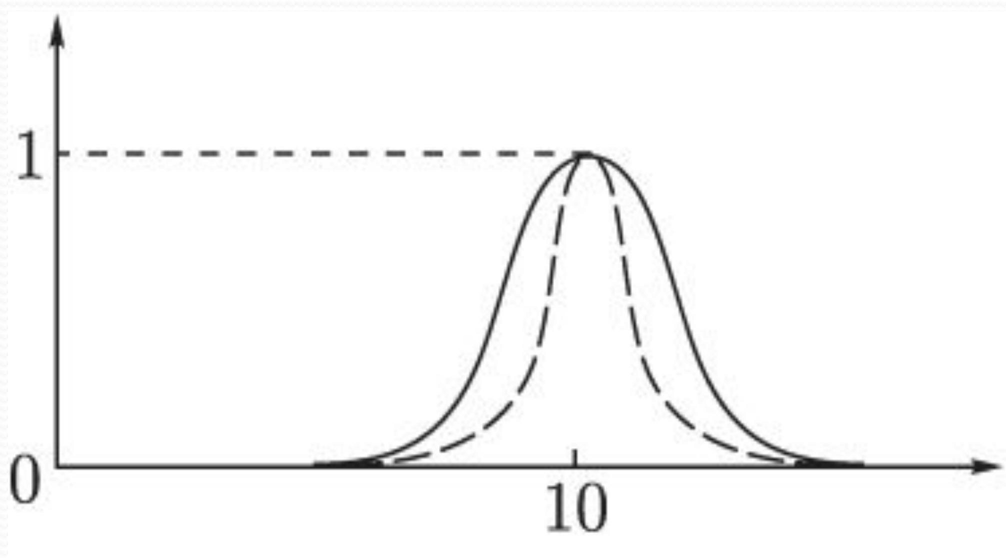
Так, чай с температурой 60° С принадлежит к множеству "Горячий" со степенью принадлежности 0,80. Для одного человека чай при температуре 60° С может оказаться горячим, для другого – не слишком горячим. Именно в этом и проявляется нечеткость задания соответствующего множества.

# Пример2:

- Пусть множество ***U*** есть множество действительных чисел. Нечеткое множество ***A***, обозначающее множество чисел, близких к **10**, можно задать следующей функцией принадлежности:

$$\mu_A(x) = \left(1 + |x - 10|^m\right)^{-1},$$

- где $m \in N$



- Нечеткое множество A называется **пустым**, если $\mu_A(u) = 0,\ \forall\ u \in U$.

В любом данном множестве (универсуме, надмножестве) существует единственное пустое нечеткое множество.

Над нечеткими множествами можно производить различные операции, при этом необходимо определить их так, чтобы в частном случае, когда множество является четким, операции переходили в обычные операции теории множеств, то есть операции над нечеткими множествами должны обобщать соответствующие операции над обычными множествами.

При этом обобщение может быть реализовано различными способами, из-за чего какой-либо операции над обычными множествами может соответствовать несколько операций в теории нечетких множеств.

Для нечетких множеств, как и для обычных, определены основные логические операции. Самыми основными, необходимыми для расчетов, являются ***пересечение*** и ***объединение***.

- *Пересечение* двух нечетких множеств (нечеткое "И"):

$$A \cap B: \mu F_{AB}(x)=\min(\mu F_A(x), \mu F_B(x)).$$

- *Объединение* двух нечетких множеств (нечеткое "ИЛИ"):

$$A \cup B: \mu F_{AB}(x)=\max(\mu F_A(x), \mu F_B(x)).$$

В теории нечетких множеств разработан общий подход к выполнению операторов пересечения, объединения и дополнения, реализованный в так называемых треугольных нормах и конормах. Приведенные выше реализации операций пересечения и объединения – наиболее распространенные случаи t-нормы и t-конормы.

