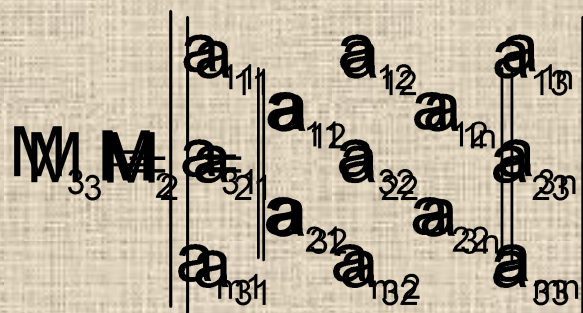
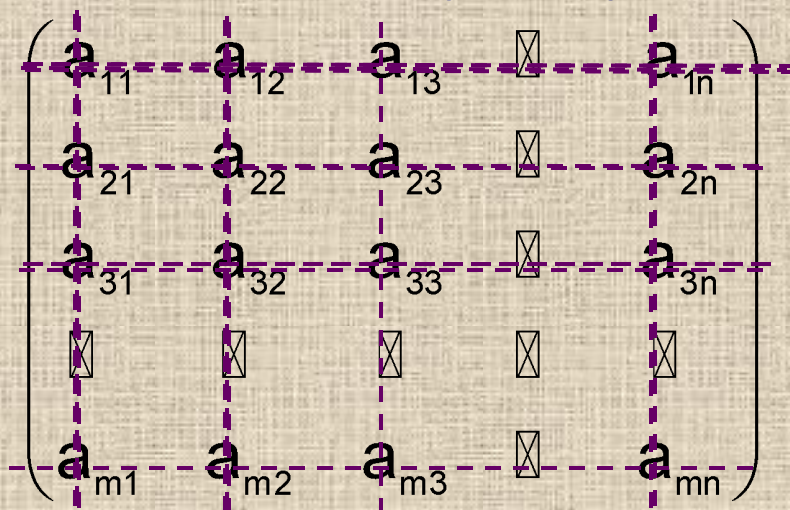


# Линейная алгебра

- Ранг матрицы
- Метод Гаусса решения систем линейных уравнений
- Исследование систем линейных уравнений

# Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу размерностью  $(m \times n)$ .



Выделим в этой матрице произвольное число  $k$  строк и  $k$  столбцов. Элементы матрицы  $A$ , стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют определитель  $k$ -ого порядка.

**Минором**  $k$ -того порядка матрицы  $A$  называют определитель, полученный из  $A$  выделением произвольных  $k$  строк и  $k$  столбцов и обозначается  $M_k$

порядок минора матрицы

Таких миноров матрицы  $A$  размера  $(m \times n)$  можно

составить  $C_m^k \cdot C_n^k$  штук, где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  -

число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ .

**Рангом** матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы и обозначается  $r$ ,  $r(A)$ ,  $rang A$ ,  $rg A$ ,  $Rg A$ .

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется **базисным**. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Строки и столбцы, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются **базисными**.

# Ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Матрица  $A$  имеет 4 минора 3 - его порядка, например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -20$$

18 миноров 2 - го порядка, например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

12 миноров 1 - го порядка – сами элементы.

Наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы равен 3, поэтому:  $r(A) = 3$

# Свойства ранга матрицы

- При транспонировании матрицы её ранг не меняется.
- Если вычеркнуть из матрицы нулевую строку(столбец), то ранг матрицы не изменится
- Ранг матрицы не изменится при элементарных преобразованиях и равен количеству ненулевых строк в ступенчатой матрице.
- Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+III} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \times (-2) + III} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

# Методы вычисления ранга матрицы

1. Метод элементарных преобразований (метод Гаусса).
2. Метод окаймляющих миноров.

Минор  $M_{k+1}$  порядка  $(k+1)$ , который в себе содержит минор  $M_k$  порядка  $k$  называется **окаймляющим минором**.

Пример:

Вычислить ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \\ 7 & -6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение:

1. Выберем минор второго порядка, находящийся в верхнем левом углу,

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

**Вывод:** минор второго порядка не равен нулю, следовательно ранг не менее двух.

2. Составляем миноры третьего порядка, окаймляющие отличный от нуля минор второго порядка. Для этого добавим к  $M_{12}^{12}$  третью строку и третий столбец.

$$M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 + 6) = 0$$

$$M_{123}^{124} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 7 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{124}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 7 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{124}^{124} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 7 & -6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 21 & -6 & 7 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 21 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Все миноры третьего порядка, окаймляющие минор второго порядка, равны нулю. А это значит, что *rang A=2*.

$S_1, S_2, \dots, S_k$  – строки (столбцы) матрицы  $A$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  – некоторые числа

Выражение вида  $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_k S_k$  называется **линейной комбинацией**

Строки (столбцы)  $S_1, S_2, \dots, S_k$  называют **линейно зависимыми**, если существуют числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , не все равные нулю одновременно, такие, что линейная комбинация  $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_k S_k = 0$  (нулевой матрице).

Если же равенство  $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_k S_k = 0$  возможно только при условии  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ , то строки (столбцы)  $S_1, S_2, \dots, S_k$  называют **линейно независимыми**.

Если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ , то строки  $S_1, S_2, S_4$  – линейно зависимы.

