

3. Основы оптимального приёма сигналов

3.1. Оптимальная оценка параметра сигнала

3.2. Оптимальное обнаружение сигнала

3.3. Оптимальное различение известных сигналов

3.4. Оптимальная обработка сигналов с использованием согласованных фильтров

Основные понятия

Оптимальный приёмник – устройство обработки, обеспечивающее наилучшее выделение полезной информации из сигнала, принимаемого в смеси с аддитивной шумовой помехой

Шумовая помеха – нормальный белый шум

Синтез оптимального приёмника – нахождение структуры и параметров устройства обработки, обеспечивающее наилучшее выделение полезной информации из определённого типа сигнала

Критерий оптимальности приёмника – правило, которое определяет, какой способ выделения полезной информации считается наилучшим

Примеры:

- критерий минимума СКО
- критерий максимума отношения сигнал-шум
- критерий максимума апостериорной вероятности

Задачи, решаемые в теории оптимального приёма сигналов

Будут рассмотрены

1. *Оценка параметров сигнала, принимаемого в смеси с помехами*
2. *Обнаружение сигнала на фоне помех*
3. *Различение двух или нескольких сигналов на фоне помех*
4. *Фильтрация (выделение) сигнала из смеси с помехами*

(Задачи 2 и 3 – частный случай задачи 1)

3.1. Оптимальная оценка параметра сигнала

Априорная и апостериорная вероятности

a priori – «из предыдущего» (до «опыта»)

a posteriori – «из последующего» (после «опыта»)

Принимаемая смесь сигнала и шума: $y(t) = s_{\lambda}(t) + n(t)$

До начала обработки известно (априорная информация):

- вид сигнала
- распределение вероятностей шума
- априорное распределение вероятностей параметра λ

Обрабатываются

N отсчётов (вектор) принятого
колебания:

или

непрерывное
колебание:

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N) = \mathbf{s}_{\lambda} + \mathbf{n}$$

$$y(t) = s_{\lambda}(t) + n(t)$$

Формула полной вероятности

Совместная плотность вероятности
отсчётов $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ и параметра
 λ

$$\begin{aligned} w(\lambda, \mathbf{y}) &= w(\lambda | \mathbf{y}) \cdot w(\mathbf{y}) \Rightarrow w(\lambda | \mathbf{y}) \cdot w(\mathbf{y}) = w(\mathbf{y} | \lambda) \cdot w(\lambda) \\ &= w(\mathbf{y} | \lambda) \cdot w(\lambda) \end{aligned}$$

$w(\mathbf{y} | \lambda) = L(\lambda)$ – **условная** плотность вероятности отсчётов $\mathbf{y}$ при
условии, что параметр равен λ (**функция**

правдоподобия)
 $w(\lambda) = w_{pr}(\lambda)$ – **априорная** плотность вероятности
параметра λ

$w(\lambda | \mathbf{y}) = w_{ps}(\lambda)$ – **апостериорная** плотность вероятности
параметра λ при условии, что приняты отсчёты $\mathbf{y}$

$w(\mathbf{y})$ – плотность вероятности отсчётов $\mathbf{y}$

Формула Байеса. Функция правдоподобия

$$w_{ps}(\lambda) = \frac{1}{w(\mathbf{y})} L(\lambda) w_{pr}(\lambda) = c_1 L(\lambda) w_{pr}(\lambda)$$

Функция правдоподобия $L(\lambda) = w(\mathbf{y} | \lambda) = w(y_1, y_2, \dots, y_N | \lambda)$ – условная плотность вероятности отсчётов принятой смеси сигнала и шума, *рассматриваемая как функция параметра λ*

Функция правдоподобия параметра сигнала, принимаемого на фоне нормального белого шума

1-й шаг: находим функцию правдоподобия в случае шума с ограниченным спектром

Условия:

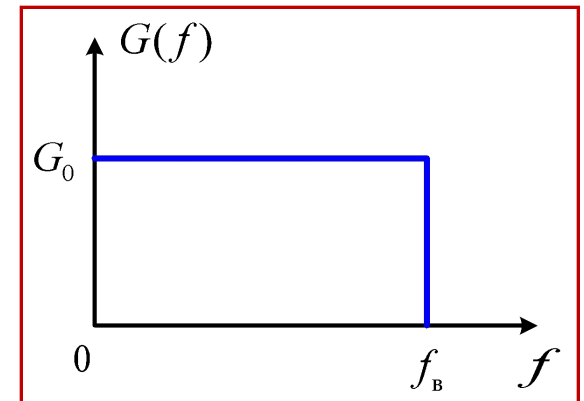
а) спектр шума ограничен частотой f_b ,

дисперсия шума $\sigma^2 = G_b f$

б) отсчёты $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ берутся с частотой

$f_d = 2f_b$ (теореме Котельникова)

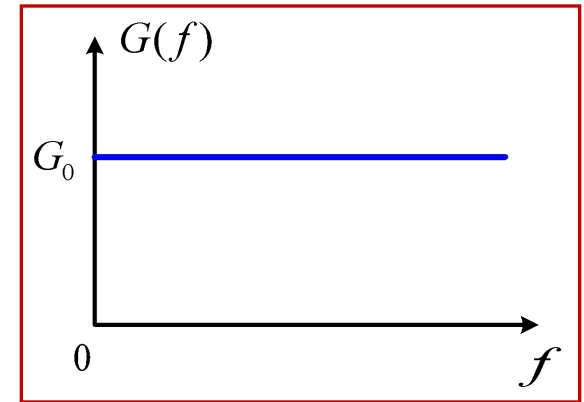
Получаем $L(\lambda) = w(y_1, y_2, \dots, y_N | \lambda)$



2-й шаг: увеличивая f_b , переходим к пределу:

$f_b \rightarrow \infty \Rightarrow G(f)$ — белый шум, дисперсия шума $\sigma^2 \rightarrow \infty$

$f_d \rightarrow \infty$ — непрерывное наблюдение



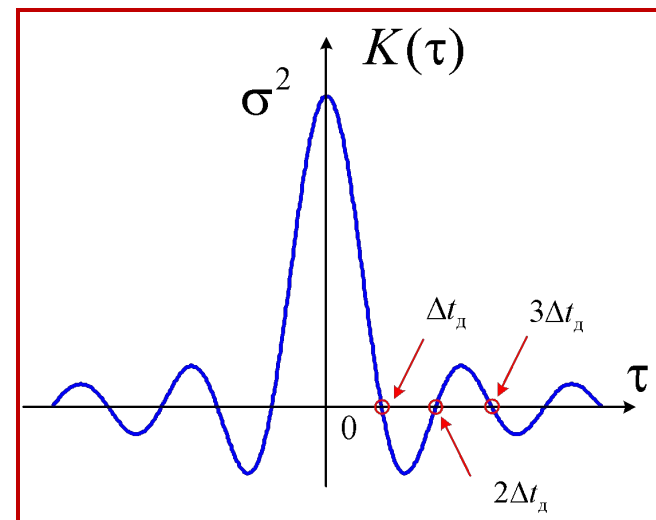
Получаем $L(\lambda) = w(y(t) | \lambda)$

Функция правдоподобия при конечной частоте f_B

АКФ шума с граничной частотой f_B

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} G(f) \cos 2\pi f \tau df = G_0 \int_0^{f_B} \cos 2\pi f \tau df =$$

$$= G_0 f \frac{\sin 2\pi f_B \tau}{2\pi f_B \tau} = \sigma^2 \frac{\sin 2\pi f_B \tau}{2\pi f_B \tau}$$



