Лекция 1
Гидродинамика идеальной жидкости

Содержание

1. Модель идеальной жидкости (газа).
2. Уравнение неразрывности.
3. Уравнение Эйлера.
4. Учет массовых сил. Частные случаи.

1. Модель идеальной жидкости (газа)

1) Пространственные масштабы движения молекул

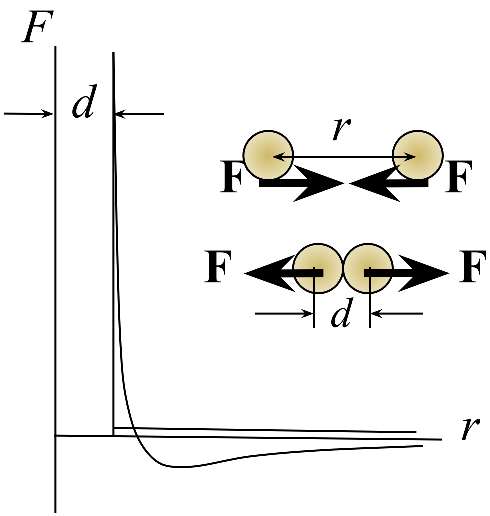
Отправная точка изучения динамических процессов в веществе – данные о структурных единицах (атомах и молекулах), особенностях их взаимодействия и движения

По современным представлениям

- размеры ядер атомов $R_{я} \sim 10^{-13}$ см
- размеры молекул (атомов) $R_{м} \sim 10^{-8}$ см
- число молекул газа в нормальных условиях в области размером 10^{-6} см $N \sim 10^{19}$ (даже в условиях разрежения на Луне концентрация молекул $N \sim 10^{10}$ см$^{-3}$)
- число соударений молекул газа при нормальных условиях за 1 сек $Z \sim 10^{10}$
- отношение плотности железа ρ к плотности ядер его атомов $\rho_{я}$ величина порядка 10^{-14}

Вещество в подавляющей части своего объема занято пустотой, где есть место для теплового хаотического движения и взаимного перемещения молекул. В этих микрообластях при обычных условиях происходит взаимодействие огромного числа молекул

2) Межмолекулярное взаимодействие – прямое следствие того, что атомы и молекулы состоят из заряженных частиц



Силы Ван-дер-Ваальса парного взаимодействия молекул

Силы Ван-дер-Ваальса межмолекулярного взаимодействия имеют электрическую природу

$$\boxed{F = -\frac{\partial U}{\partial r}, \; U = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^{6}}}$$

U – потенциал Ленарда-Джонса

3) **Макроскопическое проявление сил Ван-дер-Ваальса**

Ван-дер-Ваальсовы силы отталкивания
- проявляются при сжатии жидкостей и твердых тел
- ответственны за передачу воздействия от одних частей вещества другим

Ван-дер-Ваальсовы силы притяжения
- обнаруживаются при растяжении твердых тел
- предопределяют поверхностное натяжение жидкостей, адгезионное сцепление между телами
- являются первопричиной возникновения трения и вязкости

Силы притяжения выражены заметно слабее и в кинетической теории газов ими пренебрегают, рассматривая взаимодействие молекул как простое контактное взаимодействие абсолютно жестких шаров (модель идеального газа).

4) Текучесть жидкостей газов

Свойство текучести, отличающее жидкости и газы от твердых тел, объясняется способностью их молекул сравнительно легко менять своих соседей. Текучесть газов и жидкостей, позволяет рассматривать динамическое поведение этих веществ без учета сил притяжения молекул в рамках единой модели − *модели идеальной жидкости*.

Количественный показатель текучести – среднее время оседлого образа жизни молекул τ (для жидкостей обычно $\tau \sim 10^{-10} - 10^{-12}$ сек). Текучесть проявляется в масштабах времени $t > \tau$. При $t < \tau$ жидкость можно рассматривать как абсолютно жесткое тело. Этот факт в гидродинамике выражает *аксиома замороженности* (*отвердевания*). Благодаря ей феноменологические характеристики жидкости можно применять не только в статическом, но и динамическом состоянии, придавая им смысл мгновенных (на рассматриваемый момент времени) значений.

