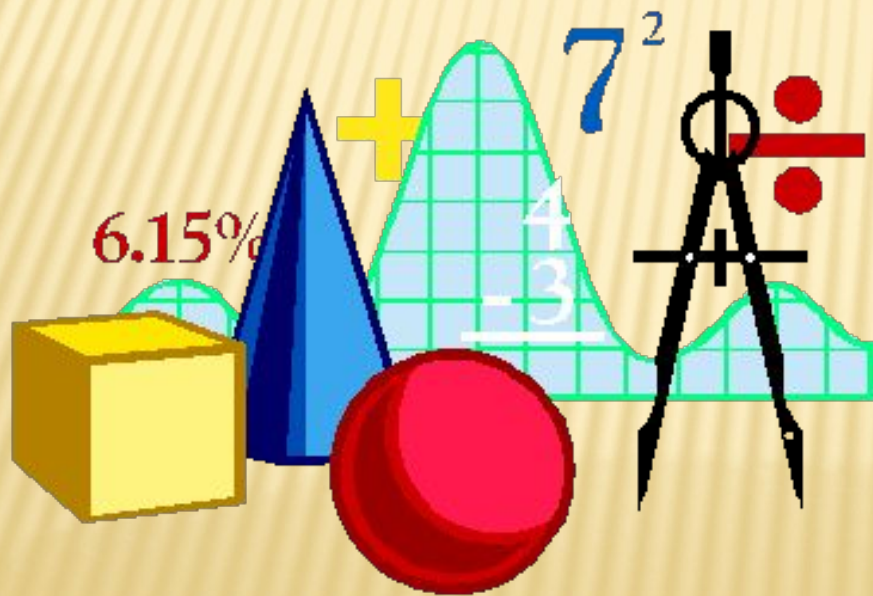


Нестандартные способы решения квадратных уравнений



Автор:
учащаяся 9 а класса

Руководитель работы:
Фирсова Дарья Евгеньевна
учитель математики

Человеку, изучающему алгебру, часто полезнее решить одну и ту же задачу тремя различными способами, чем решать три-четыре задачи. Решая одну задачу различными способами, можно путем сравнения выяснить, какой из них короче и эффективнее. Так вырабатывается опыт.

У.У. Соьер (английский математик XX века)

Цель работы

Изучить все существующие способы решения квадратного уравнения. Научиться использовать эти способы.

Задачи

- Понять, что называется квадратным уравнением.
- Узнать какие виды квадратных уравнений существуют.
- Найти информацию о способах решения квадратного уравнения и изучить её.

Актуальность темы: Изучением квадратных уравнений люди занимались еще с древних веков. Мне захотелось узнать историю развития квадратных уравнений.

В школьных учебниках дана не полная информация о квадратных уравнениях и способах их решения.

Объект: Квадратные уравнения.

Предмет: Способы решения данных уравнений.

Методы исследования: аналитический.

Гипотеза – если я при исследовании данной темы смогу реализовать поставленные мною цель и задачи, то соответственно выйду и на реализацию предпрофильной подготовки в области математического образования.

Методы исследования:

- Работа с учебной и научно-популярной литературой.
- Наблюдение, сравнение, анализ.
- Решение задач.

Ожидаемые результаты: В ходе изучения данной работы, я реально смогу оценить свой интеллектуальный потенциал и соответственно в будущем определиться с профилем обучения, создать проектный продукт по исследуемой теме в форме компьютерной презентации, изучение данного вопроса позволит мне компенсировать недостаточность в знаниях по обозначенной теме.

Считаю свою работу перспективной, так как в дальнейшем этим материалом могут воспользоваться и ученики, для повышения математической грамотности, и учителя на факультативных занятиях

История развития квадратных уравнений



Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне

Необходимость решать уравнения не только первой, но и второй степени ещё в древности была вызвана потребностью решать задачи, связанные с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до нашей эры вавилоняне. Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

$$x^2 - x = 14\frac{1}{2}$$

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены. Несмотря на высокий уровень развития алгебры в Вавилонии, в клинописных текстах отсутствуют понятие отрицательного числа и общие методы решения квадратных уравнений.

