

Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов, т.е. $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ - многочлен

степени m , $Q_n(x)$ - многочлен степени n .

Рациональная дробь называется **правильной**, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m < n$.
в противном случае (если $m \geq n$) рациональная дробь называется **неправильной**.

Всякую неправильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно, путем деления числителя на знаменатель

представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$ т.е. $\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

Например $\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$

Делим числитель на знаменатель в столбик.

Получим частное $x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ и остаток 15

Следовательно $\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x - 2}$

Правильные рациональные дроби вида:

$$1) \quad \frac{A}{x - a}$$

$$2) \quad \frac{A}{(x - a)^k} \quad (k \geq 2, k \in \mathbb{N})$$

$$3) \quad \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)} \quad (\text{корни комплексные, т.е. } p^2 - 4q < 0)$$

$$4) \quad \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} \quad (k > 2, \text{ корни знаменателя комплексные})$$

Где A, a, M, N, p, q -действительные числа, называются простейшими рациональными дробями 1, 2, 3 и 4 типов.

Теорема: Всякую правильную рациональную дробь
Знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

$$(*) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} +$$

$$+ \frac{B_1}{x - x_2} + \frac{B_2}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \dots$$

$$+ \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{C_{s_1}x + D_{s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_mx + q_m} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_mx + q_m)^2} + \dots + \frac{M_{s_m}x + N_{s_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}},$$

где $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C_1, D_1, \dots, M_1, N_1, \dots$ — **некоторые действительные коэффициенты.**

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах;

$$1) \frac{x^4 + 4}{(x-2)(x-3)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-3)^3};$$

$$2) \frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1};$$

$$3) \frac{7x^2 + 8x + 9}{(x-1)(x-2)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Mx + N}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2,$

Можно применить **метод сравнения коэффициентов.**

Суть метода такова:

1) В правой части равенства(*) приведем к общему знаменателю $Q(x)$; в результате получим тождество

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)}, \quad \text{где } S(x) - \text{многочлен с}$$

неопределёнными коэффициентами.

2) Так как в полученном тождестве знаменатели равны , то тождественно равны и числители, $P(x) = S(x)$ (**)

$$A_1, A_2, \dots, B_1, \dots$$

3) Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях

в обеих частях тождества, получим систему линейных уравнений , из которой и определим искомые коэффициенты

Пример: Представить дробь $\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)}$
В виде суммы простейших дробей.

Решение: Согласно теореме имеем:

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5}$$

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A(x^2 - 2x + 5) + (x-1)(Bx + C)}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)}$$

Отсюда следует $2x^2 - 3x - 3 = Ax^2 - 2Ax + 5A + Bx^2 + Cx - C$,

$$2x^2 - 3x - 3 = (A + B)x^2 + (-2A - B + C)x + (5A - C)$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0 , получаем

$$\begin{cases} 2 & = & A + B \\ -3 & = & -2A - B + C \\ -3 & = & 5A - C \end{cases}$$

Решаем систему, находим, что $A = -1, B = 3, C = -2$

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{-1}{x - 1} + \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 5}$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов
применяют также *метод отдельных значений
аргумента*

после получения тождества(**) аргументу x придают
конкретные значения столько раз, сколько $Q(x)$
неопределённых коэффициентов (обычно полагают
вместо x значения действительных корней
многочлена

Найдём интегралы от простейших рациональных дробей.

$$1) \int \frac{A}{x-a} dx = \int \frac{l(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C$$

(формула (2) таблицы интегралов)

$$2) \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \cdot \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$$

(формула (1))

$$3) \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$$

Выделяем в знаменателе полный квадрат, делаем замену и подстановку в числителе.

Пример: Найти $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10} dx$

Решение: $x^2 + 2x + 10 = (x+1)^2 + 9$

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10} dx = \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9} = \left[\begin{array}{lcl} x+1 & = & t \\ x & = & t-1 \\ dx & = & dt \end{array} \right] =$$

$$\int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9} dt = 3 \int \frac{tdt}{t^2+9} - 2 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2} \ln(t^2+9) -$$
$$\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+10) - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C.$$

Интегрирование рациональных дробей

Сформулируем общее правило интегрирования рациональных дробей:

- 1). Если дробь неправильная, то представить её в виде суммы многочлена и правильной дроби;
- 2) Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить её в виде суммы простейших рациональных дробей;
- 3) Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример: Найти интеграл $\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx$

Решение: Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим её целую часть путём деления числителя на знаменатель. Получаем:

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2},$$

$$t.e. 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = Ax(x^2 + 2x + 2) + B(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)x^2,$$

$$t.e. 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = (A + C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (2A + 2B)x + 2B.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} A + C &= 4, \\ 2A + B + D &= 4, \\ 2A + 2B &= 4, \\ 2B &= 4. \end{cases}$$

Находим :

$$B = 2, A = 0, C = 4, D = 2.$$

Таким образом получаем , что:

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}$$

$$и \quad \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}.$$

Найдем искомый интеграл, преобразуя подынтегральную дробно-рациональную функцию, представляя её в виде полученной суммы.

