Приближенные методы вычислений

Многие научные и инженерные задачи описываются с помощью таких математических моделей, для которых невозможно найти точного решения, т. е. выразить решение в аналитическом виде (в виде формул).

В таких случаях для решения подбираются различные методы приближенных вычислений и разрабатываются алгоритмы их реализации на ЭВМ.

Приближенные методы решения задач предполагают вычисление не точного искомого решения, а некоторой последовательности приближений, значения которых в пределе приближаются к искомым решениям с заданной точностью.

Вычисление корня функции методом деления отрезка пополам

Часто в задачах необходимо решать уравнения вида f(x)=0. Только для простейших уравнений (например, линейных и квадратных) удаётся найти формулу, выражающую искомую величину x через параметры .

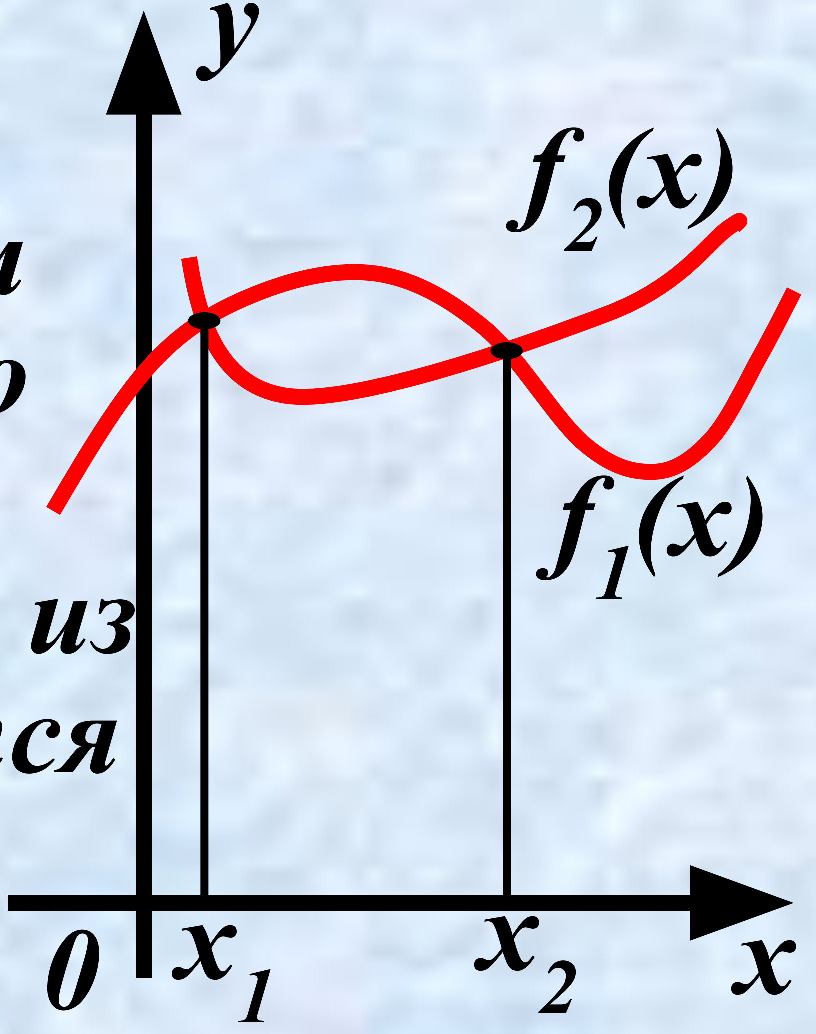
Чаще уравнения приходится решать приближенными (численными) методами.

Этапы численного решения уравнений

1. ***Отделение корней*** *(т.е. определение интервала изменения переменной x, где расположен 1 корень)*
2. ***Уточнение корней*** *(т.е. определение корней с заданной точностью)*

Отделение корней графическим методом

Если из $f(x)=0 \Rightarrow$ $f_1(x)=f_2(x)$, тогда графическим путём можно достаточно точно определить отрезки, в каждом из которых содержится корень уравнения.



