Математика
Часть 2

УГТУ-УПИ

2007 г.

Лекция 3

Комплексные числа

1. Основные понятия.

2. Операции над комплексными числами.

1. Основные понятия.

Комплексные числа - это числа вида $z = x + iy$,

где x и y – действительные числа, а i- мнимая единица,

определяемая так: $i^2 = -1 \qquad (i = \sqrt{-1})$.

x — реальная часть z, y – мнимая часть z.

Обозначения: $x = Re\, z$

$y = Im\, z$

Для комплексных чисел используют также обозначение:

$$z = (x, y).$$

Числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются ***равными,*** если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексным нулем называется число $z = (0,0)$.

Число $z = (x, 0)$ называется ***действительным*** и обозначается $(x, 0) = x$.

Число $z = (0, y)$ называется ***мнимым,*** $(0, y) = iy$.

Число $z = (0,1)$- ***мнимая единица*** :

$$i = (0,1)$$

$z = x + iy$ – это ***алгебраическая форма записи комплексного числа.***

2. Операции над комплексными числами .

Рассмотрим комплексные числа в алгебраической форме:

$$z_1 = x_1 + iy_1; \quad z_2 = x_2 + iy_2;$$

I. Сложение.

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$$

II. Умножение.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =$$

$$= (x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}$$

Число ***z* = (x ,-y)*** называется ***сопряженным*** к числу ***z = (x ,y).***

Вычислим

1) $z + z^* = (x + iy) + (x - iy) = 2x;$

$$\boxed{z + z^* = 2x}$$

2) $z \cdot z^* = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2;$

$$\boxed{z \cdot z^* = x^2 + y^2}$$

III. Вычитание (обратное сложению).

$$\boxed{z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)}$$

IV. Деление (обратное умножению).

$$\boxed{z = \frac{z_1}{z_2}}$$

Чтобы выполнить деление, надо домножить числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*}}$$

В результате получим:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Пользуясь алгебраической формой комплексного числа, можно производить операции сложения, умножения и вычитания по обычным правилам для многочленов.

При делении комплексных чисел надо числитель и знаменатель домножить на сопряженное знаменателю число.

Пример. $z_1 = 2 + 3i; \quad z_2 = 1 + 2i;$

Выполнить действия I-IV.

Решение.

1) $z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 + 2i = 3 + i5;$

2) $z_1 \cdot z_2 = \left(2 + 3i\right) \cdot \left(1 + 2i\right) = -4 + i7;$

3) $z_1 - z_2 = 2 + 3i - 1 - 2i = 1 + i;$

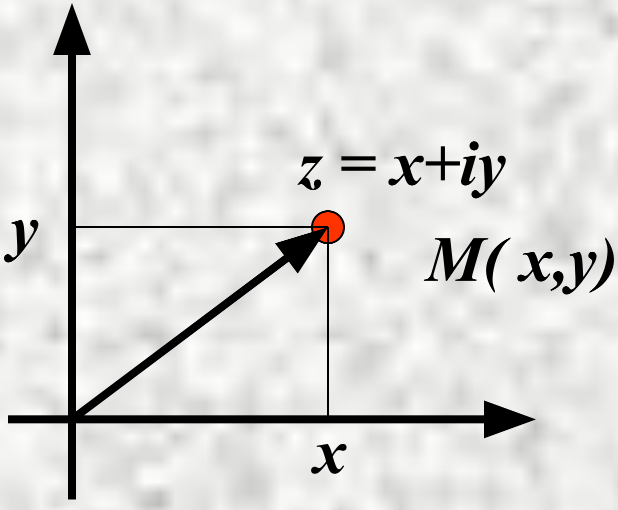
4) $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{\left(2+3i\right)\left(1-2i\right)}{\left(1+2i\right)\left(1-2i\right)} =$$

$$= \frac{2 - 4i + 3i - 6i^2}{1+4} = \frac{8-i}{5} = \frac{8}{5} - i\frac{1}{5}$$

Изображение комплексных чисел на плоскости.

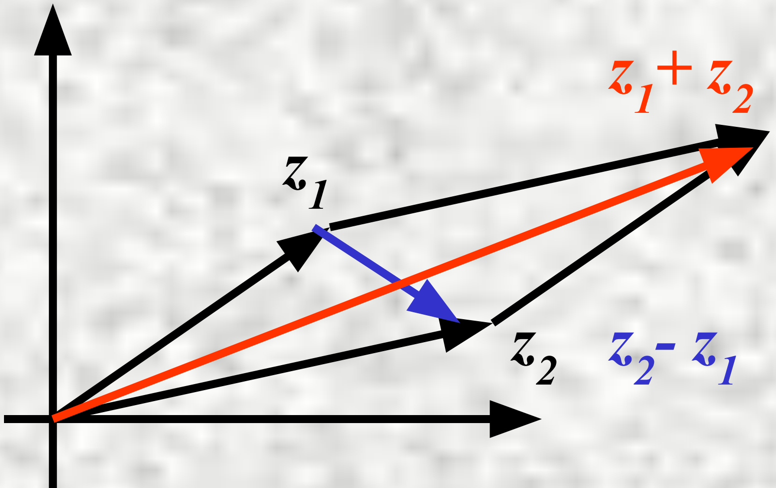
Плоскость, на которой изображаются комплексные числа будем называть ***комплексной,*** ось абсцисс – ***действительной осью,*** ось ординат – ***мнимой осью.***

Комплексное число $\boldsymbol{z=(x,y)}$ однозначно определяется двумя числами x и y , следовательно, его можно изобразить точкой на плоскости с координатами x и y .



Существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех комплексных чисел $z = (x,y)$ и множеством точек $M(x,y)$ комплексной плоскости, а также между множеством радиус-векторов с координатами (x,y).

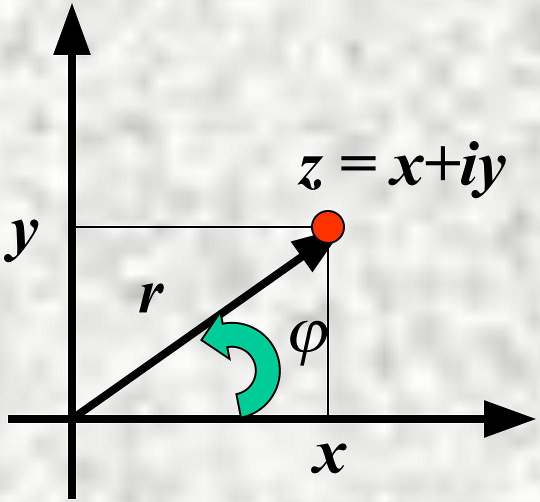
Операции сложения и вычитания можно выполнять ***в векторной форме.***



Замечание.

Множество комплексных чисел не поддается упорядочению.

Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа.



$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad r \geq 0$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x}$$

Таким образом,

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$$

или

(Т) $$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$ —

тригонометрическая форма записи комплексного числа

Число ***r*** называется ***модулем,*** а число φ ***аргументом*** комплексного числа ***z*** .

Обозначения.

$$\boxed{\begin{aligned}|z| &= r\\ \arg z &= \varphi\end{aligned}}$$

Формула Эйлера

Запишем формулы Маклорена для функций $\cos\varphi$, $\sin\varphi$.

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots$$

$$+$$

$$i\sin\varphi = i(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots)$$

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \ldots$$

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \ldots$$

С учётом: $i^2 = -1; i^3 = i \cdot i^2 = -i; \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1;$

$i^5 = i \cdot i^4 = i; \ldots$

$$\boxed{\cos\varphi + i\sin\varphi = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \ldots}$$

Запишем формулу Маклорена для функции e^x,

где $x = i\varphi$:

$$\boxed{e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \ldots}$$

Из равенства правых частей следует:

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$ – ***формула Эйлера.***

По формуле Эйлера из (Т) следует

(П) $$\boxed{z = re^{i\varphi}}$$ – ***показательная форма записи z .***

Обозначения.

$$\boxed{\begin{array}{l} |z| = r \\ \arg z = \varphi \end{array}}$$

Следствия.

Комбинируя

$$\boldsymbol{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,}$$

$$\boldsymbol{e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi,}$$

получим

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{aligned}}$$

Пример. $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

Записать это число в трёх формах, дать геометрическую интерпретацию.

Решение.

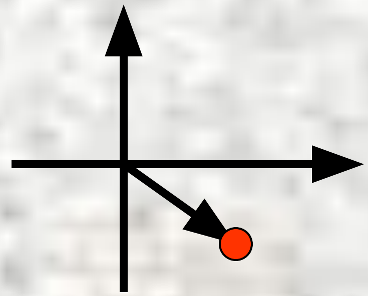
(А) $$\boxed{z=\sqrt{2}-i\sqrt{2};}$$

$$x=\sqrt{2};\,y=-\sqrt{2};$$

$$|z|=\sqrt{2+2}=2;tg\varphi=-1;\varphi=-\frac{\pi}{4};$$

(Т) $$\boxed{z=2(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})}$$

(П) $$\boxed{z=2e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$



Операции над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Рассмотрим

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1); z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2);$$

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}; z_2 = r_2 e^{i\varphi_2};$$

Умножение:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)}$$

Деление:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)}$$

Возведение в целую степень:

$$z = re^{i\varphi}$$

$$\boxed{z^n = r^n e^{in\varphi}}$$

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

Так как $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$e^{in\varphi} = \left(e^{i\varphi}\right)^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi}$$ –

формула Муавра.

Извлечение корня

(обратное возведению в степень):

$$z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + 2\pi k)}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

Здесь k может принимать все возможные целые значения, но ***различных*** (неодинаковых) корней будет только **n** и они будут соответствовать числам k=0,1,2,3,…,(n-1):

$$z_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}};(k=0)$$

$$z_1 = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)};(k=1)$$

$$z_2 = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\cdot 2\right)};(k=2)$$

и т.д.