5) Гипотеза сплошности, нерелятивистский подход

Исключая космические масштабы, течения жидкостей происходят обычно со скоростями $v \ll c$, c − скорость света. Соответственно, пространство полагается евклидовым, а время абсолютным: ньютоновскую механику правомерно распространить на течения жидкости. Любую выделенную часть жидкости необходимо при этом рассматривать как макроскопический объект.

Другое важное обстоятельство: как типично макроскопическое явление, мы рассматриваем течение на феноменологической основе, характеризуя жидкость набором измеряемых на опыте параметров. Количество молекул, даже в микроскопических, но заметно превышающих размеры молекул объемах, остается огромным. Поэтому, принимая такие объемы жидкости за элементарные (дифференциально малые) объемы, можно игнорировать дискретную (молекулярную) структуру вещества, полагая его непрерывно распределенным по всей среде. Данное положение известно как *гипотеза сплошности.*

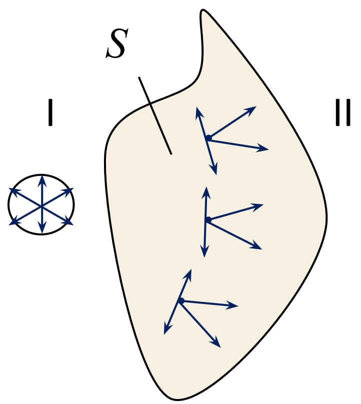
Гипотеза сплошности - основание для применения математического аппарата классического анализа, в котором идея непрерывности занимает одно из центральных мест. На ее основе в качестве локальной (определяемой в точке **r**) характеристики распределения вещества вводится *плотность* ρ

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{dm}{dV}, \quad M = \int_V \rho \, dV}$$

В модели идеальной жидкости наряду с плотностью в качестве характеристики передачи воздействия от одной части жидкости к другой рассматривается *давление* P. Давление − это поверхностно распределенная сила, которая характеризует реакцию среды на сжатие. В этом контексте ее применение при описании течения жидкостей имеет логическое обоснование:

1) в идеальной жидкости взаимодействие молекул сводится к чисто контактному – по определению является близкодействующим

2) силовое воздействие от одной части жидкости к другой передается по разграничивающей поверхности и приходится рассматривать силы, распределенные по Поверхности



3) по причине текучести и отсутствия (как в твердых телах) дальнего порядка в расположении молекул передача силового воздействия в жидкостях происходит одинаково по всем направлениям (*закон Паскаля*)

4) в любой точке разграничительной поверхности *S* результирующее действие со стороны части I жидкости на часть II образуется при взаимной компенсации тангенциальных проекций сил полусферы (обращена в сторону части жидкости, на которую оказывается воздействие) сложением только нормальных проекций воздействие от одной части жидкости другой передается по нормали к разграничительной поверхности.

6. Описание течений по Эйлеру и Лагранжу

Лагранж: текущая жидкость рассматривается как совокупность $N\gg1$ частиц (микрокапелек жидкости). Для каждой из них составляется по Ньютону уравнение движения

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j\neq i}\mathbf{F}_{ij}$$

$\mathbf{F}_{ij}$- сила, действующая на частицу со стороны со стороны соседней частицы номера j

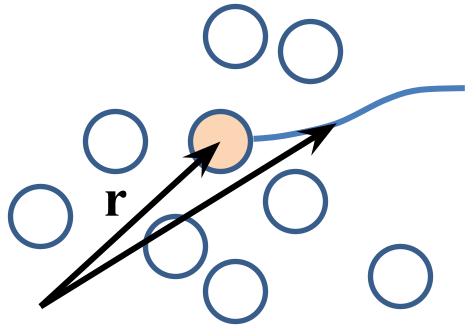
Компьютерные технологии, «метод частиц»