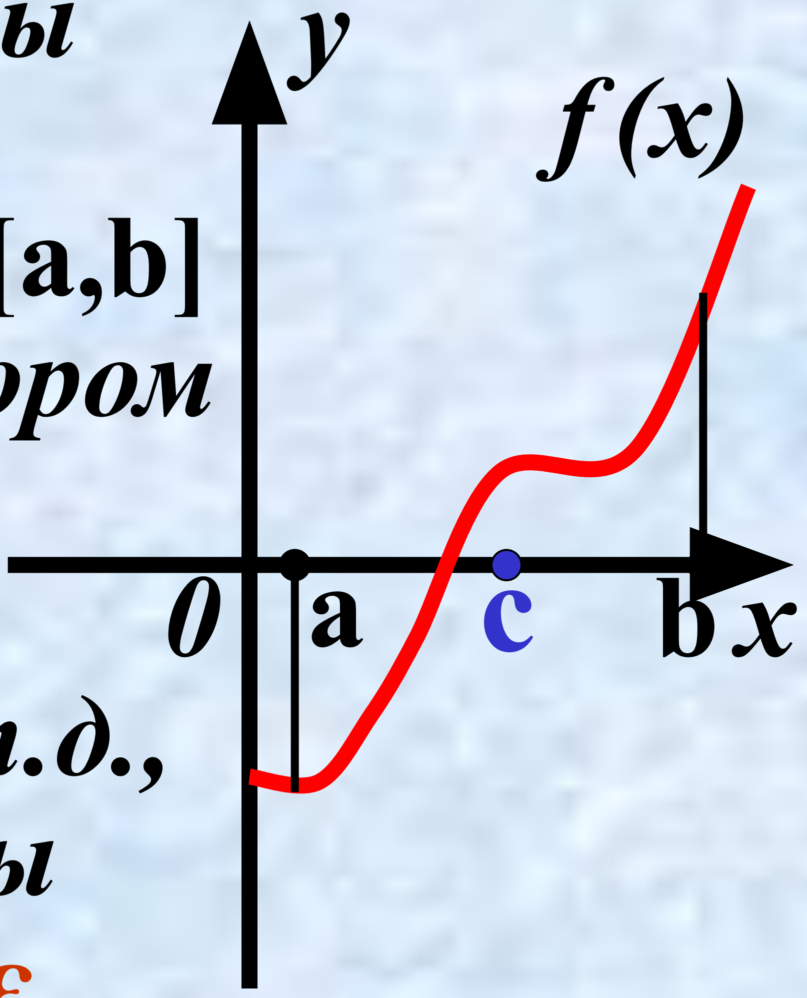
Уточнение корней методом половинного деления

Пусть f(x) определена на* [a,b], *непрерывна и f(a)· f(b) < 0, тогда уравнение f(x)=0 обязательно имеет корень на отрезке* [a,b], *а если f(x) – монотонна (возрастает или убывает на всём участке), то корень – единственный.

Требуется: найти корень f(x)=0 с заданной точностью (погрешностью) ε

Суть метода

Метод построен на вычислении середины отрезка c=(a+b)/2 и выборе из отрезков [a,b] и [c,b] *того, на котором f (x) меняет знак и далее вычисление середины на нём и т.д., пока половина длины отрезка не будет* < ε

