Презентация по Математическому Анализу Семинар 36

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

1. **Однородное уравнение**.

Линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами ***p*** и ***q*** без правой части имеют вид $y''+py'+qy=0$ **(1).**

Если k_1, k_2 - корни характеристического уравнения $\varphi(k) \equiv k^2 + pk + q = 0$ (2), то общее решение уравнения (1) записывается в одном из следующих трех видов:

1) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, если $k_1, k_2 \in R, k_1 \neq k_2$

2) $y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$, если $k_1 = k_2$

3) $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, если $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i, (\beta \neq 0)$

2. Неоднородное уравнение

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

y''+py'+qy=f(x)* (3)** можно записать в виде суммы $y = y_0 + Y$, где y_0 - общее решение соответствующего уравнения **(1)** без правой части, определяемое по формулам **(1)-(3),** и ***Y – частное решение данного уравнения **(3).**

Функция ***Y*** может быть найдена методом неопределенных коэффициентов в следующих простейших случаях:

1. $f(x) = e^{ax} P_n(x)$, где $P_n(x)$ - многочлен степени ***n***.

Если $\varphi(a \pm bi) \neq 0$, то полагают

$$Y = e^{ax}[S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx]$$

где $S_N(x), T_N(x)$ - многочлены степени $N=max\{n,m\}$.

Если же $\varphi(a \pm bi) = 0$ то полагают

$$Y = x^r e^{ax}[S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx]$$

где $S_N(x), T_N(x)$ - многочлены степени $N=max\{n,m\}$,

r – кратность корней $a \pm bi$ (для уравнений 2-го порядка ***r=1***).

В общем случае для решения уравнения **(3)** применяется ***метод вариации произвольных постоянных.***

Этот метод применяется для отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения ***n-го*** порядка как с переменными, так и с постоянными коэффициентами, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Метод вариации для уравнения второго порядка $y''+py'+qy=f(x)$ заключается в следующем.

Пусть известна фундаментальная система решений y_1, y_2 .

Тогда общее решение неоднородного уравнения следует искать в виде:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$$

где функции $C_1(x), C_2(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Решение этой системы находим по формулам:

$$C_1(x) = \int \frac{y_2 \cdot f(x)dx}{W(y_1, y_2)}; C_2(x) = \int \frac{y_1 \cdot f(x)dx}{W(y_1, y_2)}$$

в силу чего ***y(x)*** можно сразу определить по формуле:

$$y(x) = -y_1 \int \frac{y_2 \cdot f(x)dx}{W(y_1, y_2)} + y_2 \int \frac{y_1 \cdot f(x)dx}{W(y_1, y_2)}$$

здесь $W(y_1, y_2)$ - вронскиан решений y_1, y_2

Примеры с решениями.

1. Найти общее решение уравнения $y''-5y'+6y=0$

<u>Решение</u>. Составим характеристическое уравнение $k^2-5k+6=0$

его корни $k_1=2; k_2=3$

Следовательно, e^{2x}, e^{3x} - частные линейно независимые решения,

а общее решение имеет вид:

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$$

2. Решить уравнение $y''-2y'+2y=x^2$

<u>Решение</u>. Характеристическое уравнение $k^2-2k+2=0$ имеет корни

$k_{1,2}=1\pm i$, а поэтому общее решение однородного уравнения

$$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$$

Частное решение следует искать в виде:

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

(в данном случае $\alpha = 0, \beta = 0, \alpha + \beta i = 0;$ так как корня **0** у характеристического уравнения нет , то $m=n=2$ и $r=0$, имеем:

$$+\left|\begin{array}{l} 2 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right|\begin{cases} y = Ax^2 + Bx + C \\ y' = 2Ax + B \\ y'' = 2A \end{cases}$$

$$y'' - 2y' + 2y = 2Ax^2 + (2B - 4A)x + (2C - 2B + 2A) \equiv x^2$$

Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2B - 4A = 0 \\ 2C - 2B + 2A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 1 \\ C = 1/2 \end{cases}$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}(x + 1)^2$$

3. Решить уравнение $y''+y = xe^{x} + 2e^{-x}$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm i$

а поэтому общее решение однородного уравнения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Пользуясь принципом наложения, частное решение исходного уравнения следует искать в виде:

$$y = y_1 + y_2 = (Ax + B)e^{x} + Ce^{-x}$$

(имеем для $y_1 : f_1(x) = xe^{x}, \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0; \alpha_1 + \beta_1 i = 1;$ поскольку такого корня нет,

то $r_1 = 0; n = m = 1;$ для $y_2 : f_2(x) = e^{-x}, \alpha_2 = -1, \beta_2 = 0; \alpha_2 + \beta_2 i = -1; r_2 = n_1 = m_1 = 0)$

Итак,

$$
\begin{array}{c|c|}
 & 1 \\
+ & 0 \\
 & 1
\end{array}
\begin{cases}
y = (Ax+B)e^{x} + Ce^{-x} \\
y' = Ae^{x} + (Ax+B)e^{x} - Ce^{-x} \\
y'' = 2Ae^{x} + (Ax+B)e^{x} + Ce^{-x}
\end{cases}
$$

$$y'' + y = 2Axe^{x} + (2A+2B)e^{x} + Ce^{-x} \equiv xe^{x} + 2e^{-x}$$

Решая систему
уравнений:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + 2B = 0 \\ 2C = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \\ C = 1 \end{cases}$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x-1) + e^{-x}$$

Примеры для самостоятельного решения

1. **Найти общие решения уравнения:**

$1.\ y''-y'-2=0$

$3.\ y''-y'=0$

$5.\ y''-5y'+6y=0$

$2.\ y''+25y=0$

$4.\ y''-4y'+4y=0$

2. **Найти решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным или краевым условиям:**

$1.\ y''+5y'+6y=0;\ y(0)=1;\ y'(0)=-6$

$2.\ y''-10y'+25=0;\ y(0)=0;\ y'(0)=1$

$3.\ y''-3y'+10y=0;\ y(\pi/6)=0;\ y'(\pi/6)=e^{\pi/6}$

$4.\ y''+3y'=0;\ y(0)=1;\ y'(0)=2$

$5.\ y''+9y=0;\ y(0)=0;\ y'(\pi/4)=1$

3. **Решить уравнения:**

$1.\ y''-4y'+3y=e^{5x};\ y(0)=3;\ y'(0)=9;$

$3.\ y''-6y'+8y=3x^2+2x+1$

$2.\ y''-6y'+16y=2\sin x+3\cos x$

$4.\ y''+4y=\cos 2x;\ y(0)=0;\ y'(\pi/4)=0$

$5. y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$

$6. y'' - y = x\cos^2 x$

$7. y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$