Как составлял и решал Диофант квадратные уравнения

«Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение 96»

Диофант рассуждает следующим образом: из условия задачи вытекает, что искомые числа *не* равны, т.к. если бы они равны, то их произведение равнялось бы не 96, а 100. Таким образом, одно из них будет больше половины их суммы, т.е. **$10+X$** , другое же меньше, т.е. **$10-X$** .

Разность между ними $2X$

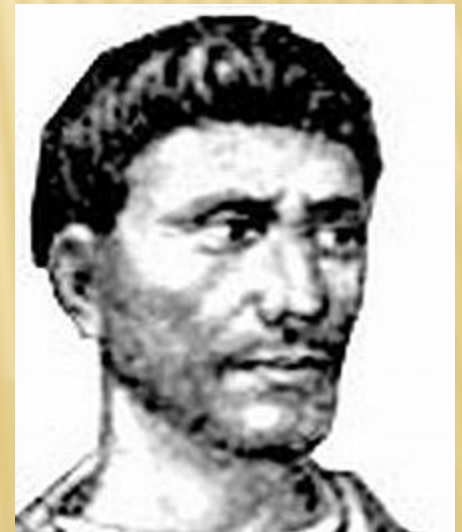
Отсюда **$X=2$** . Одно из искомых чисел равно 12, другое 8. Решение **$X = -2$** для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.

УРАВНЕНИЕ:

$$(10+X)(10-X)=96$$

или же:

$$100 - X^2 = 96$$
$$X^2 - 4 = 0(1)$$



Квадратные уравнения в Индии

Задачи на квадратные уравнения встречаются и в астрономическом трактате «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученый, Брахмагупта, изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

$$ax^2+bx=c, a>0$$

*Одна из задач знаменитого
индийского математика XII века
Бхаскары*

Обезьянок резвых стая
Всласть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А двенадцать по лианам...
Стали прыгать повисая...
Сколько было обезьянок
Ты скажи мне, в этой стае?.

Соответствующее задачи уравнение:

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

Баскара пишет под видом:

$$x^2 - 64x = -768$$

Дополнил левую часть до квадрата,

$$x^2 - 64x + 32^2 = -768 + 1024,$$

$$(x - 32)^2 = 256$$

$$x - 32 = \pm 16$$

$$x^1 = 16, \quad x^2 = 48$$

Квадратные уравнения в Древней Азии

$$x^2 + 10x = 39$$

Вот как решал это уравнение среднеазиатский ученый ал-Хорезми:

Он писал : "Правило таково:

раздвои число корней,

получите в этой задаче пять,

умножь на это равное ему, будет двадцать пять,

прибавь это к тридцати девяти,

будет шестьдесят четыре,

извлеки из этого корень, будет восемь,

и вычти из этого половину числа корней, т.е.пять,

останется

это будет корень квадрата , который ты искал."

А второй корень ? Второй корень не находили, так как отрицательные числа не были известны.

$$x=2x \cdot 5$$

5

$$5 \cdot 5 = 25$$

$$25 + 39$$

64

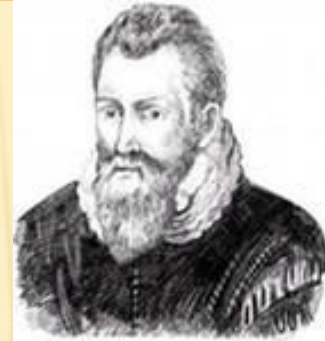
8

$$8 - 5$$

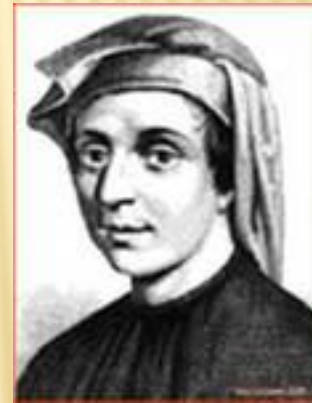
3

Квадратные уравнения в Европе XIII-XVII вв.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду $x^2+vx+c=0$, было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. **Штифелем**.



