

# Модуль 1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

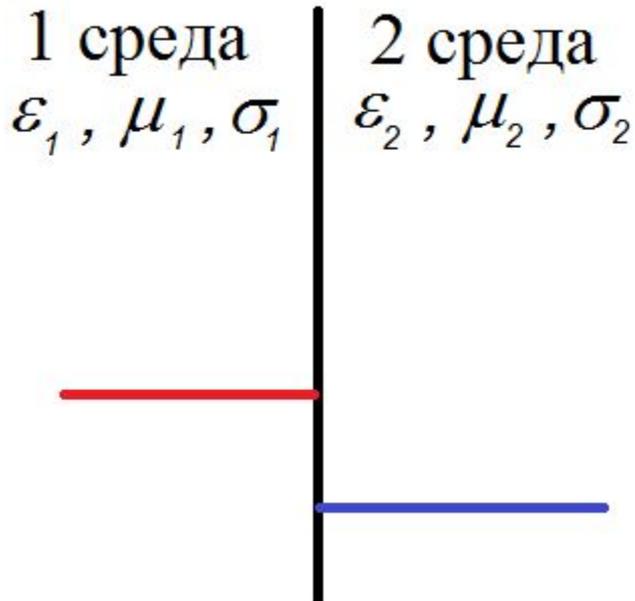
## Лекция №2. Основные законы и теоремы электродинамики

1. Граничные условия на поверхностях раздела реальных сред. Условия излучения.
2. Основные теоремы электродинамики.
3. Энергия электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга.

# 1 Граничные условия на поверхности раздела реальных сред. Условия излучения

## 1 Необходимость введения граничных условий.

Параметры сред ( $\varepsilon, \mu, \sigma$ ) в заданном объеме могут изменяться произвольно. При переходе через некоторую поверхность (границу раздела сред) параметры изменяются скачком.



Уравнения Максвелла в дифференциальной форме на границе раздела теряют смысл (производная терпит разрыв). Граничные условия устраняют неопределенность.

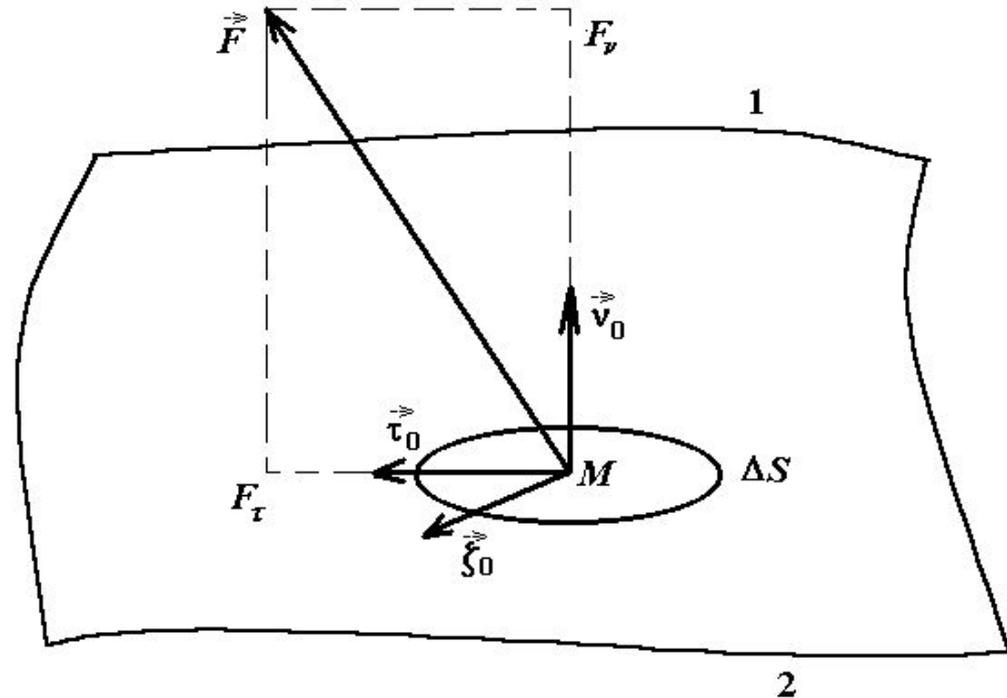
## 2 Типы граничных условий.

