Кубанский государственный технологический университет

Институт информационных технологий и безопасности

Кафедра компьютерных технологий и информационной безопасности

Учебная дисциплина

Электротехника и электроника

Лекция № 10

Классический метод анализа переходных процессов

Учебные вопросы:

1. Причины возникновения переходных процессов. Законы коммутации.
2. Переходные процессы в цепи постоянного тока с одним реактивным элементом.
3. Разряд емкости на ***RLC*** - цепь.

Литература:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В.,Страков С.В. Основы теории цепей: *Учебник для вузов*, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 234 – 249
2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: *Учебник для вузов*, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 103 – 117.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: *Учебник для вузов*, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.

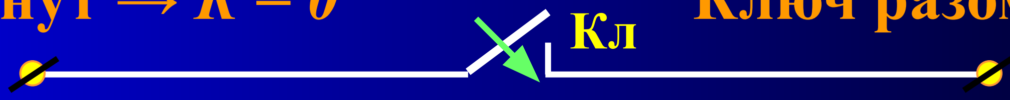
1. Причины возникновения переходных процессов. Законы коммутации.

При анализе процессов в ЭЦ приходится иметь дело с двумя режимами их работы: установившимся (*стационарном*) и **переходном** (***динамическом***).

Физической причиной возникновения переходных процессов в цепях является наличие реактивных элементов, в которых накапливается энергия магнитного и электрического поля.

При различного рода воздействиях (подключении к цепи или отключении источников энергии, изменении параметров цепи) изменяется энергетический режим работы цепи, причем эти изменения не могут осуществляться мгновенно в силу непрерывности изменения энергии электрического и магнитного полей, что и приводит к возникновению переходных процессов.

Ключ замкнут → *R* = *0*   **Ключ разомкнут → *R* = ∞**



Переходные процессы в цепи описываются *однородными* (если цепь не содержит источников энергии) или *неоднородными* (если цепь содержит источник энергии) линейными дифференциальными уравнениями (ЛДУ).

Методы расчета переходных процессов

Классический	Операторный	Частотный
Сводится к решению **НЛДУ (ОЛДУ)**	Сводится к решению алгебраических операторных уравнений цепи	Используются частотные методы анализа ЭЦ

Классический метод обладает наглядностью и удобен для анализа и расчета простых цепей, ***операторный*** – упрощает расчет сложных цепей.

❑ Методика расчета переходных процессов *классическим методом*

1. Составить ЛДУ *n – го порядка* (в общем случае – неоднородное ЛДУ) относительно независимой переменной (*в качестве которой может быть выбран ток* i_L *или напряжение* u_C), описывающей состояние цепи после коммутации.

$$\boxed{a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)}$$

где a_n – постоянные коэффициенты, $f(t)$ – внешнее воздействие (ЭДС, ток),
n – порядок ЛДУ (*равен числу разнородных реактивных элементов ЭЦ*).

2. Составить общее решение неоднородного ЛДУ в виде суммы общего решения однородного ЛДУ и частного решения неоднородного ЛДУ.

$$\boxed{y(t) = y_{CB}(t) + y_{УСТ}(t)}$$

$y_{CB}(t)$ – свободная составляющая искомой функции, т.е. общее решение однородного ЛДУ, полученного при $f(t) = 0$ (*содержит постоянные интегрирования*).

$y_{УСТ}(t)$ – установившаяся составляющая, т.е. частное решение, представляющее собой вынужденный режим, *задаваемый в цепи внешним источником*.

3. В общем решении $y_{CB}(t)$ – следует найти постоянные интегрирования ***из начальных условий***, т.е. условий цепи в начальный момент времени после ее коммутации на основании ***законов коммутации.***

Законы коммутации утверждают, что ***ток в индуктивности и напряжение на емкости*** **не могут изменяться скачком**.

Первый закон коммутации связан с непрерывностью изменения магнитного поля катушки индуктивности $W_L = Li^2/2$ и гласит: ***в начальный момент времени $t = 0_+$ непосредственно после коммутации ток в индуктивности имеет то же значение, что и в момент времени $t = 0_-$, до коммутации и с этого момента плавно изменяется***

$$\boxed{i_L(0_-) = i_L(0) = i_L(0_+)}$$

Второй закон коммутации связан с непрерывностью изменения электрического поля емкости $W_C = Cu^2/2$ и гласит: ***в начальный момент времени $t = 0_+$ непосредственно после коммутации напряжение на емкости имеет то же значение, что и в момент времени $t = 0_-$ до коммутации и с этого момента плавно изменяется***