Формулы решения квадратных уравнений в Европе были впервые изложены в 1202 г. итальянским математиком **Леонардом Фибоначчи**.



Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Лишь в 17 в. благодаря трудам **Декарта, Ньютона и других ученых** способ решения квадратных уравнений принимает современный вид



О теореме Виета

Теорема, выражающая связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 г. Следующим образом: «Если $B+D$, умноженное на $A-A$, равно BD , то A равно B и равно D ».

Чтобы понять Виета, следует помнить, что A , как и всякая гласная буква, означало у него неизвестное (наше x), гласные же B, D — коэффициенты при неизвестном.

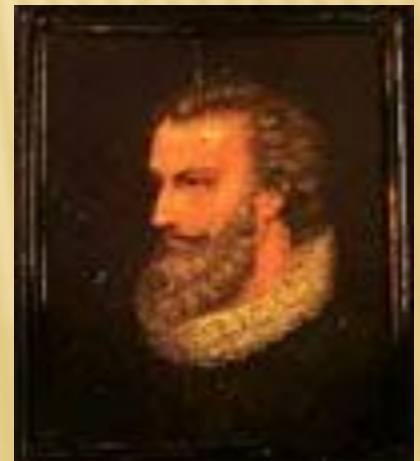
На языке современной алгебры вышеприведенная формулировка Виета означает:

Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет действительные корни, то их сумма равна $-p$, а произведение равно q , то есть

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 x_2 = q$$

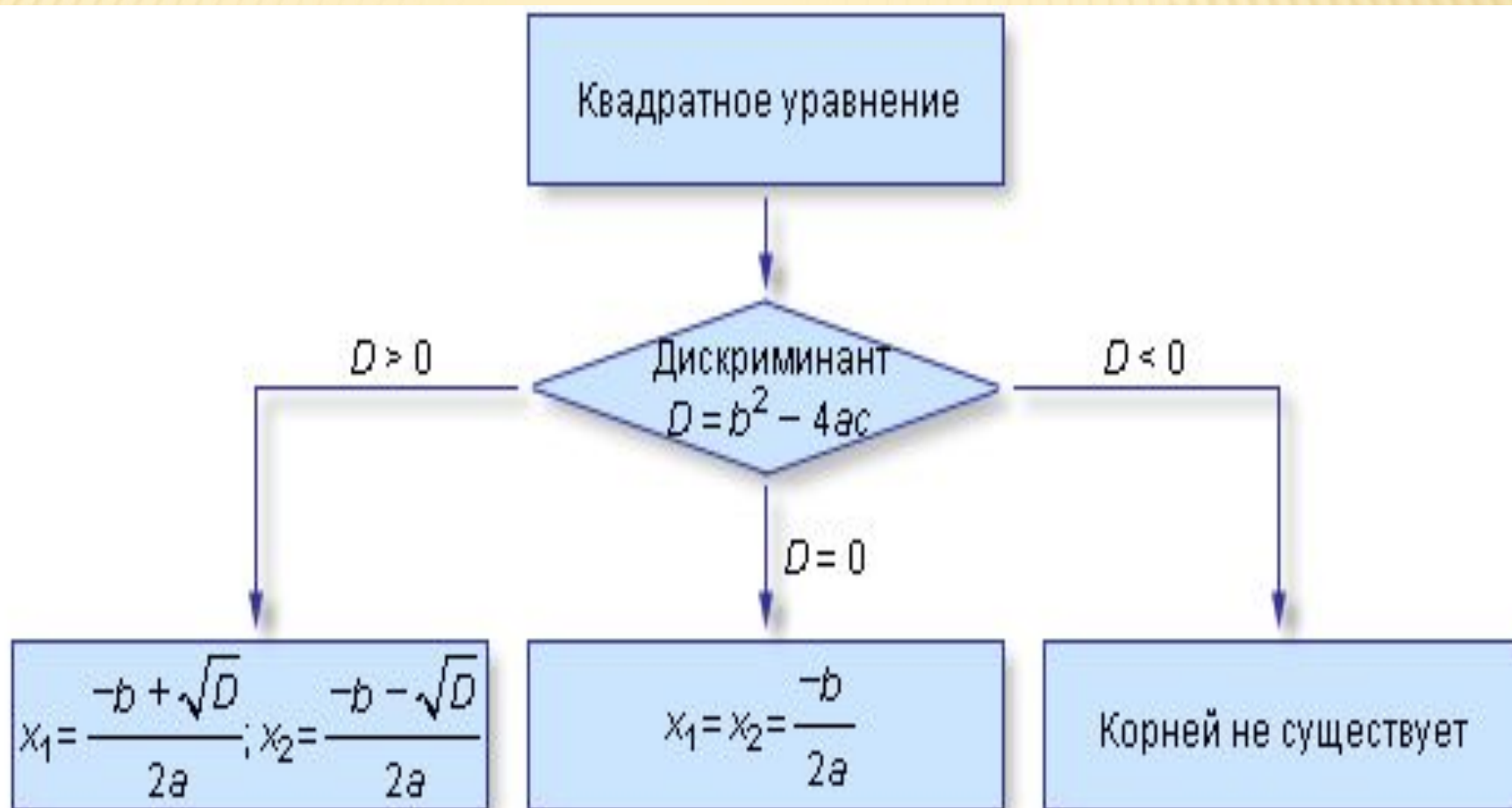
(сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену).