Электромагнитные поля – векторные величины. Могут быть представлены в виде разложения в базис, в том числе и на границе раздела сред ( $\Delta S \rightarrow 0$ ):

$$\vec{F} = \vec{\nu}_0 F_\nu + \vec{\tau}_0 F_\tau + \vec{\xi}_0 F_\xi$$

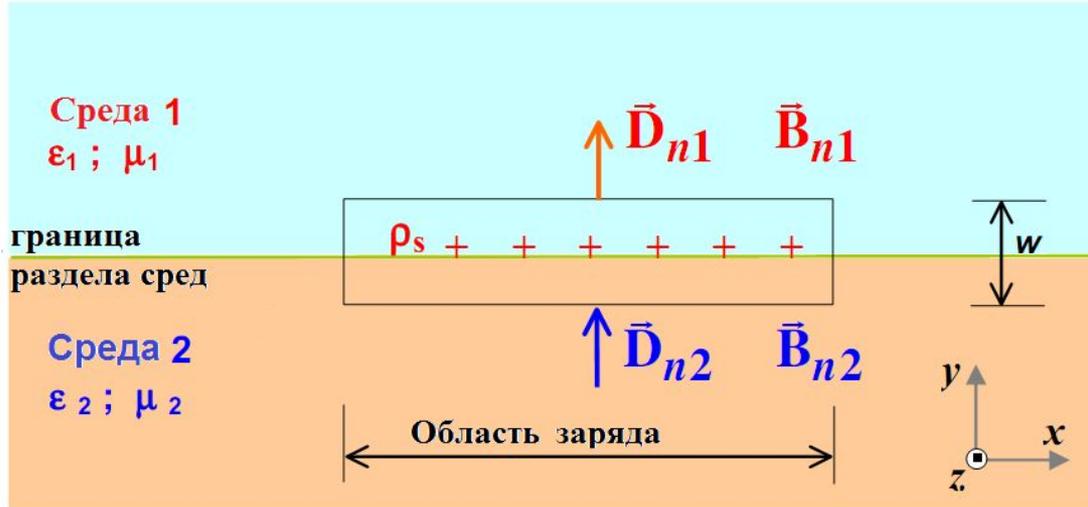
нормальная  
компонента

тангенциальные  
(касательные)  
компоненты

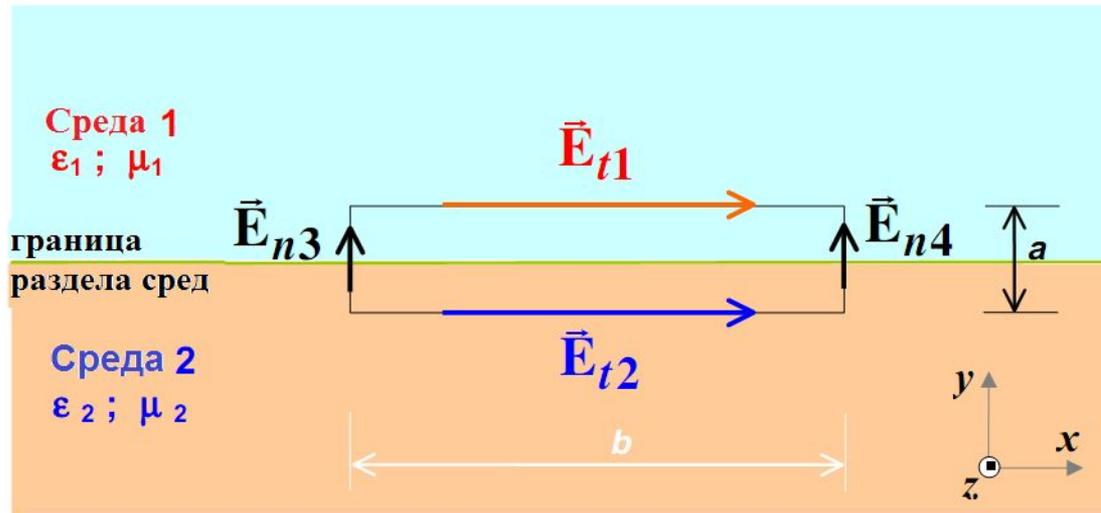


# Граничные условия для электрического поля:

- для нормальных компонент:  $(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \vec{v}_0 = \rho$