**Лемма** (о линейной зависимости). Строки (столбцы)  $S_1, S_2, \dots, S_k$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы одна из них является линейной комбинацией других.

**Теорема** (о базисном миноре). 1. Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы.  
2. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

**Следствие** (критерий равенства нулю определителя). Определитель матрицы  $A$  равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) линейно зависимы.

**Линейным уравнением** называется выражение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  — числа.

$a_1, a_2, \dots, a_n$  — **коэффициенты** уравнения

$b$  — **свободный член**

Если  $b = 0$  , то уравнение называют **однородным**.

Если  $b \neq 0$  , то уравнение называют **неоднородным**.

Системой  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (*)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{- основная матрица}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{столбец из неизвестных} \\ \text{столбец из свободных членов} \end{array}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Тогда система матрица имеет вид:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

Т.е. система в матричном виде примет вид :  $A \cdot X = B$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Если закрепить раз и навсегда нумерацию неизвестных, то можно опустить неизвестные в записи системы и записать ее в виде матрицы, отделяя столбец свободных членов вертикальной чертой.

$$\boxed{B} = (A|B) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

*Расширенная матрица системы*

Упорядоченный набор чисел  $c_1, c_2, \dots, c_n$  называется **решением** системы (\*), если он обращает в тождество каждое уравнение системы.

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ — решение системы}$$

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Решить СЛАУ – значит решить две задачи:

- выяснить, имеет ли СЛАУ решения;
- найти все решения, если они существуют.

Определить совместность и определенность.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3; \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3; \\ x_1 + x_2 = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$

совместная и определенная    несовместная

совместная и неопределенная

Если столбец свободных членов равен нулевой матрице, то система называется **однородной**, в противном случае она является **неоднородной**.

Системы называются **равносильными (эквивалентными)**, если каждое решение одной системы является решением другой, и наоборот.

# Исследование систем линейных уравнений

## Теорема Кронекера - Капелли.

Для того, чтобы система линейных алгебраических уравнений была **совместна** (имела решение), необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы равнялся рангу матрицы коэффициентов:  $r(B) = r(A)$

Если  $r(B) = r(A) = n$  (числу неизвестных), то система **совместна и определена** (имеет единственное решение).

Если  $r(B) = r(A) < n$ , то система **совместна и неопределенна** (имеет бесконечное множество решений).

Если  $r(B) \neq r(A)$ , то система **несовместна** (не имеет решений).

При решении систем линейных алгебраических уравнений нет необходимости заранее вычислять ранги основной и расширенной матриц. Их определение производится автоматически при выполнении метода исключения Гаусса.

# Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Следующие действия над расширенной матрицей системы называются **элементарными преобразованиями**.

- Умножение элементов строк на одно и то же число, не равное нулю
- Перестановка местами двух строк
- Прибавление к элементам строки элементов другой строки, умноженных на произвольный множитель.

Конечной целью элементарных преобразований является получение верхнетреугольной матрицы, у которой все элементы, стоящие под главной диагональю равны нулю. Преобразования стараются производить так, чтобы на главной диагонали появлялись единицы.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \end{array} \right)$$

# Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x - 2y + 4z = 5 \\ 2x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы. Ко второй строке прибавим третью строку, умноженную на (-5)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{I + II \times (-2) \\ II + I \times (-2) \\ III + I \times (-3)}} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

К первой строке прибавим вторую строку, умноженную на (-2)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 19 & -13 & 25 \\ 0 & 23 & -16 & 30 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{III - II \\ II + III \times (-5)}} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 19 & -13 & 25 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array} \right)$$

Ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на (-2). Из третьей строки вычтем вторую строку. К третьей строке прибавим первую строку, умноженную на (-3).

# Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 6 & | & -9 \\ 0 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 4 & -3 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + \text{II} \times 4} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 6 & | & -9 \\ 0 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{II} \times (-1) \\ \text{III} : 5 \end{matrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & 6 & | & -9 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

К третьей строке прибавим вторую строку, умноженную на 4  
 Вторую строку умножим на (-1)  
 Восстановим систему

$$\begin{cases} x - 8y + 6z = -9 \\ y - 2z = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 + 8y - 6z \\ y = 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 + 16 - 6 = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 1$$

# Исследование систем линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} I:2 \\ \\ \\ \sim \end{array}$$

II - I

II : (-2)

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

III + I × (-3)

IV + I

~

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

III : (-4)

IV : 4

~

# Исследование систем линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{III} - \text{II} \\ \text{IV} - \text{II} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(\overset{\mathbb{W}}{B}) = r(A) = 2 \Rightarrow \text{система совместна}$$

$$n = 3 - \text{число неизвестных}$$

$$r(\overset{\mathbb{W}}{B}) < n \Rightarrow \text{система неопределенна}$$

$$n - r = 3 - 2 = 1 - \text{число свободных переменных}$$

Пусть  $x_2 = t$ . Восстановим систему:

$$\begin{cases} x_1 + t + x_3 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - t - x_3 = 1 - t \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

# Исследование систем линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = 3 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{II} + \text{I} \times (-2) \\ \text{III} - \text{I} \\ \sim \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{III} - \text{II} \\ \sim \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

$$r(\overset{\sqcup}{B}) = 3$$

$$r(A) = 2$$

$$r(\overset{\sqcup}{B}) \neq r(A) \Rightarrow \text{система несовместна}$$