$$\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx = \int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2} \right) dx =$$

$$\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + \int \frac{4x + 2}{(x + 1)^2 + 1} dx.$$

НАЙДЁМ ИНТЕРГАЛ:

$$\int \frac{4x + 2}{(x + 1)^2 + 1} dx = \int \frac{4t - 4 + 2}{t^2 + 1} dt = \int \frac{4t - 2}{t^2 + 1} dt = 4 \int \frac{t dt}{t^2 + 1} - 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$4 \cdot \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) - 2 \operatorname{arctg}(t) + C = 2 \ln(x^2 + 2x + 2) - 2 \operatorname{frctg}(x + 1) + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx =$$

$$\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + 2 \ln(x^2 + 2x + 2) - 2 \operatorname{ar} ctg(x + 1) + C$$

Отметим, что любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

Пример: Вычислить $I = \int \frac{x^3 + x + 2}{(x-3)(x-4)} dx$

Решение: Преобразуем знаменатель дроби

$$(x-3)(x-4) = x^2 - 7x + 12$$

Выделим целую часть в дроби (поделим многочлен, стоящий в числителе на многочлен знаменателя)

$$\frac{x^3 + x + 2}{x^2 - 7x + 12} = x + 7 + \frac{38x - 82}{x^2 - 7x + 12} = x + 7 + \frac{38x - 82}{(x-3)(x-4)}$$

Поэтому

$$I = \int \left(x + 7 + \frac{38x - 82}{(x-3)(x-4)} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + 7x + \int \frac{38x - 82}{(x-3)(x-4)} dx$$

Дробь

$$\frac{38x - 82}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}$$

Умножая обе части равенства на $(x-3)(x-4)$, получаем

$$38x - 82 = A(x - 4) + B(x - 3) = Ax - 4A + Bx - 3B$$

$$38x - 82 = x(A + B) + (-4 - 3)$$

$$x^1 : A + B = 38$$

$$x^0 : -4 - 3 = -82$$

Решая систему с двумя неизвестными находим значения

$A = -32; B = 70$. Дробь $\frac{38x - 82}{(x - 3)(x - 4)} = -\frac{32}{x - 3} + \frac{70}{x - 4}$

$$\begin{aligned} A \quad I &= \frac{1}{2}x^2 + 7x + \int \left(-\frac{32}{x - 3} + \frac{70}{x - 4}\right) dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 7x - 32 \ln|x - 3| + 70 \ln|x - 4| + C. \end{aligned}$$

Пример: Вычислить $I = \int \frac{x dx}{1 + x^3}$

Решение: Так как $1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2)$,
А корни трёхчлена комплексны, то дробь запишем в
виде

$$\frac{x}{1 + x^3} = \frac{A}{1 + x} + \frac{Bx + C}{1 - x + x^2} =$$

$$\frac{A(1 - x + x^2) + (Bx + C)(1 + x)}{(1 + x)(1 - x + x^2)} = \frac{A - Ax + Ax^2 + Bx + Bx^2 + C + Cx}{(1 + x)(1 - x + x^2)} =$$

$$= \frac{x^2(A + B) + x(-A + B + C) + (A + C)}{(1 + x)(1 - x + x^2)}$$

$$\begin{array}{lll}
 x; & A + B = 0; & A = B; & A = B \\
 x^1; & -A + B + C = 1; & -(-B) + B + C = 1; & 2B + C = 1 \\
 x^2; & A + C = 0; & -B + C = 0; & -B + C = 0
 \end{array}$$

Откуда вычитая из(2)-(3) получим: $B = 1; B = \frac{1}{3}; A = -\frac{1}{3}; C = \frac{1}{3}$

Таким образом имеем: $\frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1-x+x^2} = \frac{-\cancel{1}/3}{1+x} + \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{1-x+x^2};$

Тогда:

$$I = \int \left(-\frac{\frac{1}{3}}{1+x} + \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{1-x+x^2} \right) dx = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{1-x+x^2} dx =$$

Решим отдельно второй интеграл т.к. первый табличный

№2:

$$\frac{1}{3} \int \frac{x+1}{1-x+x^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1}{1-x+x^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{x - \frac{1}{2}}{1-x+x^2} dx + \frac{1}{3} \int \frac{\frac{3}{2}}{1-x+x^2} dx =$$

Пусть $\left[\begin{array}{l} 1-x+x^2=t \\ d(x^2-x+1)=dt \\ 2x-1=dt \\ x-\frac{1}{2}=\frac{dt}{2} \end{array} \right]$

$$\int \frac{x - \frac{1}{2}}{x^2+x-1} dx = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln|t| = \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + C$$

$$2) \int \frac{\frac{3}{2}}{x^2-x+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} =$$

$$I = -\frac{1}{3} \ln|1 + x| + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C$$

$$\text{Oтвeт} : -\frac{1}{3} \ln|1 + x| + \frac{1}{6} \ln|x^2 - x + 1| + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C$$