Для определения пересечения и объединения нечетких множеств наибольшей популярностью пользуются следующие три группы операций:

- **Минимаксные**:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

- **Алгебраические:**

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x), \quad \mu_{A\cap B} = \mu_A(x)\mu_B(x).$$

- **Ограниченные:**

$$\mu_{A\cup B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\},$$
$$\mu_{A\cap B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}.$$

- **Дополнение** нечеткого множества во всех трех случаях определяется одинаково:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

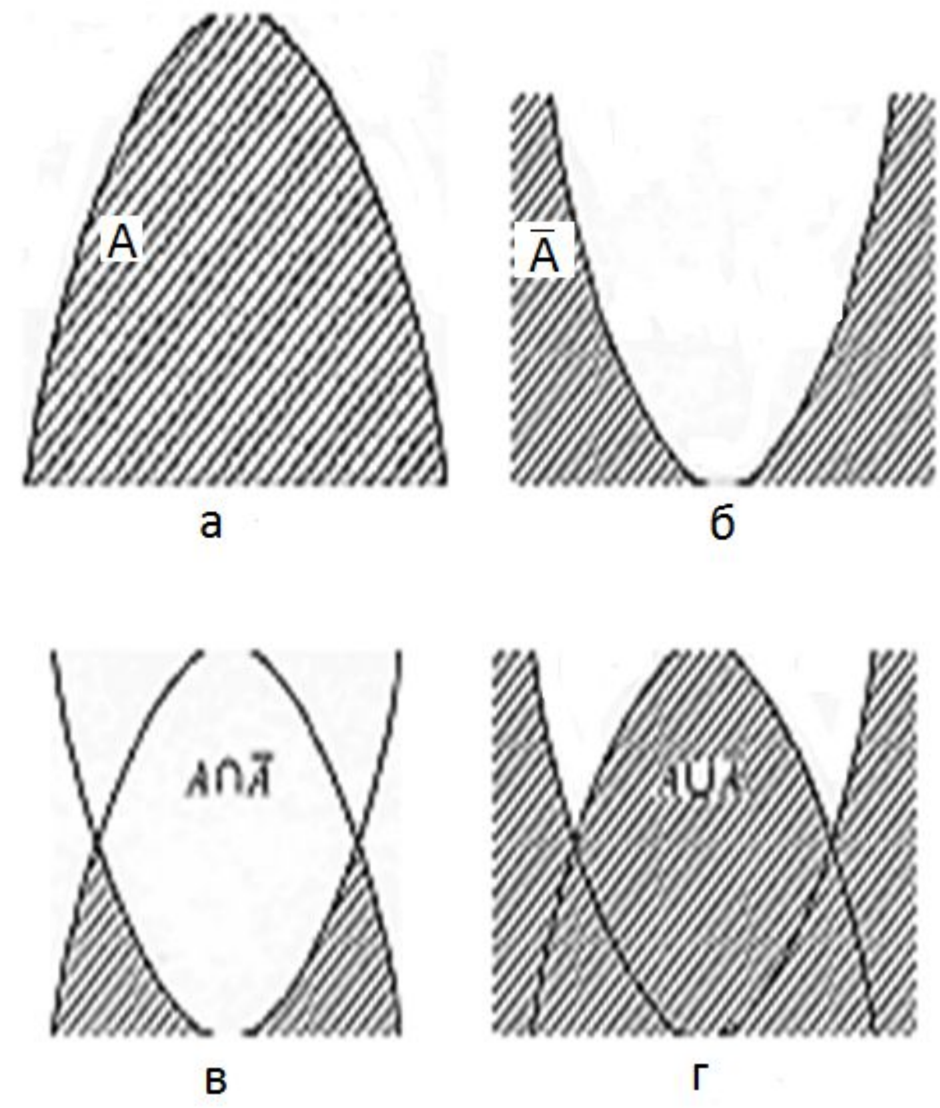
Графическая интерпретация логических операций:

а — нечеткое множество A;

б — нечеткое множество Ā;

в — A∩ Ā ;

г — A ∪ Ā



**Носителем нечеткого множества *A*** называется обычное подмножество таких точек ***U***, для которых величина μA(u) положительна. Носитель обозначается S(A):

$$S(A) = \{u \mid u \in U, \mu A(u) > 0\}$$

**Высотой** нечеткого множества **A** называется величина

$$h(A) = Sup\ \mu A(x) = max(\mu A)$$

Нечеткое множество называется **нормальным**, если

$$\sup_U \mu_A(x) = 1$$

В противном случае оно называется **субнормальным**.