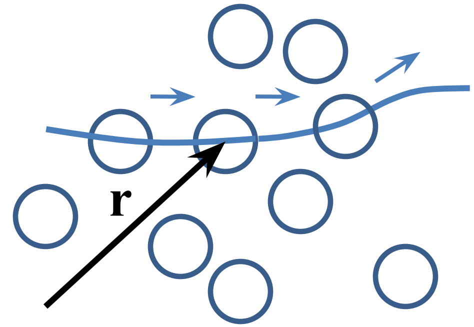
Эйлер предложил определять скорость течения в данной точке, независимо от того какие частицы жидкости проходят со временем через эту точку

$\Downarrow$

Образуется поле скоростей $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, привязанных не к частицам, а к точкам пространства, в котором существует течение

$\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ - нестационарное течение
$\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{r})$ - стационарное течение





Подход Лагранжа – меняется радиус-вектор выделенной частицы

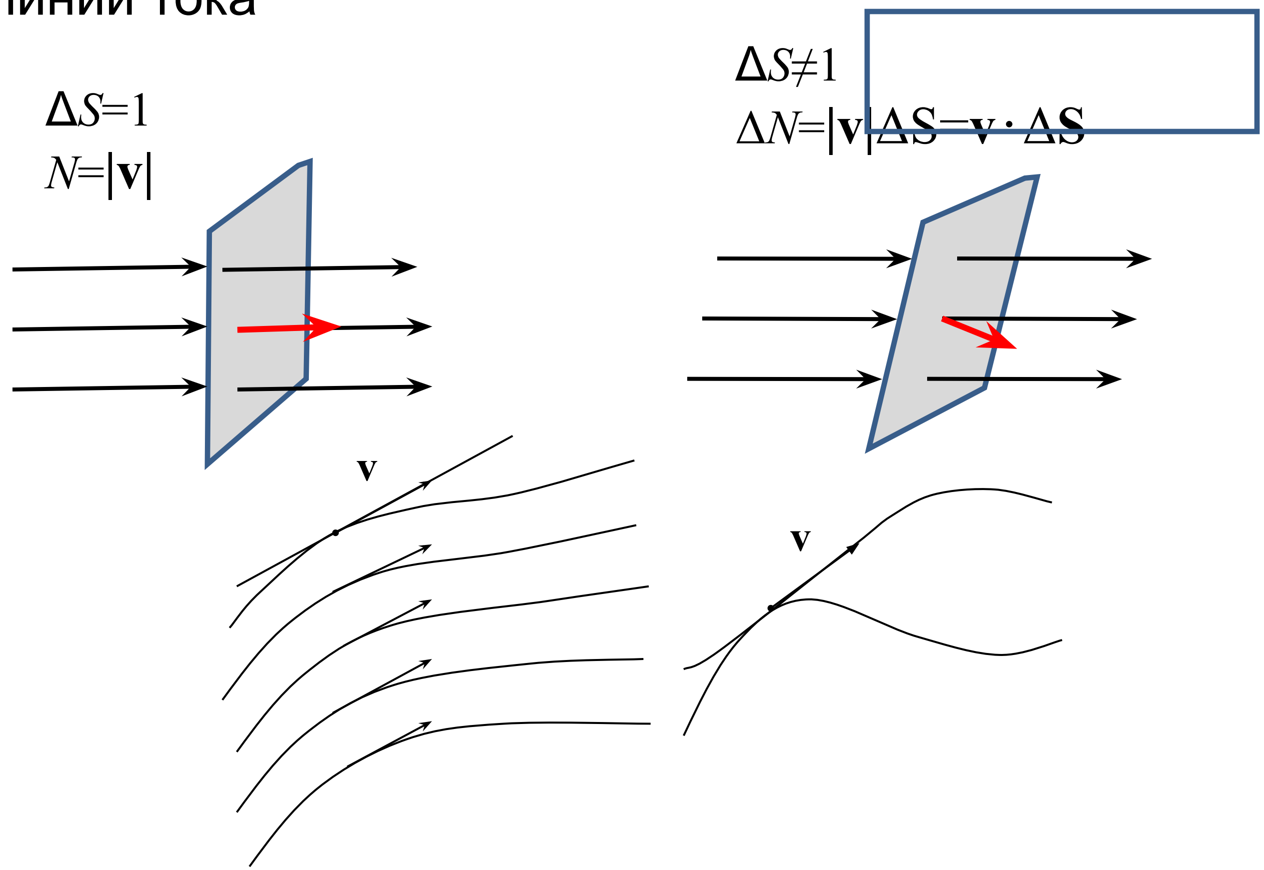
Подход Эйлера: радиус-вектор выделенной точки пространства не меняется. Через эту точку проходят разные частицы.

