



Типичные ошибки в решении задания С1 ЕГЭ по математике (потеря корней, появление «посторонних» корней)

Учитель математики МБОУ СОШ № 143 г.Красноярска
Князькина Т. В.

Первое задание:

а) Решите уравнение:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)\operatorname{ctgx}$$

б) Найдите все корни на промежутке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$

При решении уравнения попытаемся представить тангенс суммы двух углов по формуле

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Получилось:
$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}$$

И – внимание! – потеря корня!

Смотрите внимательно: после этого преобразования мы получили отдельно стоящий $\operatorname{tg} x$. Но $\operatorname{tg} x$ не определен при

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. А в исходном уравнении x вполне мог быть равен $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

То есть, выполняя это невинное преобразование, мы сузили ОДЗ.

Поэтому, выполняя преобразование нужно следить за тем, что происходит с областью допустимых значений.

Итак, мы идем другим путем.

Запишем $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ через $\sin$ и $\cos$:

$$\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} + 1 = \frac{2\left(\sqrt{2} + 1\right)\cos x}{\sin x}$$

Используем формулы синуса и косинуса суммы:

$$\frac{\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}}{\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}} + 1 = \frac{2\left(\sqrt{2} + 1\right)\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{\sin x \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \frac{\sqrt{2}}{2}} + 1 = \frac{2\left(\sqrt{2} + 1\right)\cos x}{\sin x}$$

Разделим числитель и знаменатель дроби в левой части уравнения на $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{\frac{\sin x + \cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{\frac{\cos x - \sin x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}} + 1 = \frac{2(\sqrt{2} + 1)\cos x}{\sin x}$$

Приведем левую часть уравнения к общему знаменателю:

$$\frac{\frac{\sin x + \cos x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\cos x - \sin x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{\frac{\cos x - \sin x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{2\cos x}{\cos x - \sin x} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)\cos x}{\sin x}$$

Перенесем все влево:

$$\frac{2\cos x}{\cos x - \sin x} - \frac{2(\sqrt{2}+1)\cos x}{\sin x} = 0$$

Вынесем за скобку общий множитель:

$$2\cos x \left(\frac{1}{\cos x - \sin x} - \frac{\sqrt{2}+1}{\sin x} \right) = 0$$

Приведем выражение в скобках к общему знаменателю:

$$2\cos x \left(\frac{\sin x - (\sqrt{2}+1)(\cos x - \sin x)}{\sin x (\cos x - \sin x)} \right) = 0$$

Знаменатель дроби не равен нулю, то есть

$$\cos x - \sin x \neq 0 \quad \text{и} \quad \sin x \neq 0$$

Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю:

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad (\sqrt{2} + 1)(\cos x - \sin x) = 0$$

1. $\cos x = 0$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

вот он, потерянный

корень! $\sin x - (\sqrt{2} + 1)(\cos x - \sin x) = 0$

2.

Раскроем скобки, приведем подобные члены:

$$\sin x - \sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x - \cos x + \sin x = 0$$

$$(\sqrt{2} + 2) \sin x - (\sqrt{2} + 1) \cos x = 0$$

$$(\sqrt{2}+2)\sin x = (\sqrt{2}+1)\cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