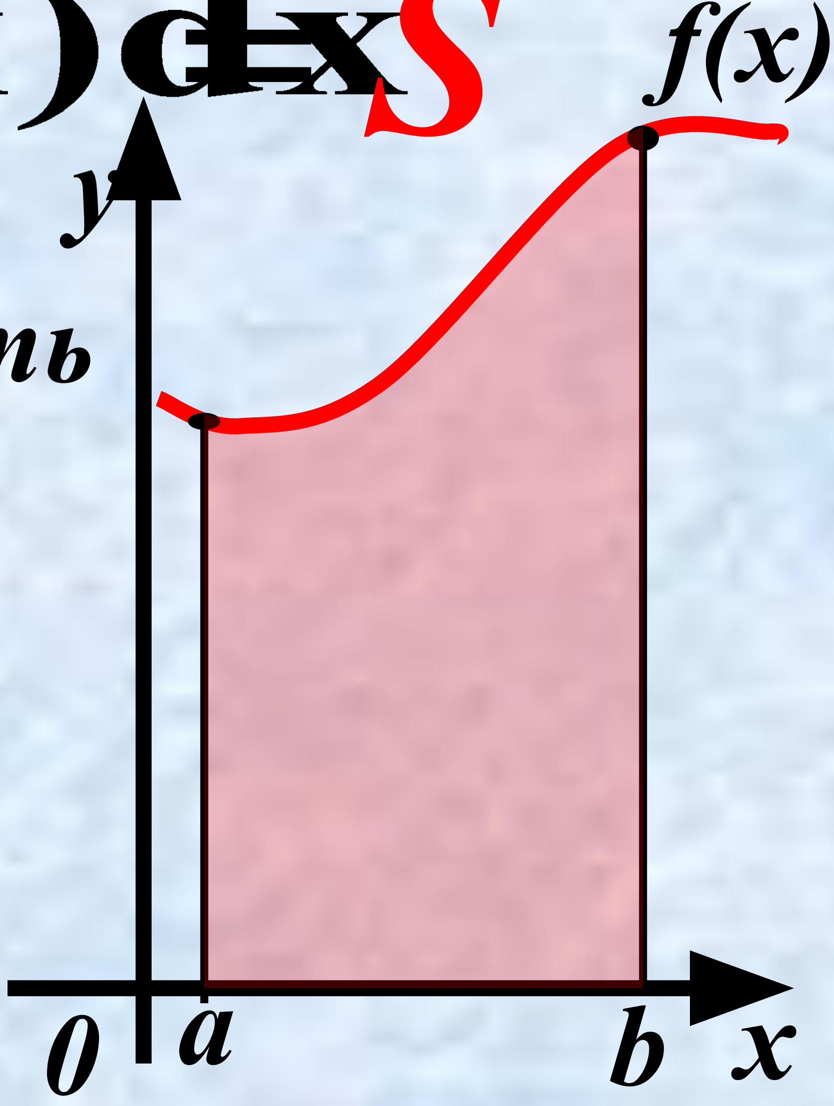


Приближенное вычисление интеграла

Определённый интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = S$$

***Можно трактовать как площадь подынтегральной функции (криволинейной трапеции) на отрезке* [a;b]**



В простейшем случае, когда известна первообразная F(x), интеграл вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Для большинства функций нахождение первообразной сложно или невозможно. Тогда применяется приближённое (численное) интегрирование.