Отсчёты шума, взятые с интервалом дискретизации $\Delta t_d = 1/f_d = \frac{1}{2f_B}$,
 – некоррелированы и **статистически независимы** (т.к. имеют нормальное распределение). Следовательно,

$$L(\lambda) = w(y_1, y_2, \dots, y_N | \lambda) = w(y_1 | \lambda) \cdot w(y_2 | \lambda) \cdot \dots \cdot w(y_N | \lambda) = \prod_{i=1}^N w(y_i | \lambda)$$

Функция правдоподобия при конечной частоте f_B

Нормальное распределение вероятностей

$$w(y_i | \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i - s_{\lambda i})^2}{2\sigma^2}}, \text{ где } s_{\lambda i} = s_\lambda((i-1)\Delta t_d) - \text{отсчёт сигнала}$$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^N w(y_i | \lambda) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y_i - s_{\lambda i})^2}{2\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^N \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (y_i - s_{\lambda i})^2 \right)$$

Дисперсия шума $\sigma^2 = G_0 f_B$, следовательно

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_B}} \right)^N \exp\left(-\frac{1}{2G_0 f_B} \sum_{i=1}^N (y_i - s_{\lambda i})^2 \right) = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_B}} \right)^N \exp\left(-\frac{1}{G_0} \sum_{i=1}^N (y_i - s_{\lambda i})^2 \Delta t_d \right) \end{aligned}$$

$\frac{1}{2f_B} = \Delta t_d$

Функция правдоподобия при $f_B \rightarrow \infty$

$$L(\lambda) = \lim_{f_B \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_B}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{G_0} \sum_{i=1}^N (y_i - s_{\lambda i})^2 \Delta t_{\text{д}} \right) \right\} = \lim_{\substack{f_B \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 f_B}} \right)^N \cdot \lim_{\Delta t_{\text{д}} \rightarrow 0} \exp \left(-\frac{1}{G_0} \sum_{i=1}^N (y_i - s_{\lambda i})^2 \Delta t_{\text{д}} \right) =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{неопре-} \\ \text{делённость}}}{0^\infty} \cdot \exp \left(-\frac{1}{G_0} \int_0^T [y(t) - s_\lambda(t)]^2 dt \right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{от } \lambda \text{ не} \\ \text{зависит}}}{c_2} \exp \left(-\frac{1}{G_0} \int_0^T [y(t) - s_\lambda(t)]^2 dt \right) = c_2 \exp(k(\lambda))$$

Аргумент экспоненты: $k(\lambda) = -\frac{1}{G_0} \int_0^T [y(t) - s_\lambda(t)]^2 dt = -\frac{1}{G_0} \int_0^T [y^2(t) - 2y(t)s_\lambda(t) + s_\lambda(t)^2] dt =$

$$= \underbrace{-\frac{1}{G_0} \int_0^T y^2(t) dt}_{\text{от } \lambda \text{ не зависит}} + \underbrace{\frac{2}{G_0} \int_0^T y(t)s_\lambda(t) dt}_{\text{корреляционный интеграл}} - \underbrace{\frac{1}{G_0} \int_0^T s_\lambda(t)^2 dt}_{\text{энергия сигнала}} = c_3 + q(\lambda) - \frac{E_c(\lambda)}{G_0}$$

$$L(\lambda) = c_2 e^{c_3} \cdot e^{q(\lambda)} \cdot e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}}$$

Апостериорная плотность вероятности параметра и её логарифм

$$w_{ps}(\lambda) = c_1 \cdot L(\lambda) \cdot w_{pr}(\lambda) = c_1 c_2 e^{c_3} \cdot e^{q(\lambda)} \cdot e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} \cdot w_{pr}(\lambda) = C e^{q(\lambda)} e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} w_{pr}(\lambda)$$

*Логарифм апостериорной плотности вероятности
параметра:*

$$\ln w_{ps}(\lambda) = \ln \left(C e^{q(\lambda)} e^{-\frac{E_c(\lambda)}{G_0}} w_{pr}(\lambda) \right) = \ln C + q(\lambda) - \frac{E_c(\lambda)}{G_0} + \ln w_{pr}(\lambda)$$