Десять способов решения квадратных уравнений

- Решение квадратных уравнений по формуле
- Разложение левой части уравнения на множители
- Теорема Виета
- Применение свойств коэффициентов квадратного уравнения
- Решение квадратных уравнений способом «переброски» старшего коэффициента
- Метод выделения полного квадрата
- Графический способ решения квадратных уравнений
- Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки
- Решение квадратных уравнений с помощью номограммы
- Геометрический способ решения квадратных уравнений

Решение квадратных уравнений по формуле



Метод разложения на множители

Цель:

привести квадратное уравнение общего вида к виду:

$$A(x) \cdot B(x) = 0,$$

Способы:

где $A(x)$ и $B(x)$ – многочлены относительно x .

- *Вынесение общего множителя за скобки;*
- *Использование формул сокращенного умножения;*

Пример:

: $x^2 + 10x - 24$ – способ группировки.

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2);$$

$$(x + 12)(x - 2) = 0;$$

$$x + 12 = 0 \quad \text{или} \quad x - 2 = 0;$$

$$x_1 = -12 \quad x_2 = 2;$$

Числа -12 и 2 являются корнями данного уравнения.

Ответ: $x_1 = -12$; $x_2 = 2$.

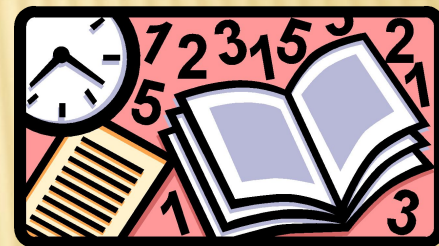
Решение уравнений с помощью теоремы Виета

если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$

то $x_1 + x_2 = -p$ $(D \geq 0)$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Например:



$$X^2 + 3X - 10 = 0$$

$X_1 \cdot X_2 = -10$, значит корни имеют разные
знаки

$X_1 + X_2 = -3$, значит больший по модулю
корень - отрицательный

Подбором находим корни: $X_1 = -5$, $X_2 = 2$

Свойства коэффициентов квадратного уравнения

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$

Если $a + b + c = 0$ (т.е. сумма коэффициентов уравнения равна нулю), то $x_1 = 1$, $x_2 = c/a$

Если $a - b + c = 0$, или $b = a + c$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -c/a$.

Пример:

$$137x^2 + 20x - 157 = 0.$$

$$a = 137, b = 20, c = -157.$$

$$a + b + c = 137 + 20 - 157 = 0.$$

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-157}{137}$$

Ответ $\frac{-157}{137}$

Решение уравнений способом «переброски»

Корни квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ и $y^2 + by + ac = 0$ связаны соотношением: $x = y/a$.

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Умножая обе его части на a , получаем уравнение $a^2x^2 + abx + ac = 0$. Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению $y^2 + by + ac = 0$, равносильного данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета. Окончательно получаем $x_1 = y_1/a$ и $x_2 = y_2/a$.

Решите уравнение: $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

Перебросим коэффициент 2 к свободному члену

$y^2 - 11y + 30 = 0$. $D > 0$, по теореме, обратной теореме Виета, получаем корни: 5; 6, далее возвращаемся к корням исходного уравнения: 2,5; 3.

Метод выделения полного квадрата

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

Выделим в левой части полный квадрат. Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ в следующем виде:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3$$

В полученном выражении первое слагаемое – квадрат числа x , а второе – удвоенное произведение x на 3, поэтому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 3^2 , так как

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$$

Преобразуем теперь левую часть уравнения $x^2 + 6x - 7 = 0$, прибавляя к ней и вычитая 3^2 , имеем:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 7 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = \\ &= (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16 \end{aligned}$$

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$$(x + 3)^2 - 16 = 0, \text{ т.е. } (x + 3)^2 = 16.$$

Следовательно, $x + 3 - 4 = 0$ или $x + 3 + 4 = 0$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -7$$

Ответ: -7; 1.

Графический способ решения квадратного уравнения

Не используя формул квадратное уравнение можно решить графическим способом. Решим уравнение $x^2 - x - 1 = 0$.

Для этого построим два графика:
1) $y = x^2$
2) $y = x + 1$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	9	4	1	0	1	4	9

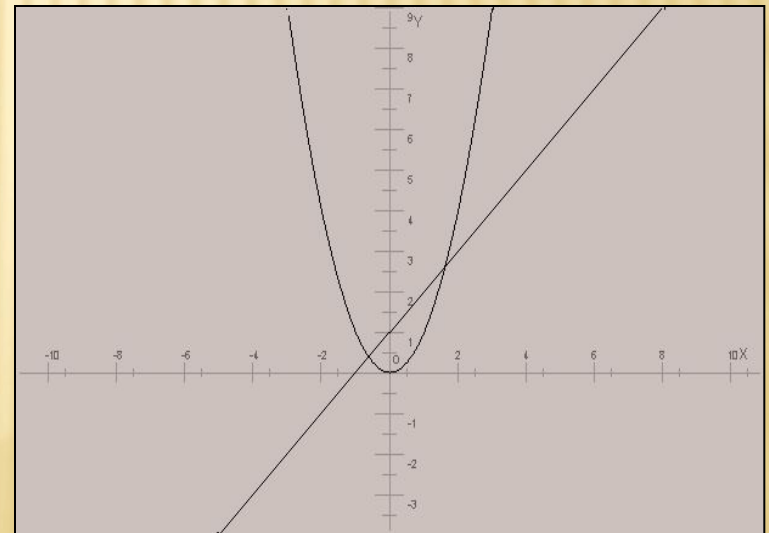
X	-1	0	1
Y	0	1	2

Абсциссы точек пересечения графиков и будут корнями уравнения.

Если графики пересекаются в двух точках, то уравнение имеет два корня.

Если графики пересекаются в одной точке, то уравнение имеет один корень.

Если графики не пересекаются, то уравнение корней не имеет.

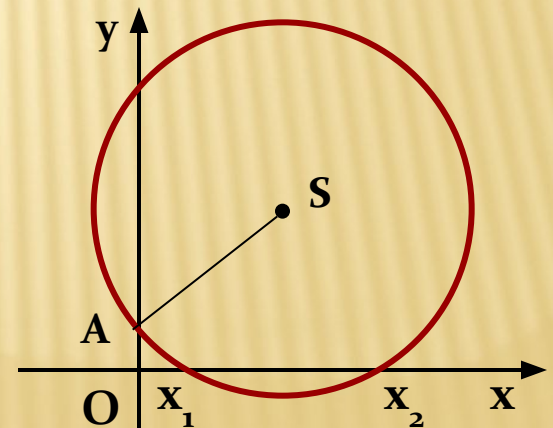


Ответ: $x \approx -0.6; x \approx 2.6$

Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

1. Выберем систему координат.
2. Построим точки $S (-b/2a; a+c/2a)$ – центр окружности и $A(0; 1)$.
3. Проведем окружность с радиусом SA .

Абсциссы точек пересечения окружности с осью Ox являются **корнями** данного квадратного уравнения.



Решение квадратных уравнений с помощью номограммы

Это старый и незаслуженно забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на с.83 «Четырехзначные математические таблицы» Брадис В.М.

Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения
 $z^2 + pz + q = 0$

Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

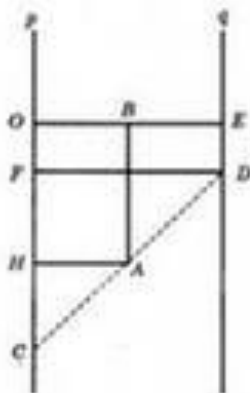
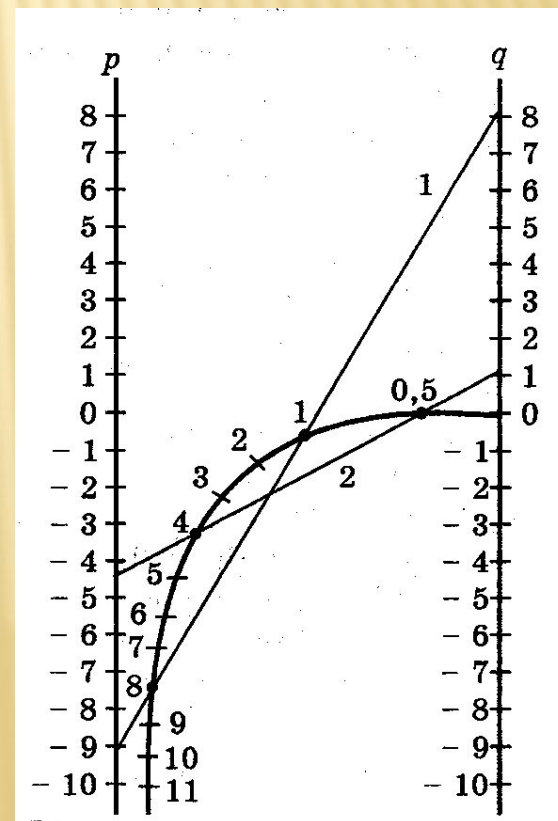


Рис. 11

Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$
номограмма дает корни

$$Z_1 = 8.0 \text{ и } Z_2 = 1.0$$



Геометрический способ решения квадратных уравнений

Пример, ставший знаменитым, из «Алгебры» ал - Хорезми: $x^2 + 10x = 39$. В оригинале эта задача формулируется следующим образом: «Квадрат и десять корней равны 39».

$$S = x^2 + 10x + 25 \quad (x^2 + 10x = 39)$$

$S = 39 + 25 = 64$, откуда следует, что сторона квадрата $ABCD$, т.е. отрезок $AB = 8$.

$$x = 8 - 2,5 - 2,5 = 3$$

B	$6\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}x$	$6\frac{1}{4}$	C	
	$2\frac{1}{2}x$	x^2	$2\frac{1}{2}x$		
	$6\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}x$	$6\frac{1}{4}$		
A				D	

На основании опроса установлено, что:

- Наиболее сложными оказались следующие способы:
 - разложение левой части уравнения на множители,
 - метод выделения полного квадрата.
- Рациональные методы решения:
 - решение квадратных уравнений по формуле;
 - решение уравнений с использованием теоремы Виета
- Практического применения не имеет
 - геометрический способ решения квадратных уравнений.
- Никогда раньше не слышали о способах:
 - применение свойств коэффициентов квадратного уравнения;
 - с помощью номограммы;
 - решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки;
 - способ «переброски» (этот способ вызвал интерес у учеников).

Заключение

- **данные приёмы решения заслуживают внимания, поскольку они не все отражены в школьных учебниках математики;**
- **овладение данными приёмами поможет учащимся экономить время и эффективно решать уравнения;**
- **потребность в быстром решении обусловлена применением тестовой системы вступительных экзаменов;**



**СПАСИБО
ЗА
ВНИМАНИЕ!**