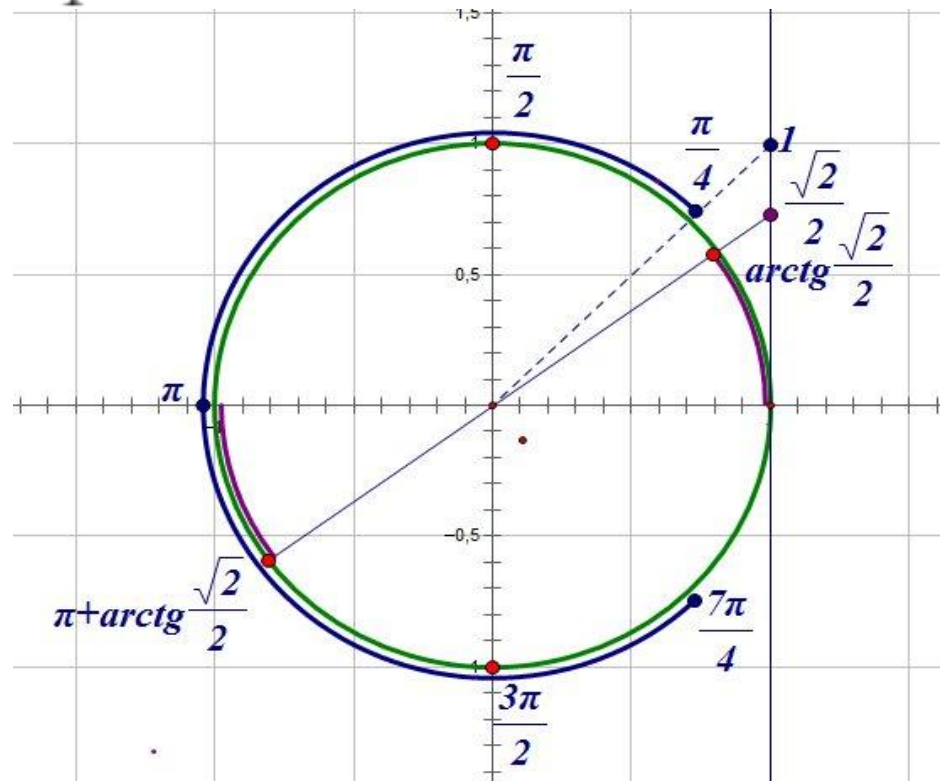
$$x = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Итак, мы получили два решения:

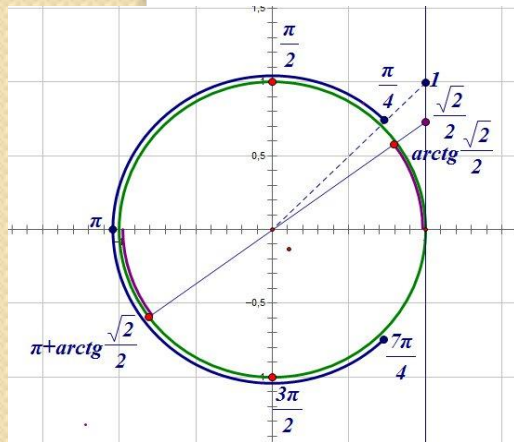
$$x = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) Найдём корни, принадлежащие
ежутку $[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$:

промежутку $[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$:



На рисунке красными точками обозначены
 решения уравнения;
 синей дугой обозначен промежуток, которому
 принадлежат корни;



вая величина сиреновой
 дуги равна
 гаясь из точки , мы
 на пути $\frac{3\pi}{2}$,

$$\arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{\pi}{4}$$

$$\pi + \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Это и есть корни уравнения, принадлежащие
 промежутку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

Мы видим, что корень $\arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ не принадлежит заданному промежутку.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$x = \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} \quad \pi + \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \frac{3\pi}{2},$$

И второе задание:

а) Решите уравнение: $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{3}{\sin x} + 3 = 0$

**б) Найдите корни уравнения,
принадлежащие промежутку**

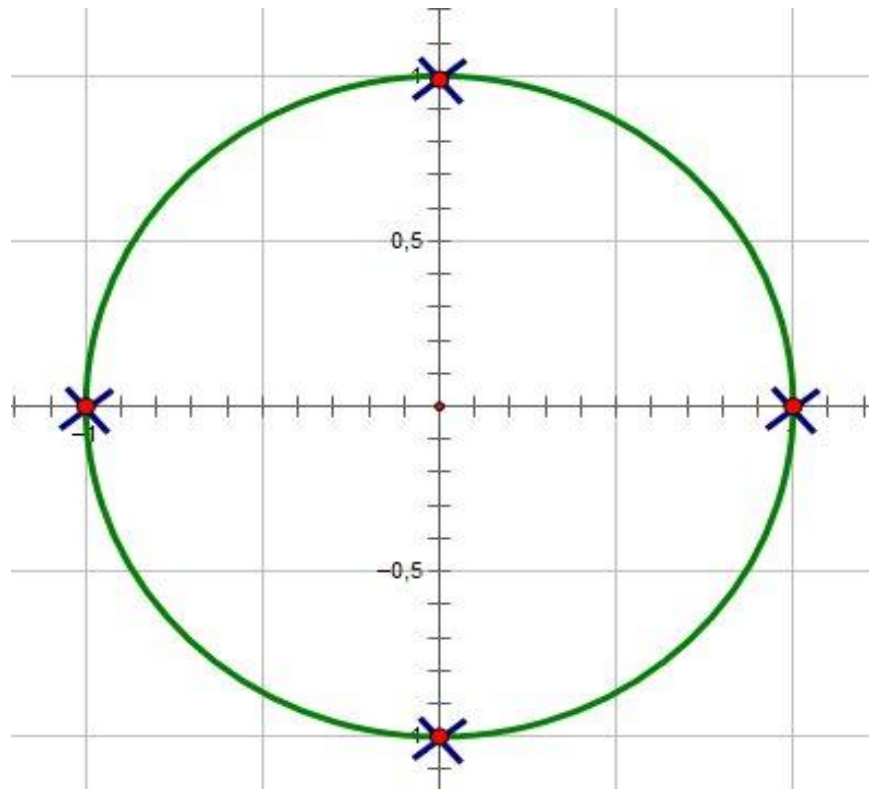
$$\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi \right]$$