$q(\lambda)$ — корреляционный интеграл

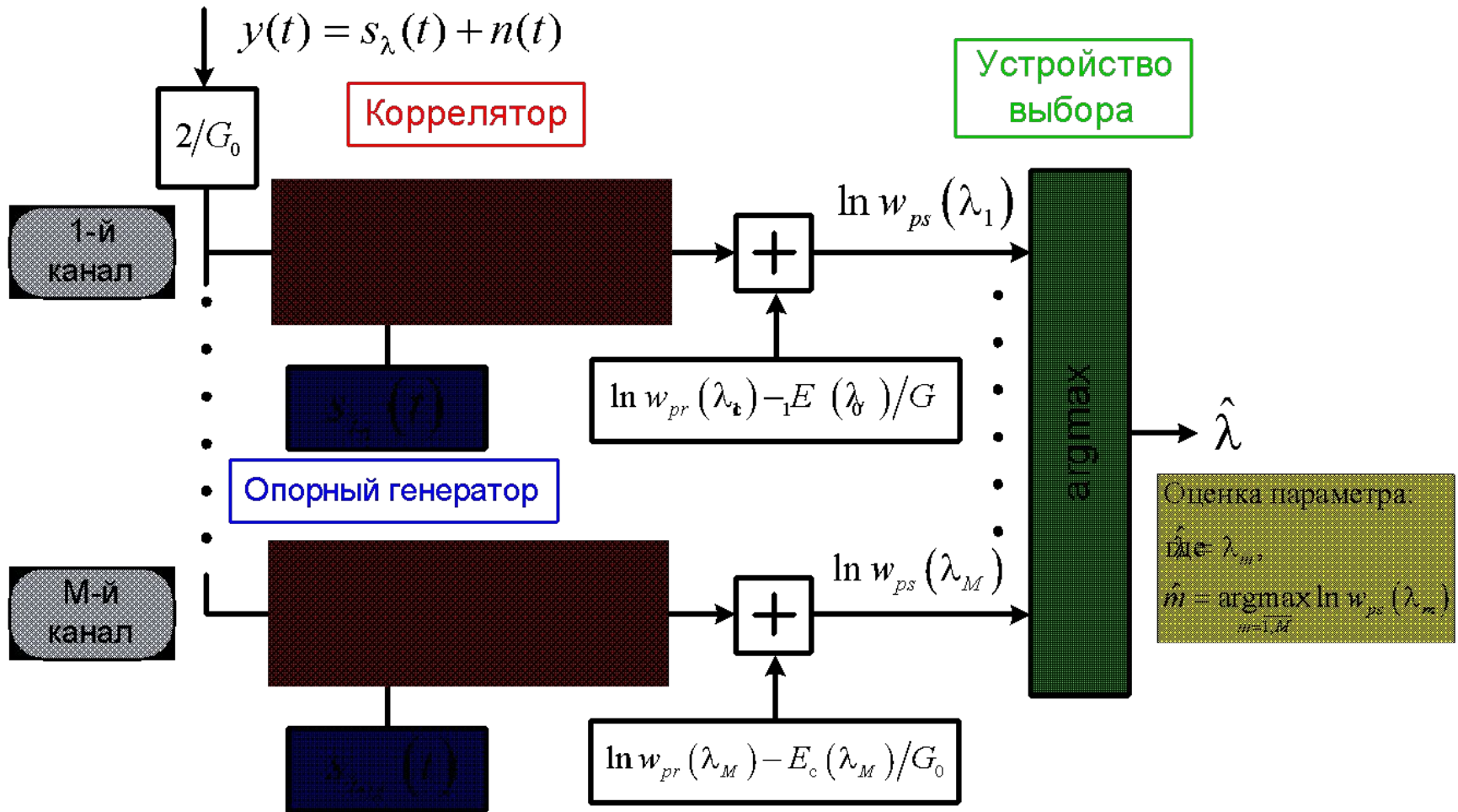
$E_c(\lambda)$ — энергия сигнала

*Оценка параметра по критерию максимума апостериорной
вероятности:*

$$\hat{\lambda} = \operatorname{argmax} w_{ps}(\lambda) = \operatorname{argmax} \ln w_{ps}(\lambda)$$