Непустое субнормальное нечеткое множество можно привести к нормальному (нормализовать) по формуле

$$\mu'_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup_U \mu_A(x)}.$$

Элементы множества U, для которых степень принадлежности $\mu A(u) = 0.5$ называются точками перехода нечеткого множества A.

- Множеством α-уровня нечеткого множества A является обычное (четкое) множество $A\alpha$ всех таких элементов универсального множества U, степень принадлежности которых нечеткому множеству A больше или равна α:

$$A\alpha = \{u \mid \forall\ u \in U\ ,\ \mu A(u) \geq \alpha\}.$$

Множество α-уровня называют сечением (срезом) α нечеткого множества A.

Если $\mu A(u) \geq \alpha$, то говорят о сильном сечении,

если $\mu A(u) > \alpha$, то о слабом сечении.

Нечеткое подмножество универсального множества U может быть подмножеством другого нечеткого или обычного (четкого) подмножества (то есть с функцией принадлежности, принимающей значения 0 или 1) множества А.

Говорят, что А есть подмножество В или содержится в В тогда и только тогда, когда $\mu A(u) \le \mu B(u)$ для любого $u \in U$, то есть

$$A \subset B \Leftrightarrow \mu A(u) \le \mu B(u),\ \forall\ u \in U.$$

# Пример 3:

Пусть U = {-8, -5, -3, 0, 1, 2, 4, 6, 9} – множество целых чисел. Тогда нечеткое подмножество чисел, по абсолютной величине близких к нулю, можно определить, например, так:

***A = {0/-8, 0.5/-5, 0.7/-3, 1/0, 0.9/1, 0.8/2, 0.6/4, 0.4/6, 0/9}***

# Пример 4:

Если универсальное множество $U = \{a, b, c, d\}$,

а определенные на нем нечеткие подмножества

A и B равны соответственно

$A = (0.5/a, 0.8/b, 0.3/d)$, $B = (0.7/a, 1/b, 0.3/c, 1/d)$,

то $A \subset B$ (A содержится в B).

# Пример 5:

Если нечеткое множество

$A = \{0.3/a, 0.4/d, 0.7/c, 0.8/f, 0.6/b\}$,

то множеством α-уровня при α=0.7 будет множество $A_{0.7} = \{c, f\}$.

Множество A, разложенное по его множествам α-уровня, имеет вид:

$$A = 0.3\{a, d, c, f, b\} \cup 0.4\{d, c, f, b\} \cup 0.6\{c, f, b\} \cup 0.7\{c, f\} \cup 0.8\{f\}$$

# Пример 6:

Пусть универсальное множество U представлено в виде {a, b, c, d, e} и нечеткое подмножество A, заданное на U, имеет вид

$$A = (0/a,\ 0.5/b,\ 0.6/c,\ 0.7/d,\ 0.85/e).$$

Тогда носителем нечеткого множества A является

$$S(A) = \{b, c, d, e\}.$$

Высота нечеткого множества A - h(A)=0.85. Точка перехода u=b.

Множество A субнормально. Нормализованное множество будет иметь вид:

$$A = (0/a,\ 0.6/b,\ 0.7/c,\ 0.8/d,\ 1/e).$$

# Нечеткие отношения

Нечеткие отношения играют фундаментальную роль в теории нечетких систем. Аппарат теории нечетких отношений используется при построении теории нечетких автоматов, при моделировании структуры сложных систем, при анализе процессов принятия решений.