- для тангенциальных компонент:  $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \vec{\tau}_0 = 0$   $[\vec{v}_0, \vec{E}_1 - \vec{E}_2] = 0$



# Граничные условия для магнитного поля:

- для нормальных компонент:

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \vec{v}_0 = 0$$

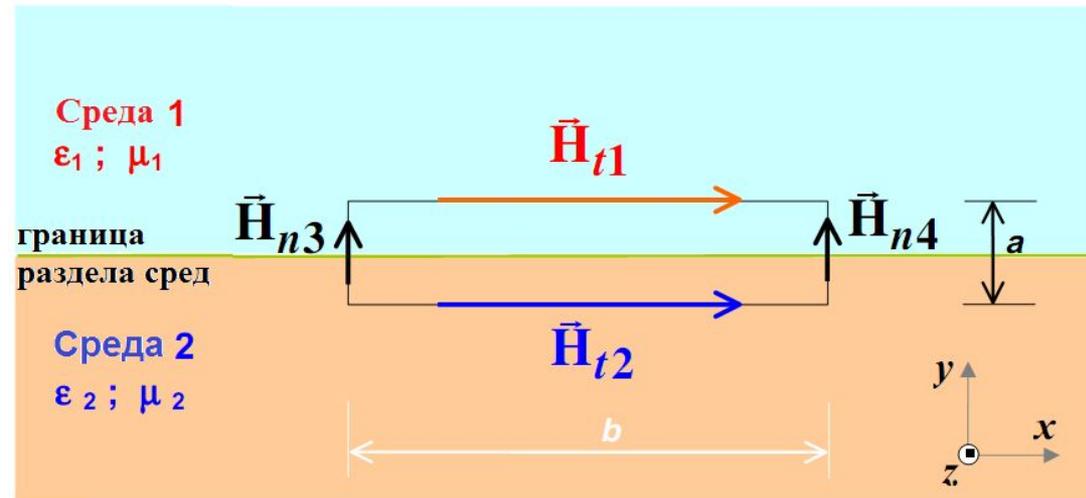
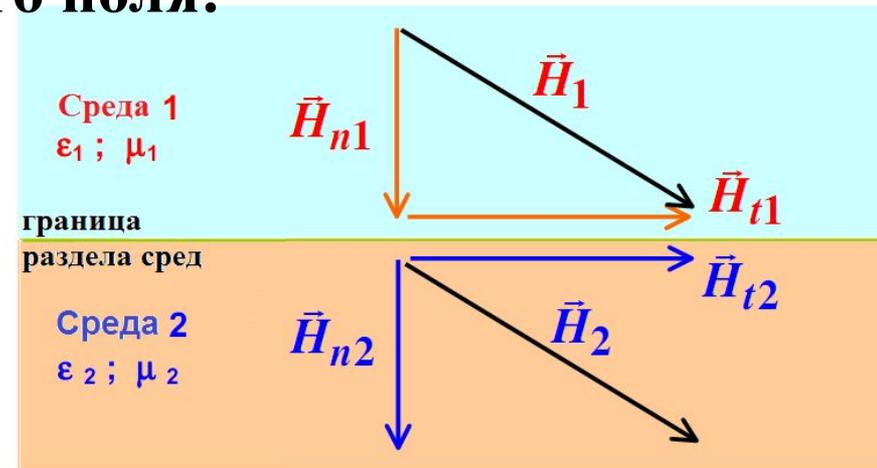
- для тангенциальных компонент:

$$[\vec{v}_0, \vec{H}_1 - \vec{H}_2] = \vec{\eta}$$

где  $\vec{\eta} = \lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow 0} i_0 \frac{\vec{\Delta I}}{\Delta \vec{x}}$  -

поверхностный ток,  
связанный с объемным  
ТОКОМ соотношением

$$\vec{j}^{\text{Э.ВТ.}}(\vec{r}) = \vec{\eta}(\vec{\tau}, \vec{\zeta}) \delta(v - v')$$



**Условия излучения:** применяются для обеспечения единственности решения. (В общем случае решений дифференциальных уравнений – два. Одно не соответствует физическим понятиям).