Засада в этом уравнении такая: когда мы ищем ОДЗ, то записываем $\operatorname{tg} x \neq 0$ $\sin x \neq 0$

Будет ошибкой записать ОДЗ: $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Нельзя забывать, что $\operatorname{tg} x$ не определен
при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

то есть в конечном итоге мы получаем
такую ОДЗ: $x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$



Собственно, больше никаких сложностей в этом уравнении нет.

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{3}{\sin x} + 3 = 0$$

Умножим обе части на $\sin^2 x$

$$\cos^2 x + 3 \sin x + 3 \sin^2 x = 0$$

$$\cos^2 x + 3 \sin x + 3 \sin^2 x = 0$$

$$\left(1 - \sin^2 x\right) + 3 \sin x + 3 \sin^2 x = 0$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$$

Отсюда: $\sin x = -1$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$

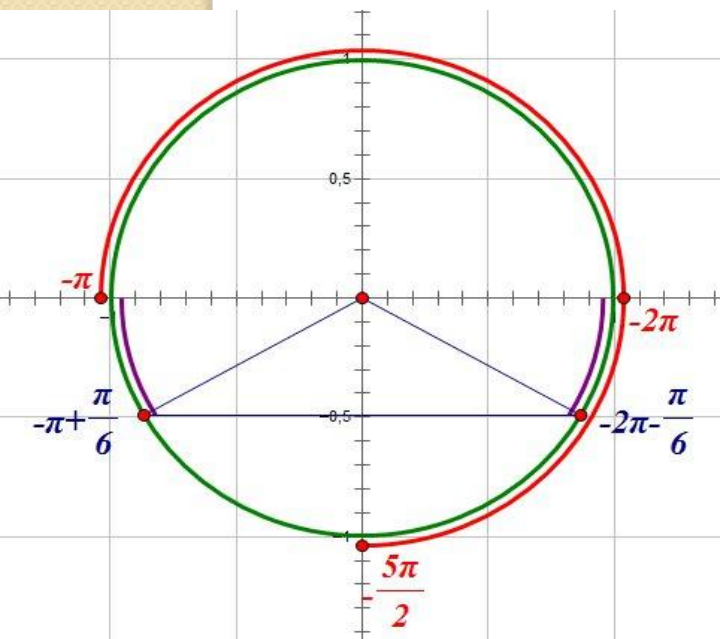
И вот в этом месте **важно** не пропустить, что корень уравнения $\sin x = -1$ – посторонний корень, так как не входит в ОДЗ исходного уравнения!

Но у нас еще есть корни уравнения
 $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

Осталось выбрать корни, принадлежащие промежутку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$

На рисунке красными точками на зеленой окружности обозначены решения уравнения; красной дугой обозначен промежуток, которому принадлежат корни;



угловая величина
сиреневой дуги $\frac{\pi}{6}$

Двигаясь из точки $-\frac{5\pi}{2}$

мы встречаем на пути

$$-2\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{13\pi}{6}$$

- это и есть корень уравнения, принадлежащий промежутку

$$\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi \right]$$

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{13\pi}{6}$