- Отношением R на множестве X называется некоторое подмножество декартова произведения $X \times X$.

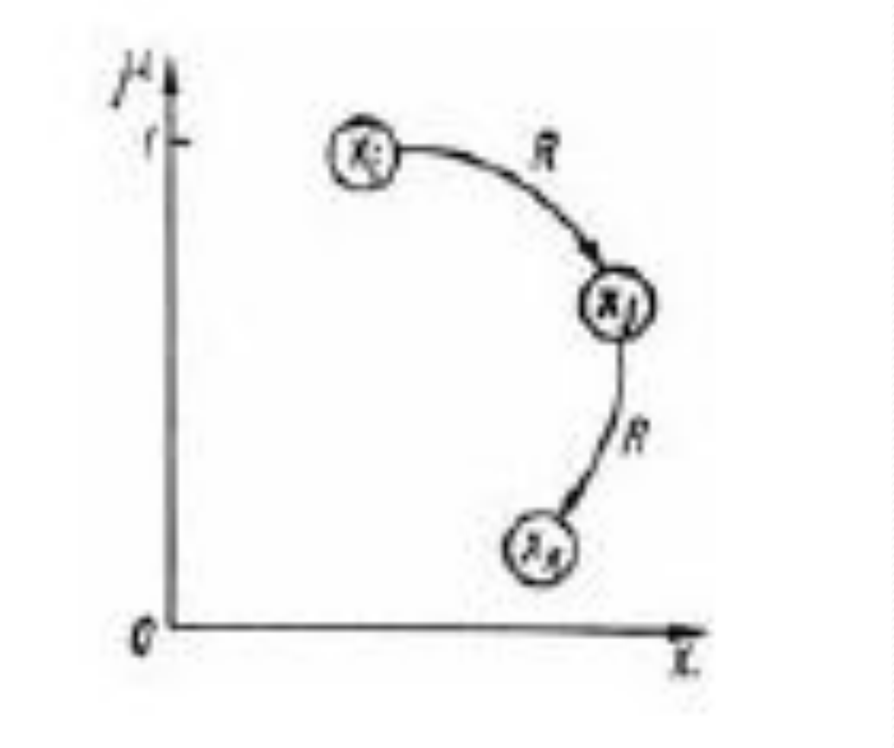
В соответствии с этим определением задать отношение R на множестве X означает указать все пары (x,y), которые связаны отношением R. Для обозначения того, что элементы (x,y) связаны отношением, используют следующие две эквивалентные формы записи: $xRy$ или $(x,y) \in R$ .

- Если множество X, на котором задано отношение R, конечно, то отношение задается в двух формах:
- 1) матричной

$$R = r_{ij},\ i = 1,m,\ \ j = 1,n$$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (x_i, x_j) \in R \\ 0, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

- 2) графовой



# Свойства четких отношений

- Пусть на множестве XxX заданы два отношения А и В , множество А определяется матрицей **A**= aij , а В -матрицей **B**= bij .

Тогда отношение С = A∪B является объединением двух отношений: $c_{ij} = max\{a_{ij}, b_{ij}\}$.

Если D = A∩B является пересечением отношений А и В , то $d_{ij} = min\{a_{ij}, b_{ij}\}$.

# Нечеткие отношения

- Нечетким отношением R на универсальном множестве $U = U_1 \times U_2$ называется нечеткое подмножество декартова произведения $U_1 \times U_2$, которое характеризуется такой функцией принадлежности $\mu R(x,y)$, что $U_1 \times U_2 \xrightarrow{\mu R} [0,1]$.

Причем $\mu R(x,y)$ принимается как <u>*субъективная*</u> мера выполнения отношения $xRy$.