7. Графика представления течений

В подходе Лагранжа течение изображается набором траекторий частиц

В подходе Эйлера течение изображается линиями тока – кривыми, касательные к которым задают направление вектора скорости в точке касания (это точка пространства или плоскости, а не точка местонахождения выделенной частицы жидкости)

В отношении поля скоростей действует правило «густоты» линий тока



Линии тока и касательная (штриховая прямая) к одной из них. Стрелки –векторы скорости течения. Справа: траектория частицы (штриховая –кривая) и линия тока (сплошная кривая) нестационарного течения – жидкости в момент времени когда частица находится на линии тока.

2. Уравнение неразрывности

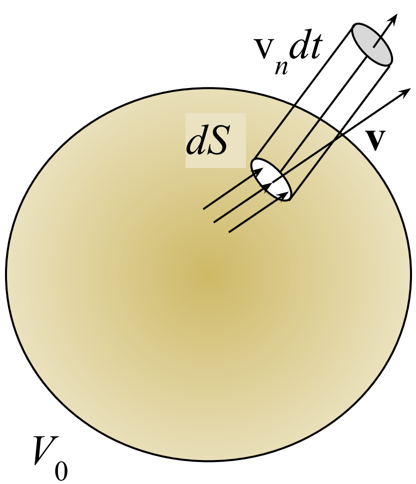
Полное описание течения

$$\begin{cases} \mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{r},t) \\ P=P(\mathbf{r},t) \\ \rho=\rho(\mathbf{r},t) \end{cases}$$

$P=P(\mathbf{r},t)$ и $\rho=\rho(\mathbf{r},t)$ связаны уравнением состояния идеального газа

$$PV=\frac{m}{\mu}RT \Rightarrow \boxed{P \cong \rho T}$$

Для исключения $T=T(\mathbf{r},t)$ нужно определиться с характером термодинамического процесса течения – изоэнтропийный (в идеальной жидкости не учитываются процессы переноса), когда $P=P(\rho)$. Достаточно знания $P=P(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$



$$M=\int_{V_0}\rho\, dV \Rightarrow -\frac{dM}{dt}=\int_{V_0}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV$$

$$dm=\rho\mathbf{v}d\mathbf{S}dt \Rightarrow \frac{dM}{dt}=\oint_S \rho\mathbf{v}d\mathbf{S}$$

масса вытекшей за dt жидкости через $d\mathbf{S}$

По теореме Гаусса-Остроградского

$$\frac{dM}{dt} = \oint_S \rho \mathbf{v} d\mathbf{S} = \int_{V_0} \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) dV$$

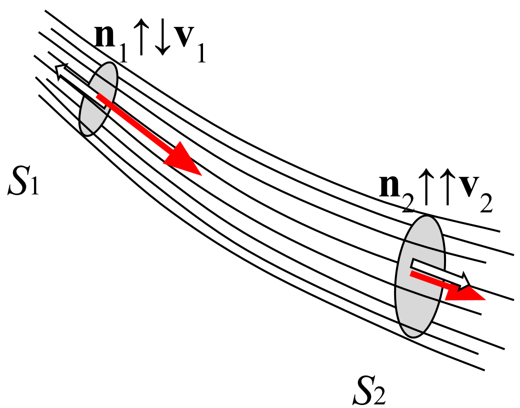
Уравнение неразрывности

$$\int_{V_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) \right] dV = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0}$$

