

Основные теоремы теории вероятностей

Учебные вопросы.

1. Теорема сложения вероятностей для несовместных событий.

2. Условные вероятности. Зависимые и независимые события. Теорема умножения вероятностей.

3. Формула полной вероятностей. Формула Байеса.

В теории вероятностей случайные события рассматриваются с точки зрения теории множеств, что позволяет определить отношения над ними.

Первый учебный вопрос.

Теорема сложения вероятностей суммы несовместных событий.

Теорема. *Вероятность суммы несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Доказательство. Введем обозначения:
 n –общее число возможных элементарных
исходов испытания; m_1 -число исходов,
благоприятствующих событию A ; m_2 –
число исходов, благоприятствующих
событию B

Число элементарных исходов,
благоприятствующих наступлению либо
события A , либо события B , равно m_1+m_2 .

Следовательно,

$$P(A+B)=(m_1+m_2)/n = m_1/n + m_2/n.$$

Приняв во внимание, что $m_1/n = P(A)$ и $m_2/n = P(B)$, окончательно

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Теорема. Если события $A_1, \dots, A_n$ попарно несовместны, то вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей, т.е.

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n)= P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Два события называют *совместными*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (4)$$

Вероятность суммы трех совместных событий равна:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(B \cdot C) - P(A \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$

Полная группа событий

Теорема. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \quad (2)$$

Теорема.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

(3)

Если обозначить

$$P(A) = p,$$

то формула (3) примет вид

$$p + q = 1.$$

Пример.

Вероятность того, что день будет дождливым, $p = 0,7$. Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение. События «день дождливый» и « день ясный»- противоположные, поэтому искомая вероятность

$$q=1-p=1-0,7=0,3$$

Замечание. При решении задач на отыскание вероятности события A часто выгодно сначала вычислить вероятность события $\bar{A}$ а затем найти искомую вероятность по формуле $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

.

Пример. В урне 10 шаров: 3 красных, 5 синих и 2 белых. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?

Решение.

Вероятность вынуть красный шар $P(A)=3/10$, $P(B)=5/10$.

Так как события A и B не совместимы, то по доказанной выше теореме

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0,3 + 0,5 = 0,8.$$

Пример. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую- 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает либо в первую, либо во вторую область.

Решение. События А- «стрелок попал в первую область» и В- «стрелок попал во вторую область»- несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0,45 + 0,35 = 0,80$$

Пример. В урне находятся 12 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым?

Решение.

Пусть A - событие, состоящее в том, что вынут белый шар. Ясно, что $n=12+8=20$ - число всех равновозможных случаев (исходов опыта). Число случаев, благоприятствующих событию A , равно 12, т.е. $m= 12$.

Искомая вероятность

$$P(A)=12/20=0,6.$$

Пример. В урне 30 шаров: 10 красных ,5 синих и 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появления цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара
(событие A)

$$P(A) = 10/30 = 1/3.$$

Вероятность появления синего шара
(событие B)

$$P(B) = 5/30 = 1/6.$$

События А и В несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/6 = 1/2.$$

Условная вероятность. События, независимые в совокупности Теорема умножения вероятностей

Произведением двух событий А и В называют событие (AB) , состоящее в совместном появлении событий А и В.

Зависимые и независимые события.

Событие A называют **независимым** от события B , если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Событие A называют **зависимым** от события B , если вероятность события A зависит от того, произошло событие B или нет.

Условная вероятность

Определение.

Вероятность события A , вычисленная при условии, что произошло событие B , называется условной вероятностью события A и обозначается так: $P(A/B)$, или $P_B(A)$.

Определение. Два события A и B называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или не появления другого,

$$P_B(A)=p(A); \quad p_A(B)=p(B).$$

Теорема. Вероятность произведения двух зависимых событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB)=P(A)P_A(B) \quad (1)$$

Замечание. Применив формулу (1) к событию ВА, получим

$$P(ВА)=P(B)P_B(A). \quad (2)$$

Так как $AB=BA$,то
а сравнивая (1) и (2), получаем
равенство

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных. При этом вероятность каждого последующего события подсчитывается в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots \\ \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n),$$

$$P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n) —$$

где вероятность события A_n ,
вычисленная в предположении, что
события $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ наступили.

В частности, для трех событий
 $P(ABC) = P(A) P_A(B) P_{AB}(C)$.

Теорема умножения для независимых событий

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей: $P(AB) = P(A)P(B)$.

Для трех независимых событий A, B, C формула принимает вид: $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

Теорема. Вероятность совместного появления n событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Пример. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие А) равна 0,8, а вторым (событие В) - 0,7.

Решение. События А и В независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB) = P(A) P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56.$$

Теорема. (о вероятности наступления хотя бы одного из n независимых событий).

Теорема. Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимы в совокупности, то вероятность наступления хотя бы одного из этих событий (т.е. вероятность суммы) вычисляется по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n).$$

Пример. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1=0,8$; $p_2=0,7$; $p_3=0,9$.

Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие A) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1 , A_2 и A_3 (т.е. вероятности промахов), соответственно равны:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0,8 = 0,2;$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0,7 = 0,3;$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Искомая вероятность

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994.$$

Задачи

- В урне 5 красных и 8 белых шаров. Из урны последовательно без возвращения вынимают два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара белые; б) оба шара красные; в) первый шар белый, а второй красный; г) шары разного цвета.
- В лотерее выпущено 10000 билетов и установлены 10 выигрышей по 1000 рублей, 100 – по 500 рублей, 500 – по 100 рублей и 1000 выигрышей по 25 рублей. Гражданин купил 1 билет. Какова вероятность того, что он выиграет не меньше 100 рублей?

Задачи

- Студент знает ответы на 20 вопросов из 25. Экзаменатор последовательно задает студенту три вопроса. Найти вероятность того, что студент: а) ответит на все вопросы; б) не ответит ни на один вопрос; в) ответит на первый и второй вопросы, но не ответит на третий вопрос; г) ответит только на один вопрос.
- Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна p , для второго – 0,7. Вероятность ровно одного попадания при одном выстреле обоих стрелков равна 0,38. Найти p .

Задачи

- Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.
- В мешке содержится десять одинаковых кубиков с номерами от 1 до 10. Наудачу извлекают по одному три кубика. Найти вероятность того, что последовательно появятся кубики с номерами 1, 2, 3, если кубики извлекаются: а) без возвращения; б) с возвращением (извлеченный кубик возвращается в мешок).

Третий учебный вопрос

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Следствием основных теорем вероятностей – теорем сложения и умножения вероятностей – является формула полной вероятностей.

Постановка задачи.

Допустим событие A может наступать при появлении одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$. Эти события образуют полную группу. Такие события B_i называются **гипотезами**.

Также даны вероятности этих событий и условные вероятности

$$P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$$

события A . Для нахождения вероятности события A можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема (формула полной вероятности)

Пусть несовместные события $B_1, B_2, \dots, B_n$, образуют полную группу. Тогда вероятность события A , которое может наступить только при условии появления одного из этих несовместных событий

равняется сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A :

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots \\ \dots + P(B_n)P_{B_n}(A),$$

где $P(B_1)$ - вероятность события B_1 ;

$P(B_2)$ - вероятность
события B_2 ;

$P(B_i)$ - вероятность
события B_i ;

$P_{B_i}(A)$ - условная вероятность события A
при условии, что произошло событие B_i .

Эту формулу называют
« формулой полной вероятности ».

Пример. В магазин поступает изделия с двух фабрик, причем 40% из них изготовлены фабрикой №1, а остальные – фабрикой №2. Фабрика №1 дает 90% изделий первого сорта, а фабрикой №2 75%. Какова вероятность того, что купленное наудачу изделие окажется первого сорта?

Решение. Рассмотрим события:

А изделие, купленное наудачу, первого сорта;

B_1 - изделие произведено на фабрике №1;

Так как событие A может состояться лишь при условии выполнения одной из гипотез B_1 или B_2 , то по формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A).$$

Найдем вероятности гипотез, входящие в эту формулу. Так как на каждые 100 поступивших в магазин изделий 40 изготовлено фабрикой №1 (40%), а остальные 60 – фабрикой №2, то

$$P(B_1) = 40/100 = 0,4;$$

$$P(B_2) = 60/100 = 0,6$$

По условию задачи

$$P_{B_1}(A) = 0,9;$$

$$P_{B_2}(A) = 0,75;$$

Подставляя найденные вероятности в формулу (**), получим:

$$P(A) = 0,4 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,75 = 0,81$$

Вывод формулы Байеса . Примеры.

Задача. Имеется полная группа несовместных гипотез $B_1, B_2, \dots, B_n$, вероятность которых $P(B_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) известных до опыта (вероятности априори). Производится опыт (испытание), в результате которого зарегистрировано появление события A , причем известно, что этому событию наши гипотезы приписывали определенные вероятности $P_i(A)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Тогда вероятность появления события A равна:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Найдем условные вероятности

$$P_A(B_1), P_A(B_2), \dots, P_A(B_n).$$

В соответствии с теоремой умножения условная вероятность $P_A(B_1)$ равна:

$$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A),$$

Тогда
$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

После преобразований получим

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Эти формулы носят название формул Байеса, благодаря которым можно оценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в результате которого появилось событие A .

Примеры. В цехе работают 20 станков, изготавливающих одинаковые детали. Из них 10 станков- 1-го типа, 6 станков – 2-го типа, а остальные – 3-го типа.

Вероятности того, что качество детали окажется отличным на станках этих типов, равны соответственно 0,9, 0,8 и 0,7. Производительность всех типов станков одинакова.

Условная вероятность любой гипотезы B_i
($i=1,2,3,\dots,n$) рассчитывается
следующим образом:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Какова вероятность, что наугад взятая деталь, изготовленная в цехе, окажется отличного качества?

Наугад взятая деталь оказалась отличного качества. Какова вероятность, что она была изготовлена на станке 1-го типа?

Решение.

Обозначим события:

A- наугад взятая деталь отличного качества;

B_1 - наугад взятая деталь изготовлена на станке 1-го типа;

B_2 - наугад взятая деталь изготовлена на станке 2-го типа;

B_3 - наугад взятая деталь изготовлена на станке

3 -го типа;

Так как производительность всех типов станков одинакова, то количество деталей, изготовленных на станках данного типа, пропорционально количеству станков. Поэтому

$$P(B_1) = 10/20 = 0,5;$$

$$P(B_2) = 6/20 = 0,3;$$

$$P(B_3) = 4/20 = 0,2$$

Вероятности $p_{B_i}(A)$ даны в условии

задачи:
 $P_{B_1}(A) = 0,9;$

$$P_{B_2}(A) = 0,8;$$

$$P_{B_3}(A) = 0,7.$$

1. По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) = \\ &= 0,5 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,7 = 0,83; \end{aligned}$$

2. По формуле Байеса получим ответ на второй вопрос

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,9}{0,83} = 0,54.$$