Носителем нечеткого отношения R на множестве U называется подмножество декартова произведения U1×U2, определяемое так:

$$supp^R = \{(x, y) : \mu R(x, y) > 0, x \in U1, y \in U2\}$$

***Пример:***

Пусть нечеткое отношение R задано в виде:

Тогда носитель данного отношения будет иметь вид:

S(R) ={(x1, y1),(x1, y3),(x2, y1),(x2, y4),(x3, y1),(x3, y2),(x3, y3),(x3, y4)}

| R | y1 | y2 | y3 | y4 |
|---|---|---|---|---|
| x1 | 0.1 | 0 | 0.2 | 0 |
| x2 | 0.3 | 0 | 0 | 0.9 |
| x3 | 0.4 | 0.7 | 1 | 1 |

# Операции над нечеткими отношениями

Пусть на множестве $U_1 \times U_2$ заданы два нечетких отношения A и B с функциями принадлежности $\mu A(x,y)$, $\mu B(x,y)$.

- Тогда множество $C = A \cup B$ представляет собой объединение нечетких отношений A и B на множестве U, если его функция принадлежности определяется выражением

$$\mu C(x, y) = \max\{\mu A(x, y), \mu B(x, y)\}$$

- Аналогично множество $D = A \cap B$ является пересечением нечетких множеств A и B, если

$$\mu D(x, y) = \min\{\mu A(x, y), \mu B(x, y)\}$$

# Пример:

| $R_1$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.3 | 0.4 | 0.2 | 0 |
| $x_2$ | 0.8 | 1 | 0 | 0.2 |
| $x_3$ | 0.5 | 0 | 0.4 | 0 |

| $R_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.3 | 0 | 0.7 | 0 |
| $x_2$ | 0.1 | 0.8 | 1 | 1 |
| $x_3$ | 0.6 | 0.9 | 0.3 | 0.2 |

| $R_1 \cup R_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.3 | 0.4 | 0.7 | 0 |
| $x_2$ | 0.8 | 1 | 1 | 1 |
| $x_3$ | 0.6 | 0.9 | 0.4 | 0.2 |

| $R_1 \cap R_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.3 | 0 | 0.2 | 0 |
| $x_2$ | 0.1 | 0.8 | 0 | 0.2 |
| $x_3$ | 0.5 | 0 | 0.3 | 0 |

Нечеткое отношение B включает в себя (или содержит) нечеткое отношение A ($A \subset B$), если для них выполняется соотношение

$$\mu A(x, y) \le \mu B(x, y), \forall x, y \in X$$

<u>Пример:</u> $R_1 \subset R_2$

| $R_1$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.3 | 0.4 | 0.2 | 0 |
| $x_2$ | 0.5 | 0 | 1 | 0.9 |
| $x_3$ | 0.4 | 0 | 0.1 | 0.8 |

| $R_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.4 | 0.4 | 0.2 | 0.1 |
| $x_2$ | 0.5 | 0 | 1 | 1 |
| $x_3$ | 0.5 | 0.1 | 0.2 | 0.9 |

- **Обычное подмножество α-уровня нечеткого отношения**. Пусть $\alpha \in [0,1]$. Обычным подмножеством α-уровня нечеткого отношения $R \subset X \times X$ называется обычное подмножество

$$G_\alpha = \{(x,y) \mid \mu_R(x,y) \geq \alpha\}$$

Пример:

1. Для отношения, приведенного ниже, обычное подмножество α-уровня 0,8

$$G_{0,8} = \{(x_1,y_2),(x_1,y_3),(x_2,y_2),(x_2,y_4),(x_3,y_1)\}$$

| $R_1$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.3 | 0.8 | - | 0 |
| $x_2$ | 0.5 | 1 | 0.3 | 0.9 |
| $x_3$ | 1 | 0.2 | 0.6 | 0.7 |

# Пример:

- 2. Рассмотрим нечеткое отношение, определенное формулой

$$\mu R(x, y) = 1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

Подмножество уровня 0.3 будет определяться условием $1 - \frac{1}{1+x^2+y^2} \geq 0{,}3$ или $x^2 + y^2 \geq 3/7$

Это подмножество – внешность круга радиуса $r = \sqrt{3/7}$, включая его границу – окружность.