$$\boxed{u_C(0_-) = u_C(0) = u_C(0_+)}$$

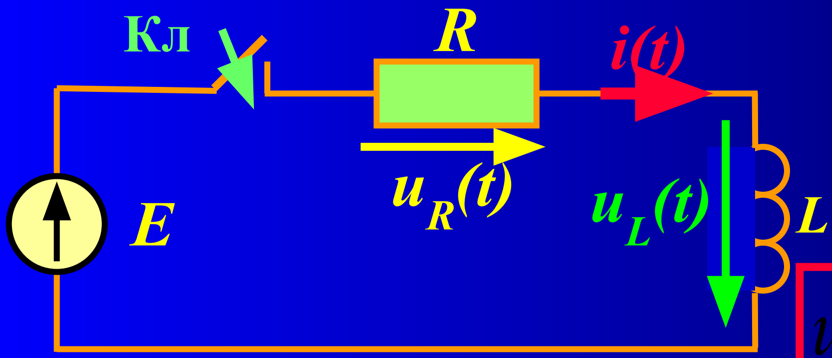
$$\boxed{u_L(t) = L\frac{di}{dt}}$$

Производные могут изменяться скачком

$$\boxed{i_C(t) = C\frac{du}{dt}}$$

2. Переходные процессы в цепи постоянного тока с одним реактивным элементом

2.1. Подключение источника постоянной ЭДС к *RL - цепи*



В момент времени **t = 0** → *коммутация* и начало переходного процесса.

В качестве независимой переменной выберем ток ***i(t) = i_L(t)***

$$u_R(t) + u_L(t) = E \;\Rightarrow\; iR + L\frac{di}{dt} = E$$

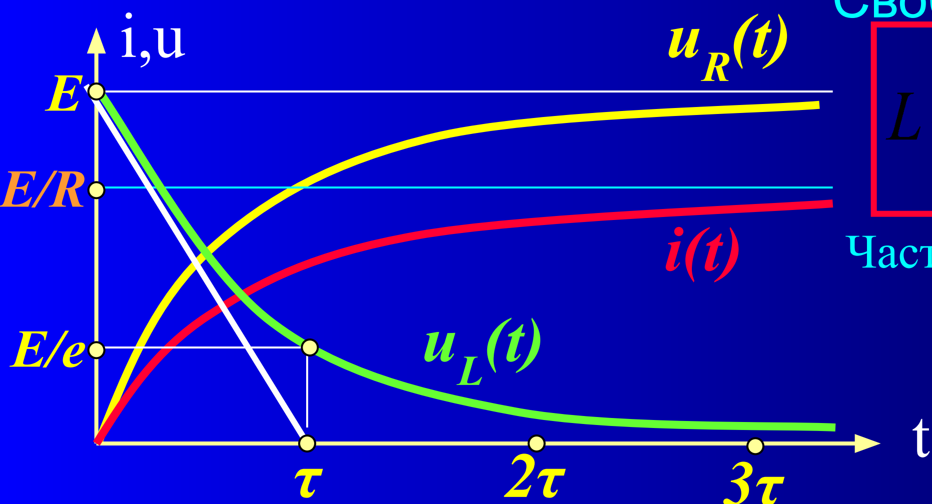
Свободная составляющая – общее решение

$$L\frac{di_{CB}}{dt} + Ri_{CB} = 0; \Rightarrow i_{CB} = A\cdot e^{pt},\; p = -\frac{R}{L}$$

Частное решение – постоянный ток $i_y = E/R$

Общее решение – неоднородного ЛДУ

$$i(t) = i_{CB}(t) + i_y(t) = A\cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R} \qquad A = \frac{-E}{R}$$



$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = L\frac{E}{R}\cdot\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = E\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\tau = \frac{L}{R}, [c]$$

Чем больше постоянная времени τ, тем ***медленнее затухает переходный процесс и наоборот.***

Постоянная времени служит практической мерой продолжительности переходного процесса, так как теоретически переходный процесс длится бесконечно долго и позволяет сравнивать различные цепи в отношении времени стационарного (установившегося) режима.

На практике считают переходный процесс законченным при $t = 3\,\tau$, при этом напряжение или ток достигают ***95%*** **от своего установившегося значения.** Графически т может быть определена как интервал времени на оси t от 0 до точки пересечения касательной к u_L , при этом напряжение на u_L уменьшится в *е* (*е* = 2,7) раз.

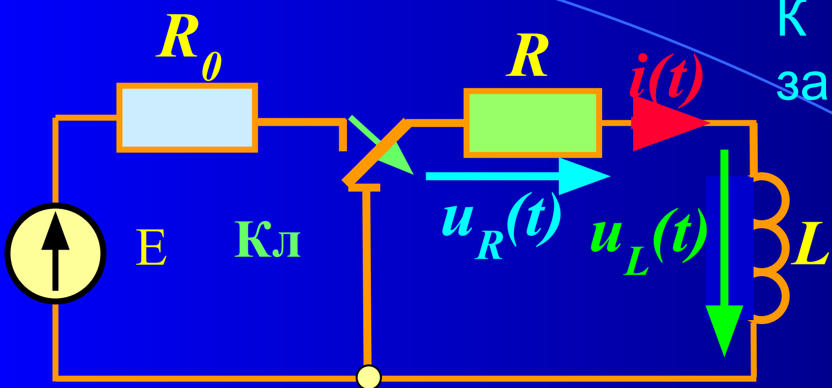
$$L\frac{di}{dt} + Ri = E$$

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t)$$

$$\tau = \frac{a_n}{a_0}$$

Вывод: <u>В цепях постоянного тока</u> <u>при нулевых начальных условиях</u> в момент времени $t = 0_+$ ***<u>индуктивность</u>*** ведет себя как бесконечно большое сопротивление (***аналог – разрыва цепи***), а при $t = \infty$ как бесконечно малое сопротивление (***короткое замыкание цепи***).

2.2. Короткое замыкание RL - цепи



К моменту коммутации в цепи была запасена энергия магнитного поля ***W =Li²/2***.

$$i(0)=\frac{E}{R_0+R}$$

Ненулевые начальные условия

Однородное ЛДУ

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0$$

$$i(t)=i_{CB}(t)=A\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Постоянную интегрирования A находим из начальных условий и закона коммутации.

Решение ОЛДУ

$$i(0_-)=i(0)=\frac{E}{R_0+R}=i(0_+)=A;\Rightarrow A=\frac{E}{R_0+R}$$

Ток в цепи после коммутации

$$i_L(t)=\frac{E}{R_0+R}e^{-\frac{t}{\tau}}\rightarrow\tau=\frac{L}{R}$$

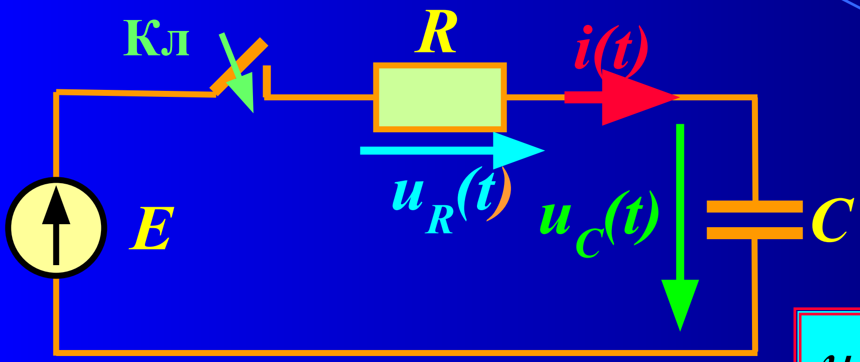
Ток в катушке индуктивности после коммутации поддерживается за счет запасенной магнитной энергии

$$u_L(t)=L\frac{di}{dt}=-\frac{E}{R_0+R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Вывод: При ненулевых начальных условиях индуктивность ведет себя как источник тока

2.3 Подключение источника постоянной ЭДС к *RC - цепи*

В качестве переменной выберем напряжение на конденсаторе $u(t) = u_C(t)$



В момент времени t = 0 → коммутация и начало переходного процесса.

$$i(t) = i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$$

$$u_R(t) + u_C(t) = E \quad\Rightarrow\quad RC\frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

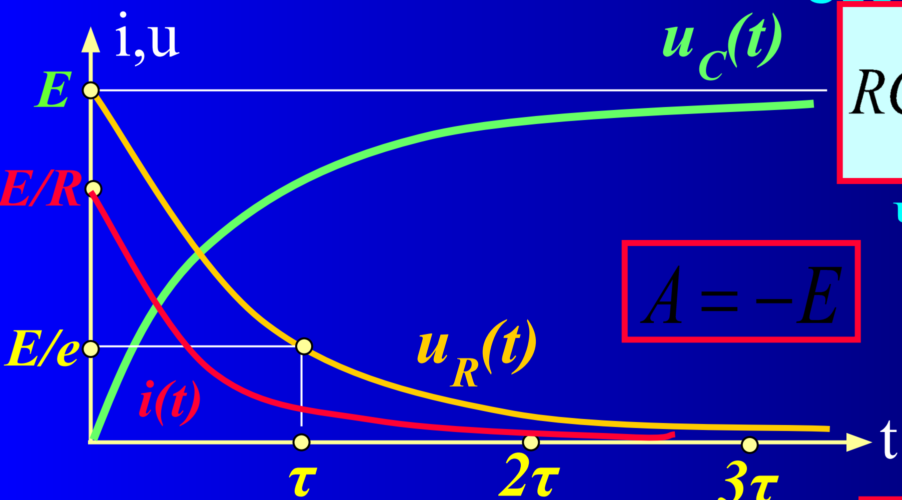
Свободная составляющая – общее решение

$$RC\frac{du_{CB}}{dt} + u_{CB} = 0; \Rightarrow u_{CB} = A \cdot e^{pt}, p = -\frac{1}{RC}$$

Частное решение – постоянный ток $u_y = E$

Общее решение – неоднородного ЛДУ

$$u_C(t) = u_{CB}(t) + u_y(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + E$$



$$A = -E$$

$$u_C(t) = E - E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

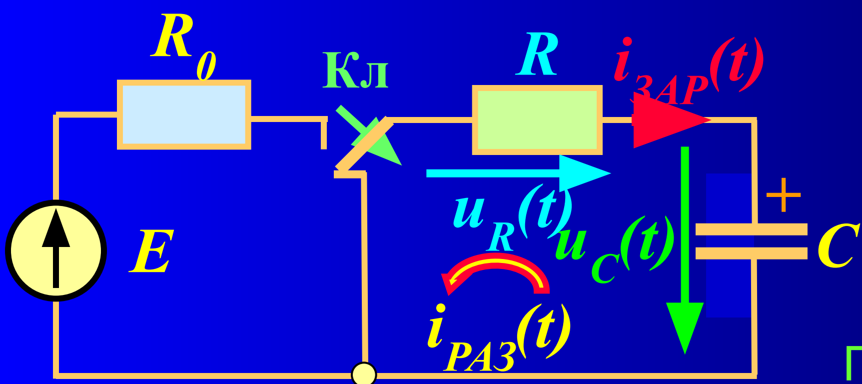
$$u_R(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = RC, [c]$$

Чем больше постоянная времени *τ*, тем медленнее нарастает напряжение на емкости и спадает ток.

Вывод: В цепях постоянного тока при нулевых условиях в момент времени $t = 0_+$ **емкость** ведет себя как бесконечно малое сопротивление (аналог - ***короткое замыкание цепи***), а при $t = \infty$ как бесконечно большое сопротивление (***аналог – разрыва цепи***).

2.4 Короткое замыкание RC - цепи



$$u_C(0) = E$$

Ненулевые начальные условия

Однородное ЛДУ

$$RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$$

Постоянную интегрирования ***А*** находим из начальных условий и закона коммутации.

Решение ОЛДУ

$$u_C(t) = u_{CB}(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(0_-) = u_C(0) = E = u_C(0_+) = A; \Rightarrow A = E$$

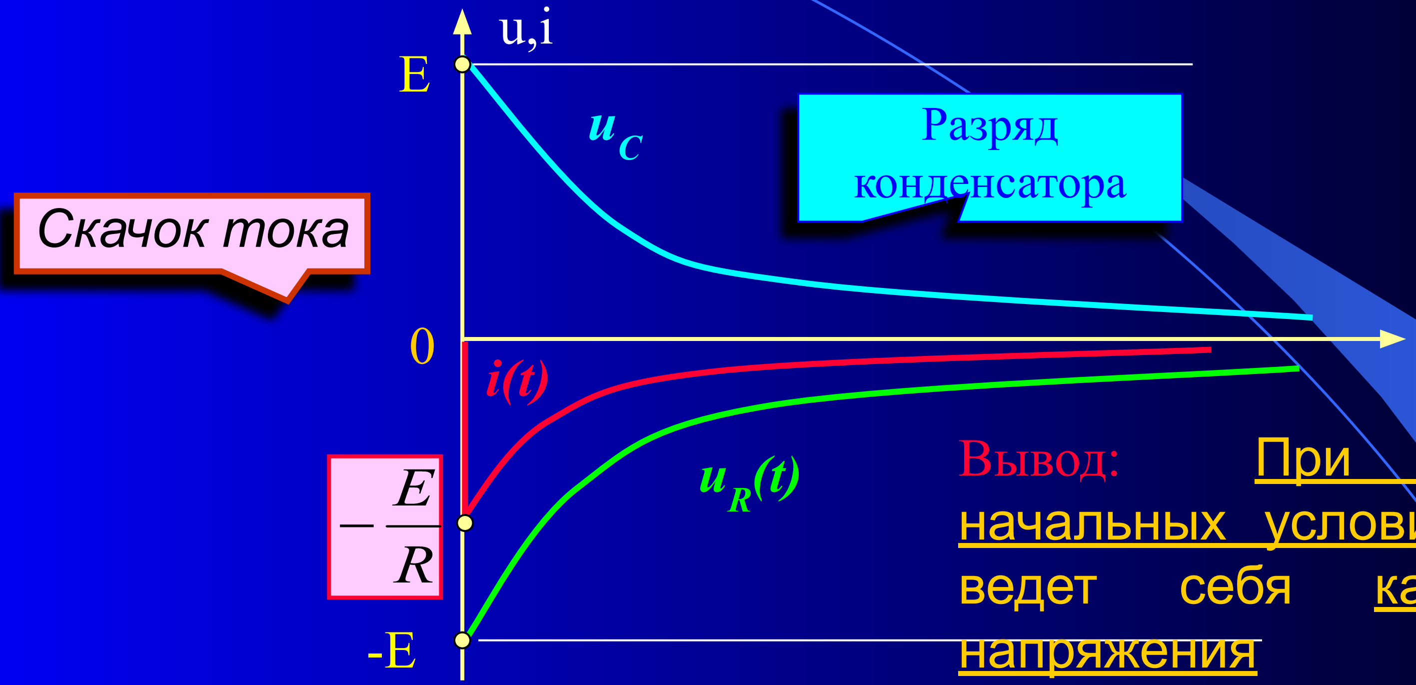
Законы изменения напряжений и тока в цепи после коммутации

$$u_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R(t) = -Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Следует обратить внимание, что знак «-» для тока i и напряжения на резисторе R указывает на то, что ток разряда направлен противоположно току заряда, т.е. опорному току емкости

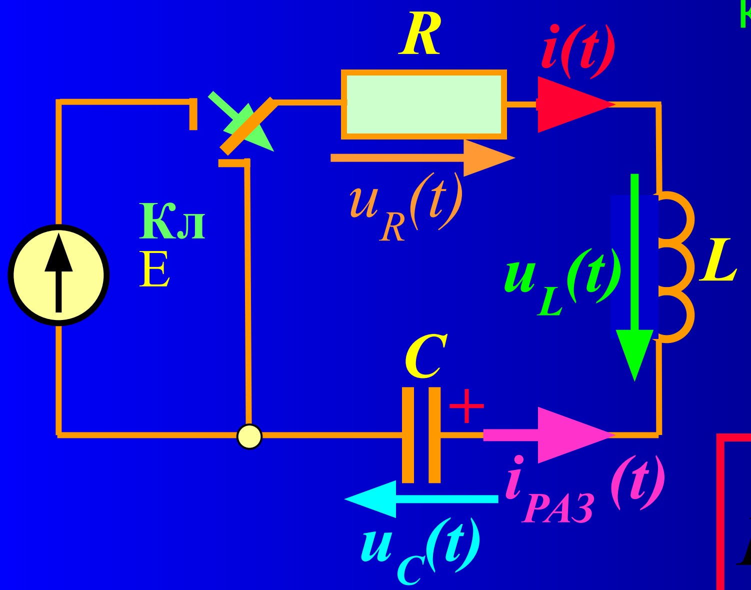


Вывод: При ненулевых начальных условиях **емкость** ведет себя как источник напряжения

Пример: Известно, что форма тока разряда с тела человека близка к форме переходного процесса RC- цепи с параметрами ***C = 200 пФ и R = 1 кОм.*** Если предположить величину статического потенциала на теле человека равным 1000 В, и если произойдет короткое замыкание на тело человека в момент времени t = 0, то величина тока изменится скачком от 0 до 1 А, что очень опасно. Снижение тока до значения 1 мкА произойдет не ранее, чем через 276 мкс.

3. Разряд емкости на *RLC - цепь*.

При наличии в электрической цепи двух независимых накопителей энергии (***L и C***) переходные процессы в них описываются дифференциальными уравнениями второго порядка.



Исходное состояние схемы: емкость до коммутации была заряжена до напряжения E

Согласно второму закону Кирхгофа:

$$u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)=$$
$$=R\cdot i(t)+L\frac{di(t)}{dt}+u_C(t)=0$$

$$i=C\frac{du_C}{dt}$$

$$LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+RC\frac{du_C(t)}{dt}+u_C(t)=0$$

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C(t)}{dt}+\frac{1}{LC}u_C(t)=0$$

Вводим обозначения

$$\alpha=\frac{R}{2L}$$ $$\omega_0^2=\frac{1}{LC}$$

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}+2\alpha\frac{du_C(t)}{dt}+\omega_0^2u_C(t)=0$$

Характеристическое уравнение

$$p^2+2\alpha\cdot p+\omega_0^2=0$$

Характеристическое уравнение

$$p^2 + 2\alpha \cdot p + \omega_0^2 = 0$$

Определим корни этого уравнения

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Общее решение этого ОЛДУ имеет вид:

$$u_C(t) = A \cdot e^{p_1 t} + B \cdot e^{p_2 t}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

Коэффициент затухания

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Резонансная частота контура

<u>Рассмотрим три возможных частных случая</u>

I. Корни действительные и различные $R > 2\rho$

II. Корни комплексно сопряженные $R < 2\rho$

III. Корни действительные и равные $R = 2\rho$

В контуре при разряде емкости при нулевых начальных условиях могут возникнуть различные типы переходных колебаний

❖ Апериодический процесс разрядки конденсатора

1. Корни действительные и различные $R > 2\rho$ ⇒ $\alpha^2 > \omega$

Решение ОЛДУ ⇒ $u_C(t) = u_{CB}(t) = A\cdot e^{p_1 t} + B\cdot e^{p_2 t}$

Для определения А и В запишем еще и уравнение тока в цепи

$$i(t) = i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = C(p_1\cdot A\cdot e^{p_1 t} + p_2\cdot B\cdot e^{p_2 t})$$

Воспользовавшись начальными условиями

$$u_C(0_-) = E = u_C(0_+) = A + B$$
$$i_C(0_-) = 0 = i_C(0_+) = p_1 A + p_2 B$$

$$A = \frac{Ep_2}{p_1 - p_2} \qquad B = \frac{Ep_1}{p_1 - p_2}$$

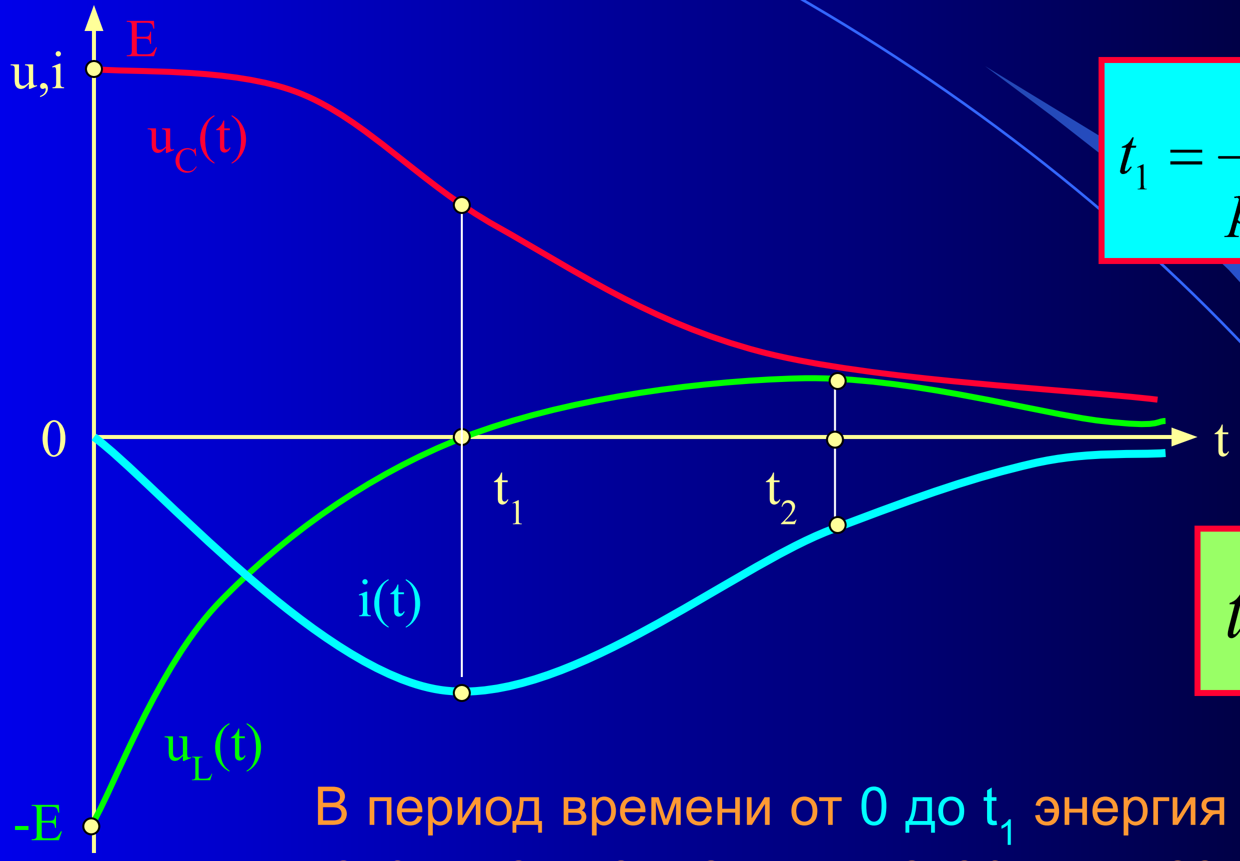
Таким образом, <u>законы изменения тока и напряжений</u> в цепи имеют вид:

$$u_C(t) = \frac{E}{p_1 - p_2}(p_1\cdot e^{p_2 t} - p_2\cdot e^{p_1 t})$$

$$i_C(t) = \frac{E}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_2 t} - e^{p_1 t})$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = \frac{E}{p_1 - p_2}(p_2\cdot e^{p_2 t} - p_1\cdot e^{p_1 t})$$

Анализ полученных зависимостей, показывает, что каждая из найденных величин i_C, u_C, u_L состоит из двух составляющих, затухающих по экспоненте с коэффициентами составляющих $p_1 < 0$ и $p_2 < 0$.



$$t_1 = \frac{1}{p_1 - p_2} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$t_2 = 2 \cdot t_1$$

В период времени от 0 до t_1 энергия W_C расходуется на покрытие тепловых потерь в сопротивлении *R* и создании магнитного поля в катушке индуктивности *L*.

Отрицательное значение тока свидетельствует о противоположном направлении тока разряда относительно опорного направления.

❖Колебательный процесс разрядки конденсатора

2. Корни комплексно-сопряженные $R < 2\rho$ ⇒ $\alpha^2 < \omega_0^2$

$$p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_C$$

Решение ОЛДУ ⇒

$$u_C(t) = u_{CB}(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_C t + \Theta)$$

Закон изменения тока в цепи определяется уравнением

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = C(-\alpha A \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_C t + \Theta) + \omega_C A \cdot e^{-\alpha t} \cos(\omega_C t + \Theta))$$

Исходя из начальных условий

$$u_C(0_-) = E = u_C(0_+) = A \sin\Theta$$

$$i_C(0_-) = 0 = i_C(0_+) = -\alpha A \sin\Theta + \omega_C \sin\Theta$$

$$A = E\frac{\omega_0}{\omega_C}$$

$$\Theta = arctg\frac{\omega_C}{\alpha}$$

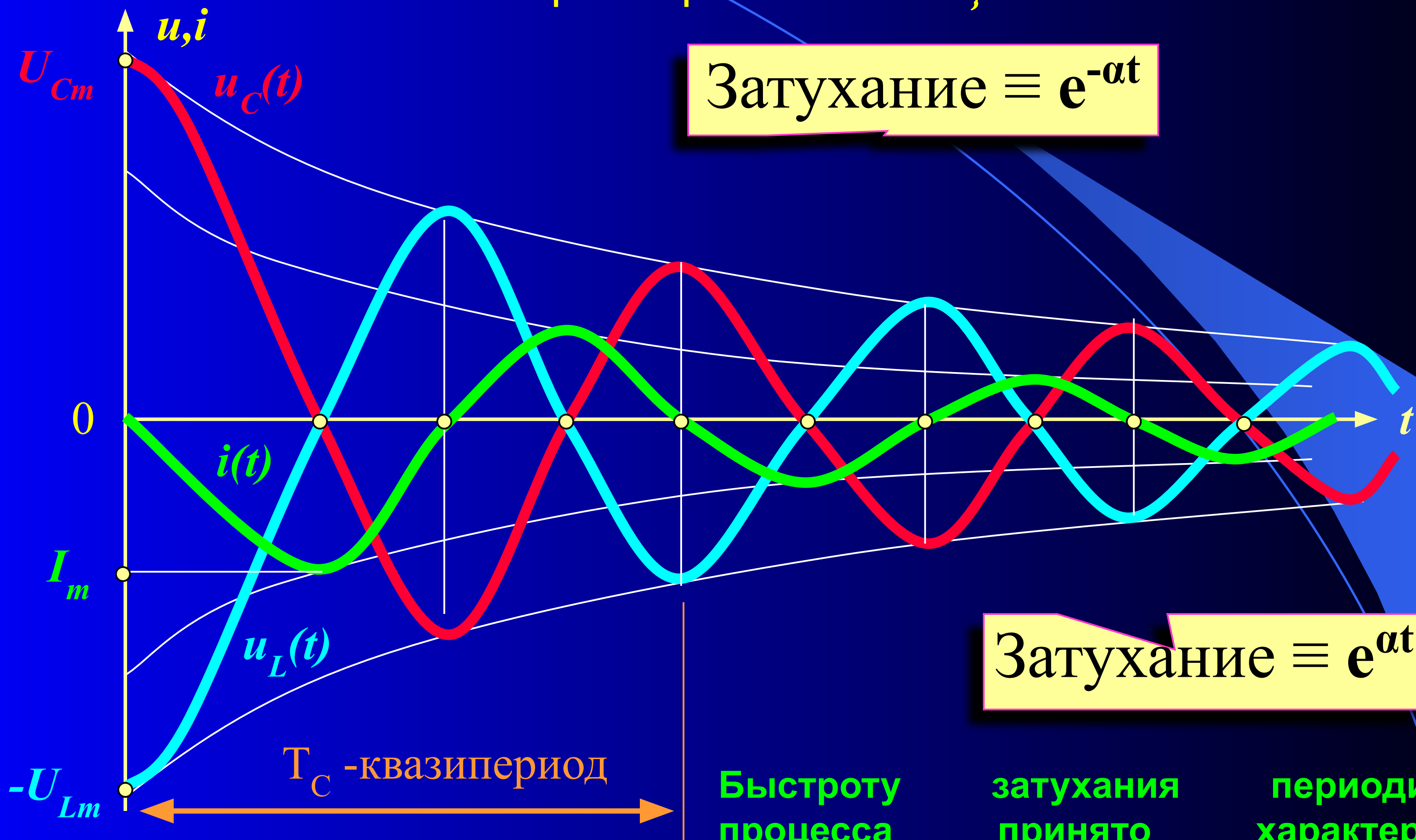
Таким образом, законы изменения тока и напряжений в цепи будут иметь вид:

$$u_C(t) = E\frac{\omega_0}{\omega_C} e^{-\alpha t} \sin(\omega_C t + \Theta) = U_{Cm} e^{-\alpha t} \sin(\omega_C t + \Theta)$$

$$i(t) = -E\frac{1}{\omega_C L} e^{-\alpha t} \sin\omega_C t = I_m e^{-\alpha t} \sin(\omega_C t + \pi)$$

$$u_L(t) = -E\frac{\omega_0}{\omega_C} e^{-\alpha t} \sin(\omega_C t + \Theta)$$

Полученные уравнения показывают, что в данном случае имеет место **колебательный разряд емкости с частотой** ω_C**,** зависящей только от от параметров RLC *- цепи*.



$$\Delta = \frac{u_C(t)}{u_C(t+T_C)} = e^{-\alpha T_C}$$

Быстроту затухания периодического процесса принято характеризовать <u>декрементом затухания</u>, который определяют как отношение двух соседних амплитуд тока или напряжения одного знака

❖ Критический процесс разрядки конденсатора

3. Корни действительные и равные $R = 2\rho$ → $\alpha^2 = \omega_0^2$

$$p_{1,2} = p = -\alpha = -\frac{R}{2L}$$

Решение ОЛДУ

$$u_C(t) = u_{CB}(t) = A \cdot e^{pt} + A_2 \cdot t \cdot e^{pt} = (A_1 + A_2 t) \cdot e^{pt}$$

Для определения A и B запишем еще и уравнение тока в цепи

$$i(t) = i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = C(A_1 \cdot p_1 + A_2 \cdot p_2 \cdot t)e^{pt}$$

Воспользовавшись начальными условиями

$$u_C(0_-) = E = u_C(0_+) = A_1$$
$$i_C(0_-) = 0 = i_C(0_+) = A \cdot p_1 + A_2$$

$A = E$ $A_2 = \alpha \cdot E$

Таким образом, законы изменения тока и напряжений в цепи будут иметь вид:

$$u_C(t) = E(\alpha t + 1) \cdot e^{-\alpha t})$$

$$i_C(t) = -\frac{E}{L} \cdot t \cdot e^{-\alpha t}$$

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt} = E(\alpha \cdot t - 1)e^{-\alpha t})$$

$R = 2\rho$ → Критическое сопротивление контура

Задание на самостоятельную работу

<u>Литература</u>:

1. Зевеке Г.В., Ионкин А.В., Нетушил А.В.,Страков С.В. Основы теории цепей: *Учебник для вузов*, - М.: Энергоатомиздат, 1999 г, с. 234 – 249

2. Бакалов В.П., Игнатов А.Н., Крук Б.И. Основы теории электрических цепей и электроники: *Учебник для вузов*, - М.: Радио и связь, 1999 г, с. 103 – 117.

3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника: *Учебник для вузов*, - М.: Высшая школа, 2003 г, с. 37 –83.