Оценка параметра полностью известного сигнала

(корреляционный приёмник)

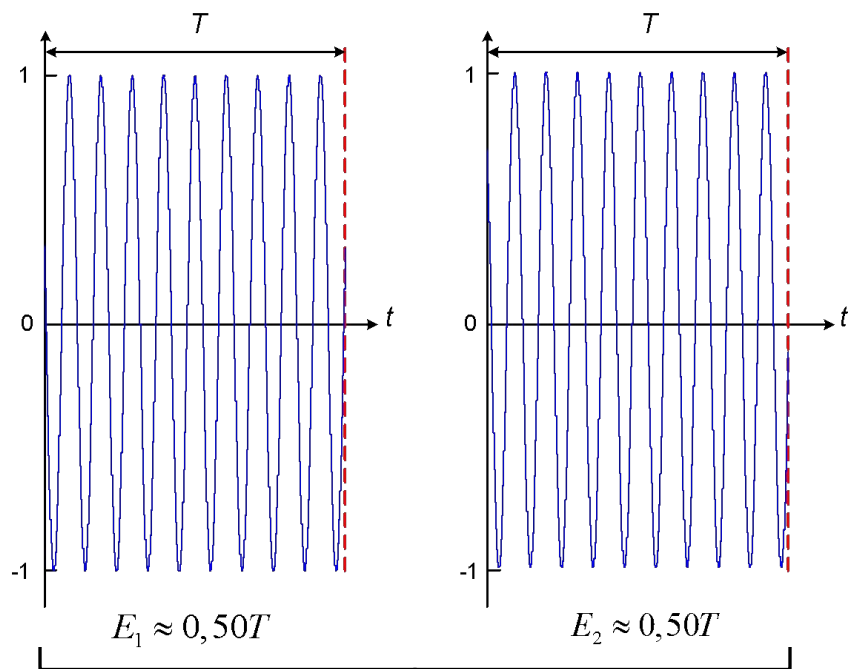


Оценка неэнергетического параметра

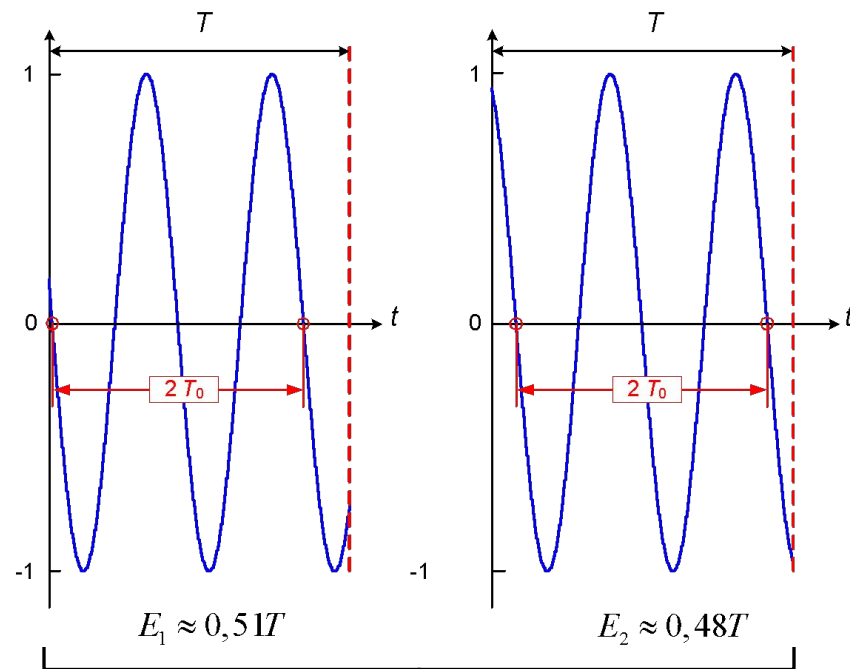
Неэнергетические
параметры:

- задержка
- фаза
- частота

при $T \gg T_0$



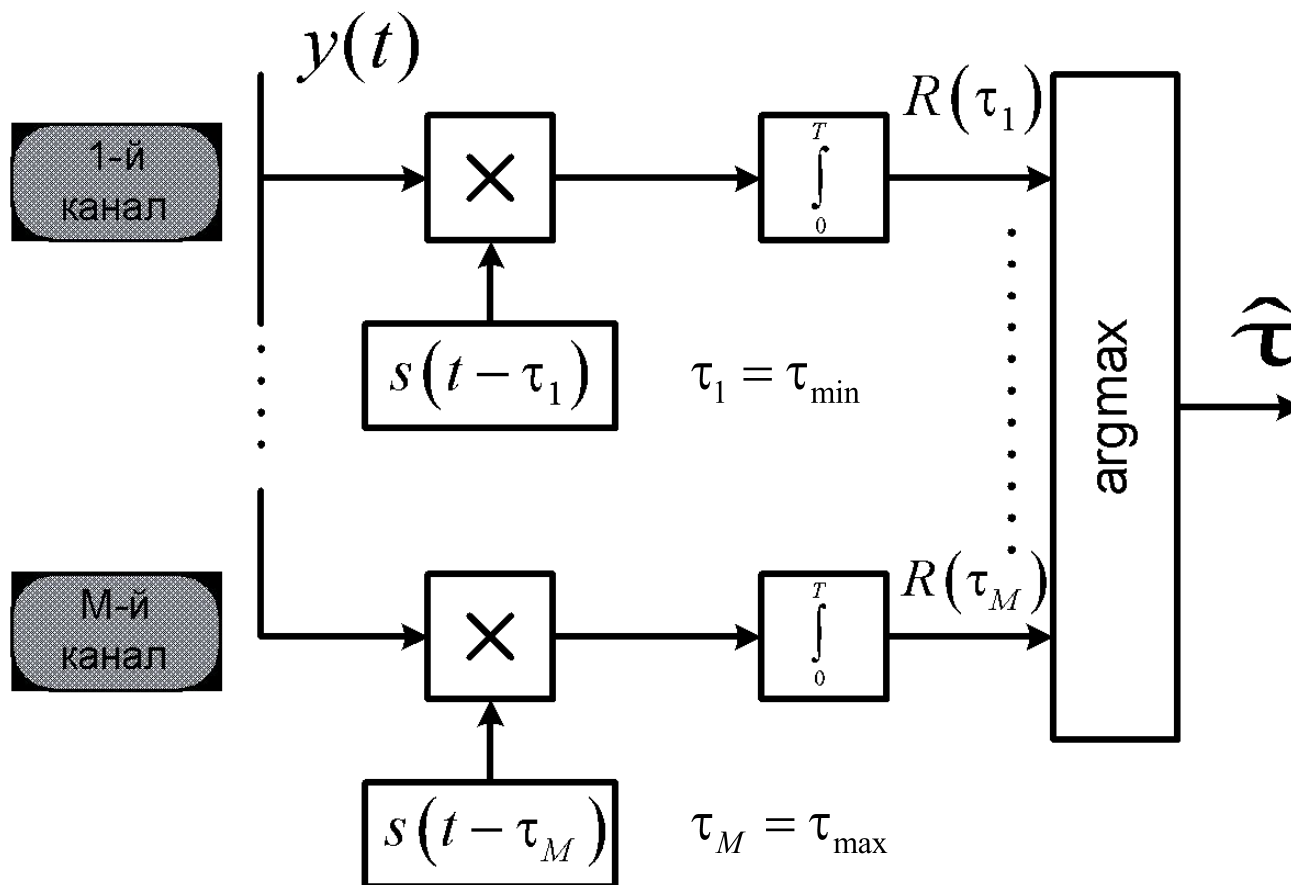
$T \gg T_0$