- **Первая проекция** нечеткого отношения R определяется функцией принадлежности

$$\mu R(1)\,(x) = \max \mu R(x, y).$$

Аналогично **вторая проекция**:

$$\mu R(2)\,(y) = \max \mu R(x, y).$$

- Вторая проекция первой проекции (или наоборот) называется **глобальной проекцией** нечеткого отношения и обозначается h(R).

- Таким образом, $h(R) = \max\max \mu R(x, y) = \max\max \mu R(x, y)$.

Если h(R)=1 – отношение *нормально*, если h(R) < 1 – *субнормально*.

# Пример:

Вычислим первую, вторую и глобальную проекции отношения R, заданного матрицей:

| $R$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | 1-я |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0.1 | 0.2 | 1 | 0.3 | 1 |
| $x_2$ | 0.6 | 0.8 | 0 | 0.1 | 0.8 |
| $x_3$ | 0 | 1 | 0.3 | 0.6 | 1 |
| $x_4$ | 0.8 | 0.1 | 1 | 0 | 1 |
| $x_5$ | 0.9 | 0.7 | 0 | 0.5 | 0.9 |
| $x_6$ | 0.9 | 0 | 0.3 | 0.7 | 0.9 |
| 2-я | 0.9 | 1 | 1 | 0.7 | $h(R)=1$ |

Важное значение в теории нечетких множеств имеет композиция (или произведение) нечетких отношений. В отличие от обычных (четких) отношений композицию (произведение) нечетких отношений можно определить разными способами:

Максиминная композиция

Минимаксная композиция

Максимультиплекативная композиция

# Свойства нечетких отношений

1. Рефлексивность. (например, отношения «у примерно равно х», «у близко х» являются рефлексивными)
2. Антирефлексивность.
3. Симметричность/антисимметричность/совершенная асимметричность.
4. Транзитивность

# Специальные типы нечетких отношений

- Нечеткие отношения предпорядка
- Нечеткие отношения порядка
- Отношение подобия, или нечеткое отношение эквивалентности
- Отношения различия
- Отношения сходства и несходства

# Классы нечетких отношений

Все типы нечетких отношений в зависимости от свойств, которыми они обладают, могут быть разделены на три больших класса:

1. В первый класс входят симметричные отношения, которые обычно характеризуют сходство или различие между объектами множества .
2. Второй класс образуют антисимметричные отношения; они задают на множестве отношения упорядоченности, доминирования, подчиненности и т.п.
3. Третий класс состоит из всех остальных отношений.

*Отношения каждого класса, в свою очередь, могут быть разделены на подклассы в зависимости от выполнения условий рефлексивности и антирефлексивности.*

Рефлексивные и симметричные отношения обычно называют отношениями сходства (толерантности, безразличия или неразличимости).

Эти отношения обозначаются буквой S.

- Антирефлексивные и симметричные отношения называются **отношениями различия** и обозначаются буквой D.

Отношения сходства и отношения различия двойственны друг другу.

**Антисимметричные отношения, называемые предпорядками и обозначаемые буквой** P.
В зависимости от выполнения условия рефлексивности или антирефлексивности делятся на нестрогие и строгие порядки.

Из отношений третьего класса, обозначаемых буквой R, обычно выделяют лишь рефлексивные отношения, которые будут называться слабыми порядками.

- На следующем уровне классификации из каждого класса отношений могут быть выделены отношения специального вида.

Определяющим условием для них является **условие транзитивности**. Оно устанавливает связь между силой отношения для различных пар объектов из X. Эта связь может быть очень слабой, а может накладывать достаточно сильные ограничения на возможные значения силы отношения между объектами из X.

- Число отличающихся друг от друга условий транзитивности зависит от типа отношения, для которого они формулируются.

# Показатель размытости нечетких множеств

Нечеткие множества используются для описания плохо определенных, неоднозначно понимаемых ситуаций, объектов, понятий.