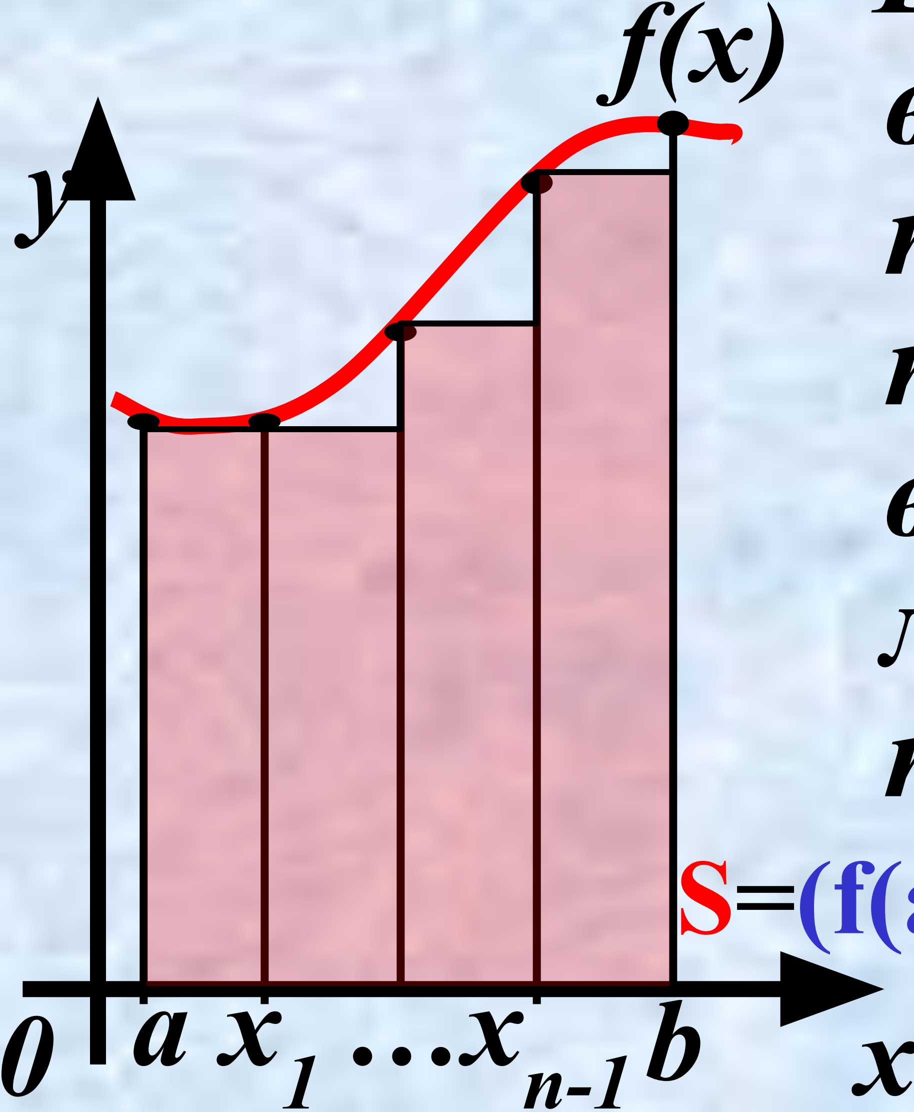
Пусть функция f(x) определена на отрезке [a;b].

Требуется: приближенно вычислить определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$

Суть метода: разобьём отрезок [a,b] *на* n *равных отрезков длины* h=(b-a)/n, *разрезая фигуру под функцией f(x) на* n *полосок, считая их прямоугольниками.*

Тогда $S \approx \sum_{i=1}^{n} S_i$ *, при* $n \to \infty$ $\sum_{i=1}^{n} S_i \to S$

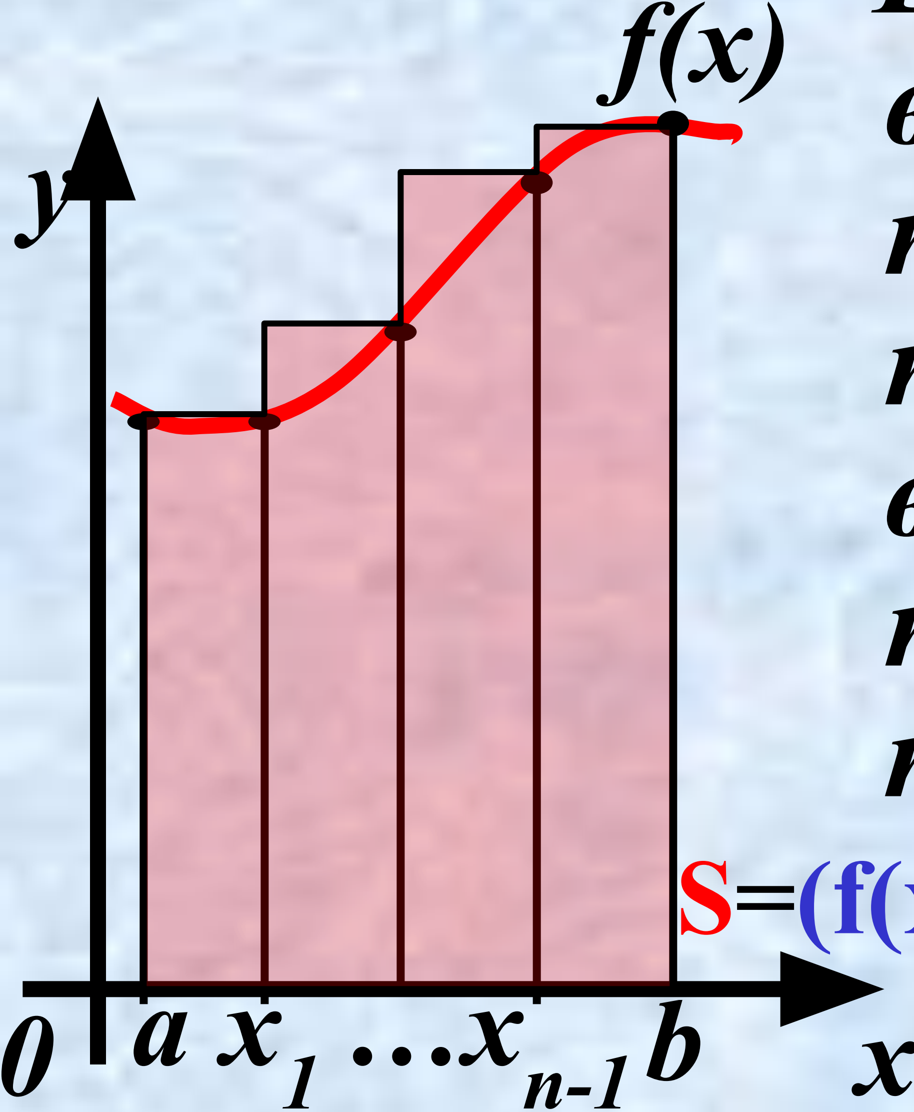
Метод левых прямоугольников



Если для вычисления площади одного прямоугольника выбрать его левую сторону, то $S_i = f(x_{i-1})*h$