Для свободного пространства используется **условие излучения Зоммерфельда:**

- 1) амплитуда поля на больших расстояниях от источника должно убывать, по крайней мере, как обратная от данного расстояния величина ( $|\mathbf{A}| \sim 1/r$ );
- 2) фаза поля должна быть такой же, как у уходящей на бесконечность волны ( $\varphi \sim \exp(-ikr)$ ).

Для устранения неопределенности при изломах применяют **условие на ребре:**  $\int (\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}) dV \rightarrow 0$  при  $dV \rightarrow 0$ .

Из условия  $V'$  следует, что в окрестности ребра ни одна из составляющих ЭМП не может возрастать быстрее  $\rho^{-1+\alpha}$ ;

где  $\rho$  - расстояние от ребра;  $0 < \alpha < 1$

## 2 Основные теоремы электродинамики

Используются для упрощения физической трактовки ряда явлений и при решении ряда задач.

### 1. Теорема единственности:

Электромагнитное поле в любой момент времени в любой точке объема определяется уравнениями Максвелла при заданных источниках однозначно, если

- в каждой точке объема даны начальные значения векторов напряженности электрического и магнитного полей;
- известны граничные значения касательных проекций одного из векторов в точках поверхности  $S$  для любого момента времени.

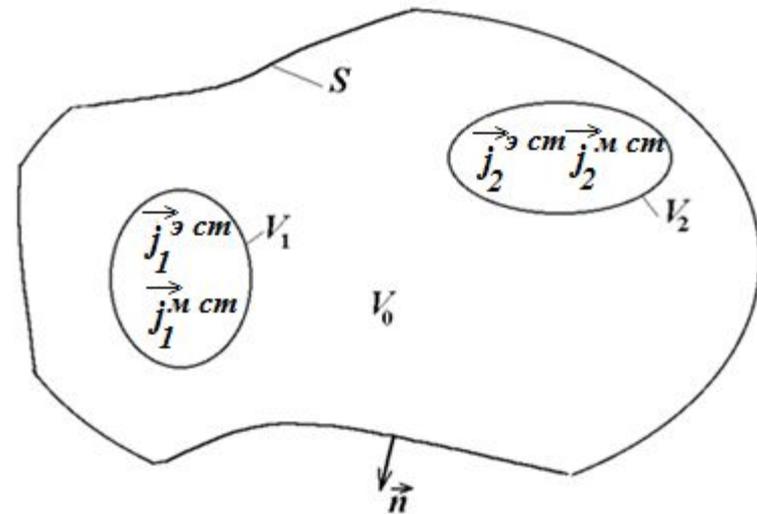
## 2. Лемма Лоренца: взаимодействие между полями в областях

- в дифференциальной форме

$$\operatorname{div}[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - \operatorname{div}[\vec{E}_2, \vec{H}_1] = \vec{j}_1^{\text{э см}} \vec{E}_2 - \vec{j}_1^{\text{м см}} \vec{H}_2 - \\ - \vec{j}_2^{\text{э см}} \vec{E}_1 + \vec{j}_2^{\text{м см}} \vec{H}_1$$

- в интегральной форме

$$\oint_S \{ [\vec{E}_1, \vec{H}_2] - [\vec{E}_2, \vec{H}_1] \} d\vec{s} = \\ = \int_{V_1} \left\{ \vec{j}_1^{\text{см.э}} \vec{E}_2 - \vec{j}_1^{\text{см.м}} \vec{H}_2 \right\} dv - \int_{V_2} \left\{ \vec{j}_2^{\text{см.э}} \vec{E}_1 - \vec{j}_2^{\text{см.м}} \vec{H}_1 \right\} dv$$



## Следствия леммы Лоренца:

– принцип взаимности:

$$\int_{V_1} \left\{ \vec{j}_1^{\text{ст.э}} \vec{E}_2 - \vec{j}_1^{\text{ст.м}} \vec{H}_2 \right\} dv = \int_{V_2} \left\{ \vec{j}_2^{\text{ст.э}} \vec{E}_1 - \vec{j}_2^{\text{ст.м}} \vec{H}_1 \right\} dv$$

Ограничение применимости – изотропные среды.

- **теорема эквивалентных токов.** Позволяет находить поле в любой точке пространства при известном решении задачи дифракции по полю вспомогательного диполя и известном распределении полей на поверхности  $S$ :

для электрического источника

$$\vec{a}\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \left( \vec{j}^{\text{э}} \vec{E}_B^{\text{э}} - \vec{j}^{\text{м}} \vec{H}_B^{\text{э}} \right) dv + \int_S \left\{ [\vec{n}, \vec{H}] \vec{E}_B^{\text{э}} + [\vec{n}, \vec{E}] \vec{H}_B^{\text{э}} \right\} ds$$

для магнитного источника

$$\vec{b}\vec{H}(\vec{r}) = \int_V \left( \vec{j}^{\text{э}} \vec{E}_B^{\text{м}} - \vec{j}^{\text{м}} \vec{H}_B^{\text{м}} \right) dv + \int_S \left\{ [\vec{n}, \vec{H}] \vec{E}_B^{\text{м}} + [\vec{n}, \vec{E}] \vec{H}_B^{\text{м}} \right\} ds$$

Эквивалентные токи:

$$\vec{J}^{\text{э}} = [\vec{n}, \vec{H}] \quad \vec{J}^{\text{м}} = -[\vec{n}, \vec{E}]$$

Электромагнитные поля и волны. Л.2

## 3 Энергия электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга

*Сторонний источник* – источник, который возбуждает ЭМП, но сам от него не зависит.

ЭМП является носителем энергии. В выделенном объеме энергия может изменяться во времени за счет двух процессов:

- превращения электромагнитной энергии в другие формы энергии (тепловая энергия, химическая энергия, кинетическая энергия ускоренных частиц и т.д.) и наоборот;
- вытекания и втекания электромагнитной энергии из данного объема через поверхность  $S$ , ограничивающую данный объем.

$$P + \frac{dw}{dt} + \wp = p_{\text{ст}}$$

где  $p_{\text{ст}}$  – мощность поля, создаваемого сторонними источниками;

$dw/dt$  – мощность, идущая на изменение энергии ЭМП;

$\wp$  – мощность поля, выходящая через поверхность  $S$ .

# Теорема Умова-Пойнтинга – уравнение баланса энергии.

- в дифференциальной форме:

$$\text{div}[\vec{E}, \vec{H}] + \frac{\partial}{\partial t} \left( \epsilon_0 \epsilon \frac{\vec{E}^2}{2} + \mu_0 \mu \frac{\vec{H}^2}{2} \right) + \sigma \vec{E}^2 = \vec{E} \vec{j}^{\text{CT}}$$

проход энергии (излучение)
колебательные процессы
нагрев вещества
энергия стороннего источника

- в интегральной форме:

$$\oint [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s} + \int \left( \vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dv + \int \sigma \vec{E}^2 dv = - \int \vec{j}^{\text{CT}} \vec{E} dv$$

проход энергии (излучение)
колебательные процессы
нагрев вещества
энергия стороннего источника

## Определения:

- отдаваемая мощность:  $P = \int_V \vec{j} \vec{E} dv$

- мощность излучения:  $\wp = \oint_S [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{s}$

- вектор Пойнтинга:  $\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}]$

## ***Физическая трактовка уравнения баланса энергии.***

*Первое слагаемое* – работа, совершаемая ЭМП (в том числе и на нагрев вещества).

*Второе слагаемое* - колебательные процессы - связано с процессом перехода энергии электрического поля

$$W^{\text{э}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \varepsilon \vec{E}^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \vec{E} dv$$

в магнитное

$$W^{\text{м}} = \frac{\mu_0}{2} \int_V \mu \vec{H}^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \vec{H} dv \quad \text{и наоборот.}$$

*Третье слагаемое* описывает поток энергии или мощность излучения через замкнутую поверхность  $S$ .

***Баланс*** считается ***активным***, если преобладает отдача энергии во внешнее пространство  $\wp > 0$ .

***Баланс*** считается ***пассивным***, если преобладает поглощение энергии из внешнего пространства  $\wp < 0$ .

***Баланс нейтрален***, если  $\wp = 0$ .