- Было предложено ввести в рассмотрение показатель этой неопределенности, который можно было бы использовать для оценки, классификации объектов, описываемых нечеткими множествами.
- Были сформулированы основные свойства, которым должен удовлетворять такой показатель, называемый **показателем размытости** (или **мерой энтропии**) нечетких множеств, и в качестве этого показателя был предложен функционал, аналогичный шенноновской энтропии в теории информации.

**Существует несколько аспектов, связанных с понятием показателя размытости нечеткого множества.**

1. Прежде всего, это — интерпретация показателя размытости как показателя внутренней неопределенности, двусмысленности, противоречивости, обусловленных неполной, частичной принадлежностью объектов множеству.
2. Второй аспект связан с интерпретацией показателя размытости как меры отличия нечеткого множества от обычного множества.
3. И наконец, само существование нетривиального показателя размытости, удовлетворяющего определенным свойствам, напрямую зависит от свойств алгебры нечетких множеств и характеризует ее как алгебраическую структуру.

- Показатель размытости нечеткого множества можно определить как меру внутренней неопределенности, двусмысленности объектов множества $X$ по отношению к некоторому свойству $A$, характеризующему эти объекты и определяющему в $X$ нечеткое множество объектов $A$.
- Если некоторый объект $x \in X$ обладает свойством $A$, но лишь в частичной мере: $0 < \mu_A < 1$, то внутренняя неопределенность, двусмысленность объекта $x$ по отношению к свойству $A$ проявляется в том, что он, хотя и в разной степени, принадлежит сразу двум противоположным классам: классу объектов, "обладающих свойством $A$", и классу объектов, "не обладающих свойством $A$".

- Эта двусмысленность объекта х по отношению к свойству А максимальна, когда степени принадлежности объекта к обоим классам равны, т. е.

$$\mu_A(x) = \mu_{\bar{A}}(x) = 0,5$$

- И наоборот, двусмысленность объекта минимальна, когда объект принадлежит только к одному из этих классов, т.е. либо

$$\mu_A(x) = 1, \quad \mu_{\bar{A}}(x) = 0$$

либо

$$\mu_A(x) = 0 \qquad \mu_{\bar{A}}(x) = 1$$

Выбор конкретного показателя зависит от условий задачи.

Необходимо обратить также внимание на связь между показателем размытости нечетких множеств и неопределенностью, возникающей при принятии решения, к какому из двух классов, “А" или "не А" , отнести объекты множества .

# Нечеткие меры

- При решении многих задач анализа сложных систем в условиях неопределенности широко используются методы теории вероятностей и математической статистики.
- Эти методы предполагают вероятностную интерпретацию обрабатываемых данных и полученных статистических выводов.
- В последнее время возрастает потребность в новых подходах к математическому описанию информации, характеризующейся высоким уровнем неопределенности.

- Один из возможных подходов может основываться на обобщении понятия меры и построении нечетких мер, свободных от ряда ограничений вероятностной меры.

- Существуют различные интерпретации понятия вероятности. Наиболее содержательной с математической точки зрения является аксиоматическая трактовка вероятности А.Н. Колмогорова с помощью теории меры.

Под субъективной вероятностной мерой понимается степень уверенности в данном событии, возникающая у человека на основе известных ему данных.

Она всегда зависит от индивидуального опыта и поэтому различна для разных людей.

Неясность суждений, основанных на субъективном анализе, обусловливает многие трудности, которые возникают при использовании субъективной вероятности.

Субъективную вероятность можно рассматривать как индивидуальный способ обработки тех аспектов субъективных данных, которые доступны индивидуальному суждению.

- Однако чаще всего такие суждения неаддитивны.
- В отличие от субъективной вероятности, нечеткая мера свободна от весьма ограничивающего требования аддитивности, что делает ее особенно привлекательной для решения ряда задач при наличии неопределенности типа нечеткости.

В настоящее время, тем не менее, существует тенденция вероятностной трактовки нечетких множеств.

- Среди мер, применяемых в теории нечетких множеств, можно назвать следующие: