

Постоянные финансовые ренды

Виды потоков платежей

Поток платежей (денежный поток, *cash flow*) – последовательность или ряд платежей во времени: погашение задолженности в рассрочку, выплаты пенсий.

Член потока – отдельный элемент ряда, потока платежей.

Классификация потоков

Регулярные потоки – размеры платежей постоянные или следуют установленному правилу; равные интервалы.

- положительные члены потоков – денежные **поступления**
- отрицательные члены потоков – денежные **выплаты**

Классификация потоков

Финансовая рента (рента, *rent*) – поток платежей, все члены которого – положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы (иногда – **аннуитет, *annuity***).

Параметры ренты:

- член ренты – размер отдельного платежа
- период ренты – временной интервал между последовательными платежами
- срок ренты – время от начала первого периода до конца последнего
- процентная ставка

Классификация финансовых рент

- по количеству выплат
 - годовые – выплата раз в году
 - p -срочные – несколько (p) раз в году

- по значимости периодов ренты
 - дискретные
 - непрерывные

- по числу начислений процентов
 - ренты с ежегодным начислением\
 - ренты с начислением m раз в году

Классификация финансовых рент

○ по величине членов

- постоянные – одинаковые размеры членов ренты
- переменные – члены изменяют свои размеры во времени, следуя какому либо закону, или несистематично

○ по вероятности выплат

- верные – подлежат безусловной уплате
- условные – выплата ставится в зависимость от наступления какого-либо «случайного» события

○ по количеству членов ренты

- ограниченные – срок заранее оговорен
- бесконечные (вечные) – формально не имеют срока

Классификация финансовых рент

- по соотношению начала срока ренты и момента времени, упреждающего начало ренты
 - немедленные
 - отложенные (отсроченные)

- по моменту выплат платежей в пределах периода
 - ренты постнумерандо (обыкновенные) – платежи в конце периодов
 - ренты пренумерандо – платежи в начале периодов

Обобщающие параметры потоков платежей

Наращенная сумма (*amount of cash flows*) – сумма всех членов потока платежей с начисленными на них к концу срока процентами.

Под **современной стоимостью потока платежей (*present value of cash flows*)** понимают сумму всех его членов, дисконтированных на начало срока ренты или некоторый упреждающий момент времени.

Прямой метод расчета наращенной суммы и современной стоимости

○

$$S = \sum_t R_t (1 + i)^{n - n_t}$$

$$A = \sum_t R_t v^{n_t}$$

Наращенная сумма годовой ренты постнумерандо

Пусть в течение n лет в банк в конце каждого года вносится по R рублей. На взносы начисляются сложные проценты по ставке $i\%$ годовых.

Наращенная сумма к концу срока каждого взноса:

$$R(1+i)^{n-1}, R(1+i)^{n-2}, \dots, R(1+i), R.$$

$$S = R \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$S_{n;i} = \sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^t = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Наращенная сумма годовой ренты с начислением m раз в году

Члены ренты с начисленными к процентами:

$$R, R(1 + j/m)^m, R(1 + j/m)^{2m}, \dots, R(1 + j/m)^{(n-1)m}$$

Сумма членов этой прогрессии составляет

$$S = R \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{(1 + j/m)^m - 1} = RS_{mn; j/m}$$

Наращенная сумма p -срочной ренты ($m = 1$)

Если годовая сумма платежей равна R , то каждый раз выплачивается R/p . Общее число членов ренты – np . Первый член ее равен R/p , знаменатель – $(1 + i)^{1/p}$.

Сумма членов этой прогрессии

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1 + i)^{(1/p)n} - 1}{(1 + i)^{1/p} - 1} = R \frac{(1 + i)^n - 1}{p[(1 + i)^{1/p} - 1]}$$

Наращенная сумма
 p -срочной ренты ($p = m$)

○

$$S = \frac{R}{m} \cdot \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{j/m} = R \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{j}$$

Наращенная сумма p -срочной ренты ($p \neq m$)

○

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1 + j/m)^{np \cdot m/p} - 1}{(1 + j/m)^{m/p} - 1} = R \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{p[(1 + j/m)^{m/p} - 1]}$$

Непрерывное начисление процентов

Для годовой ренты:

$$S = R \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1} = RS_{n;\delta}$$

Для p -срочной ренты:

$$S = R \frac{e^{\delta n} - 1}{p(e^{\delta/p} - 1)} = RS_{n;\delta}^{(p)}$$

Современная стоимость постоянной ренты постнумерандо

Современная стоимость потока платежей – сумма дисконтированных членов этого потока на некоторый предшествующий момент времени (капитализированная стоимость; приведенная величина).

Современная стоимость потока платежей **эквивалентна в финансовом смысле** всем платежам, которые охватывает поток.

Годовая рента

Поток дисконтированных платежей:

$$Rv, Rv^2, \dots, Rv^n.$$

Сумма членов геометрической прогрессии:

$$A = R \sum_{t=1}^n v^t = Rv \frac{v^n - 1}{v - 1} = R \frac{1 - v^n}{i} =$$

$$= R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i}.$$

коэффициент приведения ренты

Годовая рента,
начисление процентов m раз в году

○

$$A = R \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{(1 + j/m)^m - 1} = Ra_{mn;j/m}$$

Рента p -срочная ($m = 1$)

○

$$A = \frac{R}{p} \sum_{t=1}^{np} v^{t/p} = R \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{p[(1 + i)^{1/p} - 1]} = Ra_{n;i}^{(p)}$$

Рента p -срочная ($p = m$)

○

$$A = \frac{R}{m} \cdot \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{j/m} =$$
$$= R \cdot \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{j}$$

Рента p -срочная ($p \neq m$)

○

$$A = R \cdot \frac{1 - (1 + j/m)^{-mn}}{p[(1 + j/m)^{m/p} - 1]} =$$
$$= Ra_{mn; j/m}^{(p)}$$

Зависимость между наращенной и современной стоимостью ренты

Для годовых и p -срочных постоянных рент

постнумерандо с ежегодным начислением процентов:

$$\begin{aligned} A(1+i)^n &= R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} (1+i)^n = \\ &= R \frac{(1+i)^n - 1}{i} = S \end{aligned}$$

Для рент с начислением процентов m раз в году имеем:

$$A \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} = S$$

Определение размера члена ренты

Исходные условия: задается S или A и набор параметров, кроме R .

Если рента годовая, постнумерандо, с ежегодным начислением процентов:

$$R = \frac{S}{s_{n;i}}$$

$$R = \frac{A}{a_{n;i}}$$

Расчет срока ренты

Для годовой ренты постнумерандо с ежегодным начислением процентов:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1 + i)}, \quad n = \frac{\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)^{-1}}{\ln(1 + i)}$$

Расчет срока ренты

При расчете срока необходимо принимать во внимание:

1. Расчетные значения, как правило, дробные.
В качестве срока часто удобно принять ближайшее целое число лет (периодов).
2. Если округление производится до меньшего целого, то наращенная сумма или современная стоимость ренты оказывается меньше заданных размеров.
Возникает необходимость в компенсации.

Ренты пренумерандо

Каждый член ренты пренумерандо «работает» на один период больше, чем в ренте постнумерандо:

$$\ddot{S} = S(1 + i)$$

$$\ddot{S}_{n;i} = S_{n;i}(1 + i)$$

Годовая ренты с начислением процентов m раз в году

$$\ddot{S} = S(1 + j/m)^m.$$

Для p -срочных рент, у которых $m = 1$ и $m \neq p$ получим:

$$\ddot{S} = S(1 + i)^{1/p},$$

$$\ddot{S} = S(1 + j/m)^{m/p}.$$

Ренты с выплатами в середине периодов

Для современных стоимостей:

$$A_{1/2} = A(1 + i)^{1/2} \quad \text{при } p = 1, m = 1,$$

$$A_{1/2} = A(1 + i)^{1/2p} \quad \text{при } p > 1, m = 1,$$

$$A_{1/2} = A(1 + j/m)^{m/2} \quad \text{при } p = 1, m > 1,$$

$$A_{1/2} = A(1 + j/m)^{m/2p} \quad \text{при } p > 1, m > 1.$$

Отложенные ренты

Начало выплат у отложенной ренты сдвинуто вперед относительно некоторого момента времени.

$${}_tA = Av^t = Ra_{n;i}v^t$$

где ${}_tA$ – современная стоимость отложенной на t лет ренты.

Вечная рента (*perpetuity*)

- ряд платежей, количество которых не ограничено – теоретически она выплачивается в течение бесконечного числа лет.

Наращенная сумма вечной ренты равна бесконечно большой величине.

Современная стоимость ренты:

$$A_{\infty} = \frac{R}{i}$$

Рента с периодом платежей, превышающим год

Пусть r – временной интервал между двумя членами ренты, проценты начисляются 1 раз в году.

Поток дисконтированных платежей:

$$Tv^r, Tv^{2r}, \dots, Tv^n$$

Сумма членов прогрессии при условии, что $T = 1$, равна:

$$a_{r;i} = v^r \frac{v^{r\left(\frac{n}{r}\right)} - 1}{v^r - 1} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{(1 + i)^r - 1} = \frac{a_{n;i}}{s_{r;i}}$$

Спасибо за внимание!