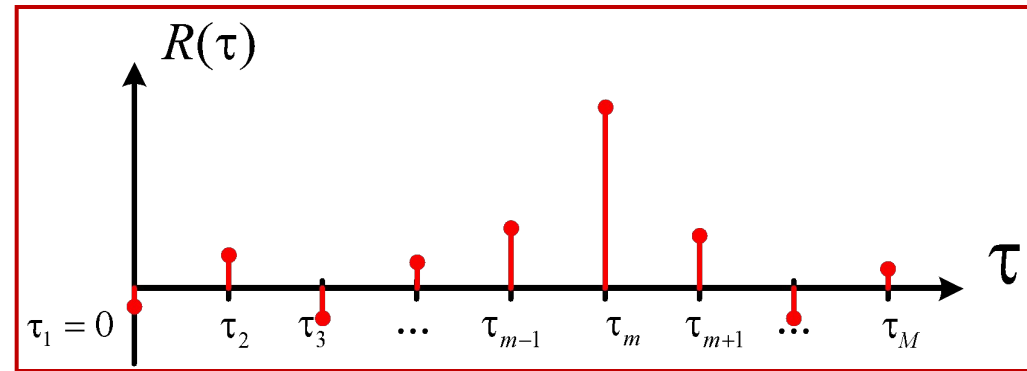
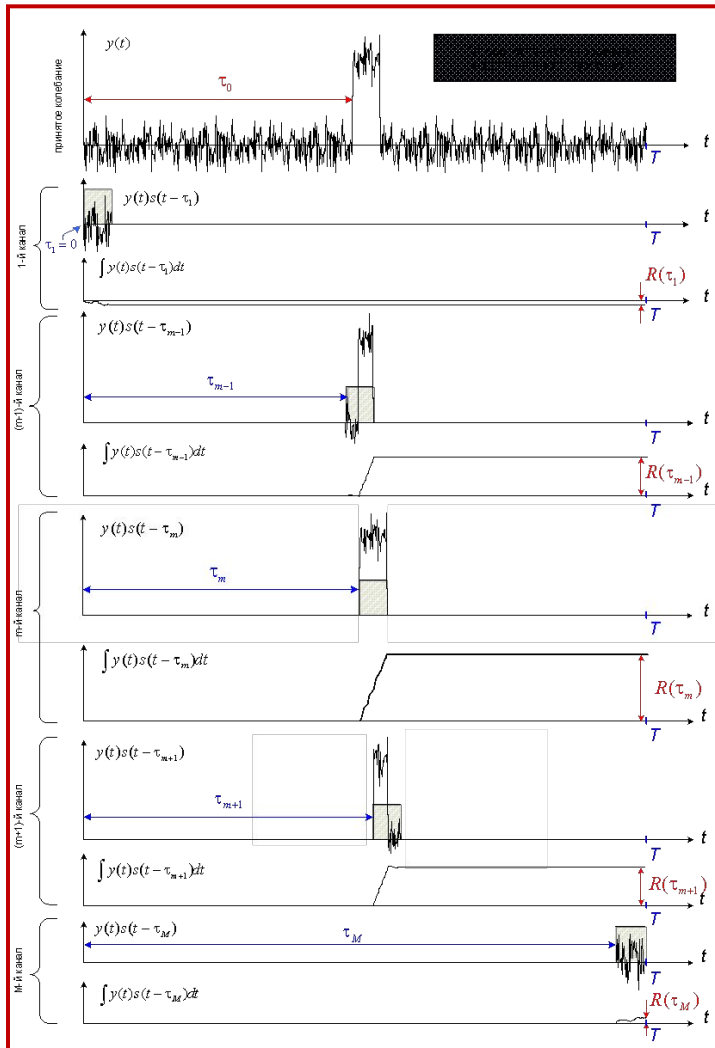
$T \sim T_0$