$S=(f(a)+ f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1}))*h$

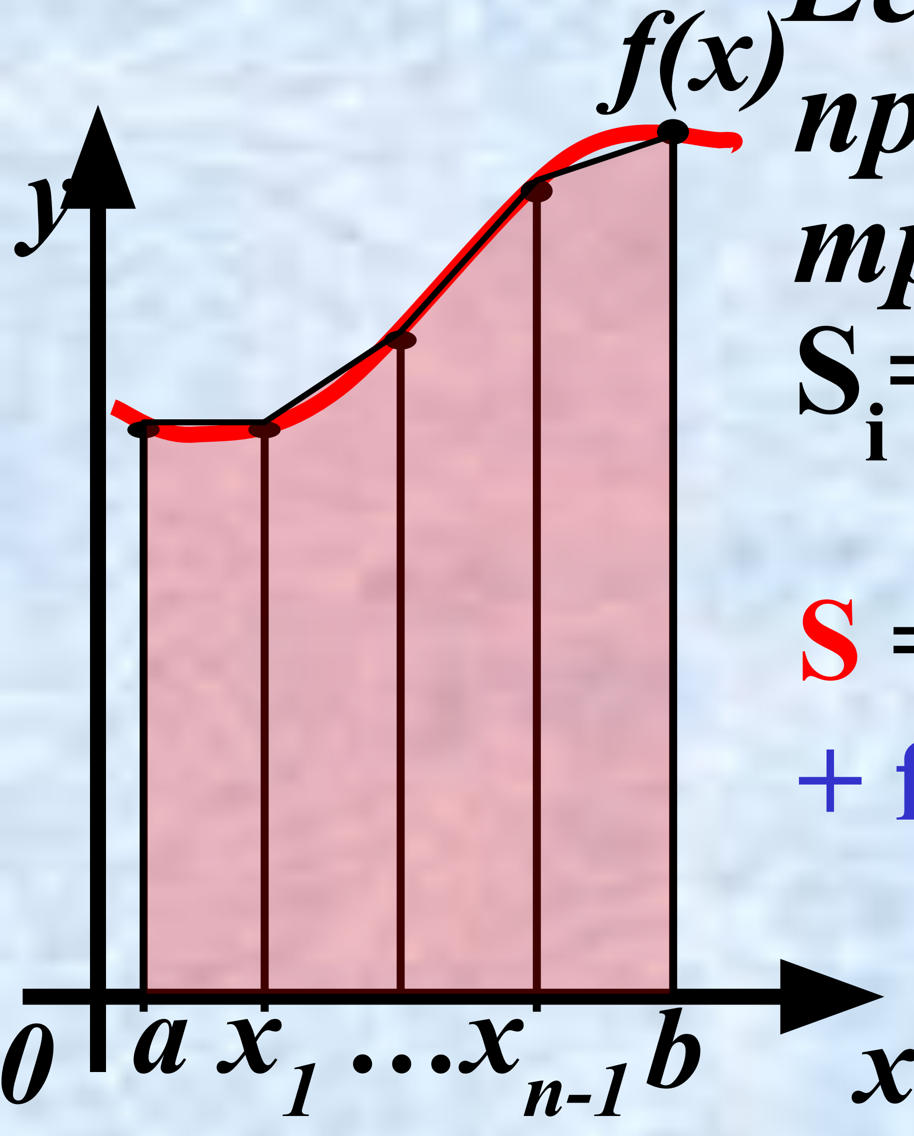
Метод правых прямоугольников



Если для вычисления площади одного прямоугольника выбрать его правую сторону, то $S_i = f(x_i)*h$

$S=(f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})+f(b))*h$

Метод трапеций



Если построить не прямоугольники, а трапеции, то

$S_i=(f(x_i)+ f(x_{i-1}))/2*h$

S = (f(a)/2 + f(x_1) + … + f(x_{n-1})+ f(b)/2)*h

Метод Монте-Карло

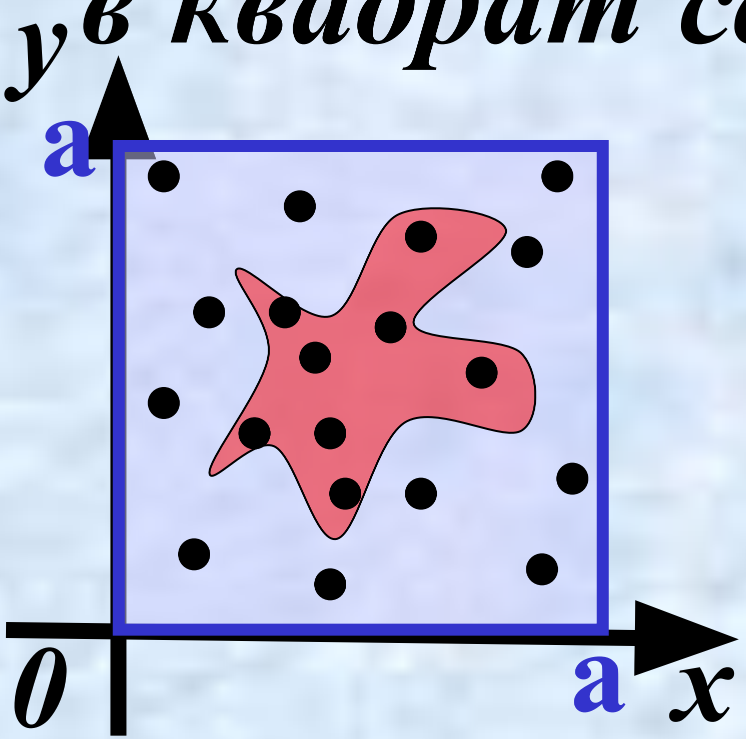
Остроумный метод приближенного вычисления площадей сложных фигур – метод Монте-Карло – назван в честь города в княжестве Монако, где находятся всемирно известные казино (рулетка).

И как это ни парадоксально, но совершенно случайное помогает в вычислении строго определённого.

Дана фигура сложной формы.

Требуется: вычислить площадь этой фигуры.

Суть метода: поместим фигуру в квадрат со стороной а.



Будем наугад, т. е. случайным образом бросать точки в этот квадрат.

Таким образом, при большом числе точек доля точек, содержащихся в фигуре, приближённо равна отношению площади этой фигуры к площади квадрата:

$$\frac{M}{N} = \frac{S}{a^2} \Rightarrow S = M \cdot a^2/N$$

M – ***кол-во точек в фигуре,***

N – ***кол-во точек в квадрате***