

11.5. Интегрирование простейших рациональных дробей

Класс рациональных функций можно представить в виде дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.

Если степень числителя не меньше степени знаменателя, то дробь считается неправильной и делением в ней выделяется целая часть.

1

Интегралы вида:

$$\int \frac{1}{kx + b} dx$$

(степень знаменателя дроби равна 1).

Замена переменной:

$$t = kx + b$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{1}{1-2x} dx$$

Решение

$$\int \frac{1}{1-2x} dx = \left| \begin{array}{l} 1-2x = t \\ x = -\frac{1}{2}(t-1) \\ dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \ln|1-2x| + C$$

Интегралы вида:

$$\int \frac{1}{(kx + b)^n} dx$$

(где $n > 1$ – целое число).

Замена переменной:

$$t = kx + b$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{1}{(2x-3)^4} dx$$

Решение

$$\int \frac{1}{(2x-3)^4} dx = \left| \begin{array}{l} 2x-3=t \\ x=\frac{1}{2}(t+3) \\ dx=\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^4} dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(2x-3)^3} + C$$

3

Интегралы вида:

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx$$

В знаменателе дроби выделяется полный квадрат и делается линейная замена переменной, так что интеграл сводится к виду:

$$\int \frac{Mx + N}{ex^2 + f} dx = M \int \frac{x}{ex^2 + f} dx + N \int \frac{1}{ex^2 + f} dx$$

Для нахождения первого интеграла делается замена:

$$t = ex^2 + f$$

Тогда

$$\int \frac{x}{ex^2 + f} dx = \left| \begin{array}{l} ex^2 + f = t \\ dt = 2ex dx \end{array} \right| = \frac{1}{2e} \int \frac{1}{t} dt =$$

$$= \frac{1}{2e} \ln|t| + C = \frac{1}{2e} \ln|ex^2 + f| + C$$

Второй интеграл при $e \cdot f > 0$

сводится к табличному:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

а при $e \cdot f < 0$ сводится к табличному:

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

Примеры.

1

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{x+1}{4x^2+4x-3} dx$$

Решение

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{4x^2+4x-3} dx &= \int \frac{x+1}{(2x+1)^2-4} dx = \\&= \left| \begin{array}{l} 2x+1=t \\ dt=2dx \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} + 1}{t^2-4} \cdot \frac{1}{2} dt = \\&= \frac{1}{4} \int \frac{t+1}{t^2-4} dt = \frac{1}{4} \int \frac{t}{t^2-4} dt + \frac{1}{4} \int \frac{1}{t^2-4} dt = \\&= \left| \begin{array}{l} t^2-4=u \\ du=2t dt \end{array} \right| = \frac{1}{8} \int \frac{1}{u} du + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8} \ln|u| + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{8} \ln|t^2 - 4| + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{8} \ln|(2x+1)^2 - 4| + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{2x+1-2}{2x+1+2} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{8} \ln|4x^2 + 4x - 3| + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+3} \right| + C$$

2

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 5} dx$$

Решение

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^2+2x+5} dx &= \int \frac{2x+1}{(x+1)^2+4} dx = \\&= \left| \begin{array}{l} x+1=t \\ dt=dx \end{array} \right| = \int \frac{2t-2+1}{t^2+4} dt = \\&= \int \frac{2t-1}{t^2+4} dt = 2 \int \frac{t}{t^2+4} dt - \int \frac{1}{t^2+4} dt = \\&= \left| \begin{array}{l} t^2+4=u \\ du=2t dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{u} du - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} =\end{aligned}$$

$$= \ln|t^2 + 4| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C =$$

$$= \ln|u| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C =$$

$$= \ln|(x+1)^2 + 4| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C =$$

$$= \ln|x^2 + 2x + 5| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C$$

Метод неопределенных коэффициентов

Рассмотренный выше способ вычисления интегралов от рациональных дробей не обобщается на случай, если степень знаменателя больше двух.

В этом случае используется метод неопределенных коэффициентов.

**Этот метод связан с представлением
подынтегральной дроби в виде суммы
простых дробей.**

**Для этого знаменатель дроби раскладывается
на множители.**

**Каждому типу множителя в знаменателе
отвечает в разложении простая дробь
некоторого вида.**



*Каждому неповторяющемуся множителю
вида $(x-a)$ отвечает в разложении
простая дробь вида*

$$\frac{A}{x-a}$$

2



***Каждому множителю вида $(x-a)^n$
отвечает в разложении сумма n простых
дробей вида***

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$



Каждому неповторяющемуся множителю вида (x^2+px+q) отвечает в разложении простая дробь вида

$$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$$



***Каждому множителю вида $(x^2+px+q)^k$
отвечает в разложении сумма k простых
дробей вида***

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_kx + N_k}{(x^2 + px + q)^k}$$

Пример.

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x - 2)(x + 4)} dx$$

Решение

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x(x - 2)(x + 4)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x - 2} + \frac{A_3}{x + 4} =$$

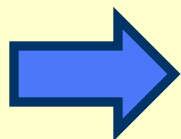
$$= \frac{A_1(x - 2)(x + 4) + A_2x(x + 4) + A_3x(x - 2)}{x(x - 2)(x + 4)}$$



$$A_1(x-2)(x+4) + A_2x(x+4) + A_3x(x-2) = x^2 - 2x + 2$$

При $x = 0$

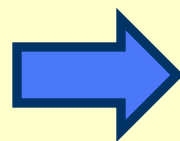
$$A_1(-2) \cdot 4 = 2$$



$$A_1 = -\frac{1}{4}$$

При $x = 2$

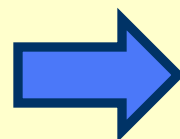
$$A_2 \cdot 2(2+4) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2$$



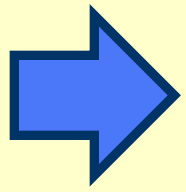
$$A_2 = \frac{1}{6}$$

При $x = -4$

$$A_3(-4)(-6) = 16 - (-8) + 2$$



$$A_3 = \frac{13}{12}$$



$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x(x - 2)(x + 4)} = -\frac{1}{4x} + \frac{1}{6(x - 2)} + \frac{13}{12(x + 4)}$$

$$\int \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x - 2)(x + 4)} dx =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x - 2} dx + \frac{13}{12} \int \frac{1}{x + 4} dx =$$

$$= -\frac{1}{4} \ln|x| + \frac{1}{6} \ln|x - 2| + \frac{13}{12} \ln|x + 4| + C$$