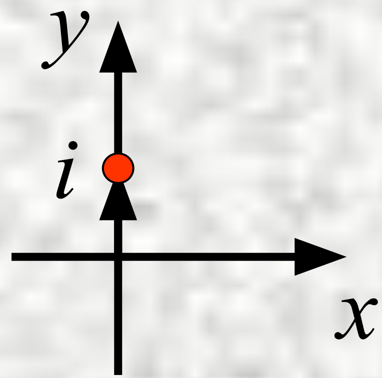
Замечание.

Числа $z_0, z_1,\ldots, z_{n-1}$ имеют ***одинаковый модуль*** $\sqrt[n]{r}$

⇒ им соответствуют ***точки на окружности радиуса*** $\sqrt[n]{r}$.

Пример. $\sqrt[4]{i} = ?$

Решение.



Обозначим $z = \sqrt[4]{i};$

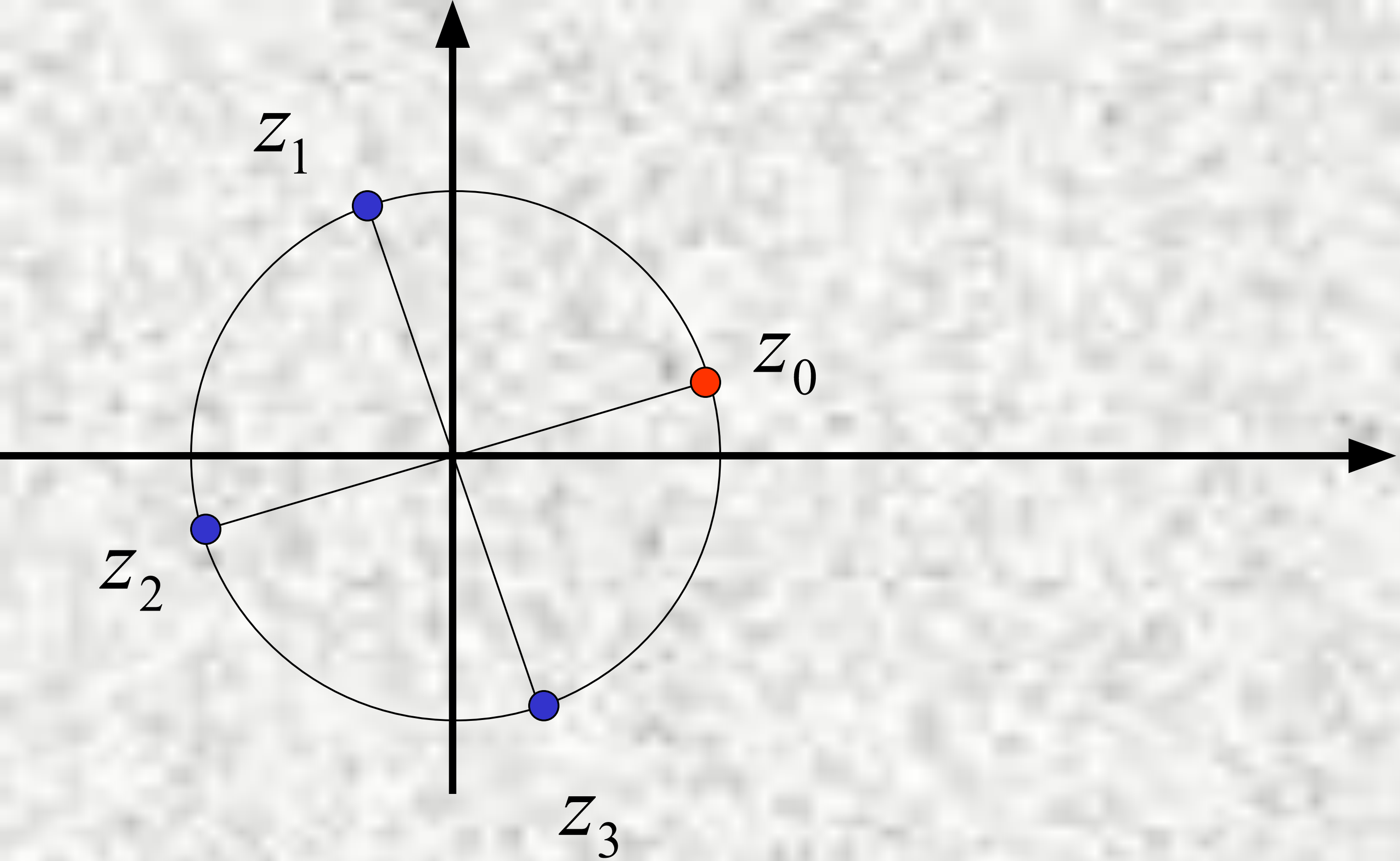
$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$$

$$z = \sqrt[4]{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Различных значений - ***четыре:***

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}/4} = e^{i\frac{\pi}{8}}; \qquad z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)};$$

$$z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)}; \qquad z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)};$$


z_1
z_0
z_2
z_3