Корреляционный приёмник для оценки задержки известного сигнала

Априорное распределение задержки –
равномерное на интервале $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$



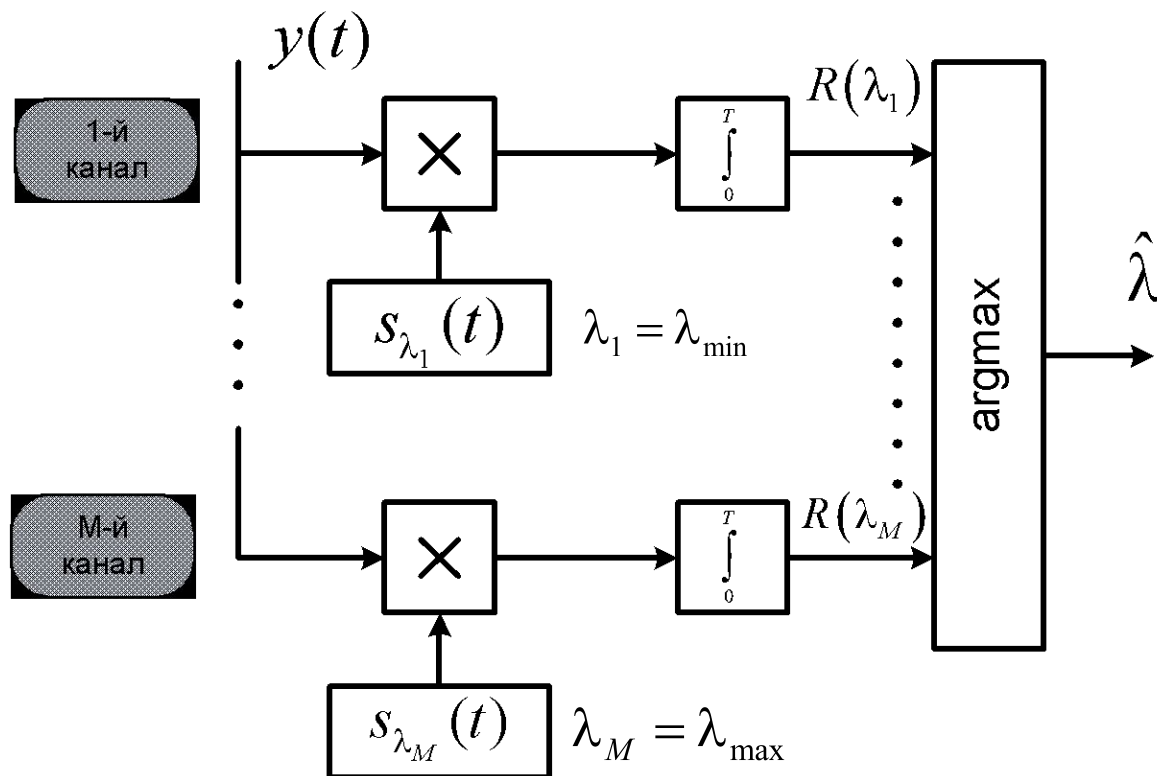
Эпюры напряжений в корреляционном приёмнике прямоугольного видеоимпульса



$$\hat{m} = \operatorname{argmax}_{m=1, \overline{M}} R(\tau_m)$$

$$\hat{\tau} = \tau_{\hat{m}}$$

Корреляционный приёмник для оценки неэнергетического параметра



Априорное распределение параметра –
равномерное на интервале $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$

$$\hat{m} = \underset{m=\overline{1, M}}{\operatorname{argmax}} R(\lambda_m)$$

$$\hat{\lambda} = \lambda_{\hat{m}}$$