$\mathbf{j}=\rho\mathbf{v}$ – вектор плотности тока жидкости

Условие $\mathrm{div}\mathbf{j}\neq 0$ свидетельствует о наличии источников или стоков потока жидкости. Уравнение неразрывности показывает, что таковые возникают локально, если в процессе течения изменяется плотность ($\partial\rho/\partial t\neq 0$) жидкости. В случае несжимаемой жидкости $\partial\rho/\partial t=0$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{div}\mathbf{j}=0$ - свидетельство замкнутости (неразрывности) линий тока или способности их идти из/в бесконечность – замыкаться на бесконечности.

Для струйного течения несжимаемой жидкости

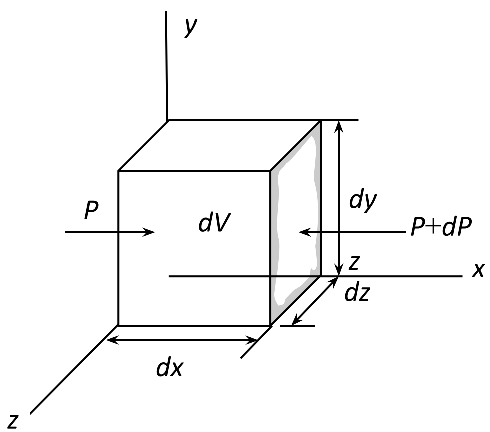


$S_1\, \mathrm{v}_1\, \Delta t \rho$ количество втекшей жидкости

$S_2\, \mathrm{v}_2\, \Delta t \rho$ количество вытекшей жидкости

$$\boxed{S\, \mathrm{v} = const}$$

3. Уравнение Эйлера



$$dF_x = [P-(P+dP)]dydz = -dPdydz$$

$$dP = (\partial P/\partial x)dx$$

$$dF_x = -\frac{\partial P}{\partial x}\underbrace{dxdydz}_{dV}$$

$$dF_x = -\frac{\partial P}{\partial x}dV \qquad dF_y = -\frac{\partial P}{\partial y}dV \qquad dF_z = -\frac{\partial P}{\partial z}dV$$

$$d\mathbf{F} = -(\mathrm{grad}\,P)dV \qquad d\mathbf{F} = \rho dV\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

по 2-ому закону Ньютона

$$\boxed{\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathrm{grad}\,P} \Rightarrow$$

Так как

$$d\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}dt + \left(dx\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right).$$

$$dx\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + dy\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + dz\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = (d\mathbf{r}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{v}\,.$$

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}dt + (d\mathbf{r}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{v} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}P}$$

3. Учет массовых сил. Частные случаи.

Одним из способов расширения модельных представлений о течении жидкости является учет действия внешних сил: силы тяготения, силы инерции (возникают из-за неравномерного движения тел в жидкости или вращения масс жидкостей), кулоновские силы в электропроводящих жидких средах типа плазмы и т.д. Конкретный характер проявления таких сил вытекает из физической сущности рассматриваемой задачи. Однако общим для них признаком является способность обнаруживаться в той или иной мере в каждой точке жидкости, иначе говоря, – действовать на каждую единицу массы жидкости. В гидродинамике они, поэтому, называются *массовыми силами*.

Схема учета массовых сил: $\mathbf{F} \to \mathbf{F} + \mathbf{F}_m$

$$d\mathbf{F} = \rho dV \frac{d\mathbf{v}}{dt} \to d\mathbf{F} + d\mathbf{F}_m = \rho dV \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\mathbf{F}}{dV} + \frac{d\mathbf{F}_m}{dV} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$d\mathbf{F}/dV \to -\mathrm{grad}P,\quad d\mathbf{F}_m/dV \to \boldsymbol{f} \quad \text{и} \quad d\mathbf{v}/dt \to \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{v}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{\mathbf{f}}{\rho}}$$

Модифицированное уравнение Эйлера, $\mathbf{f}$ − плотность массовой силы.

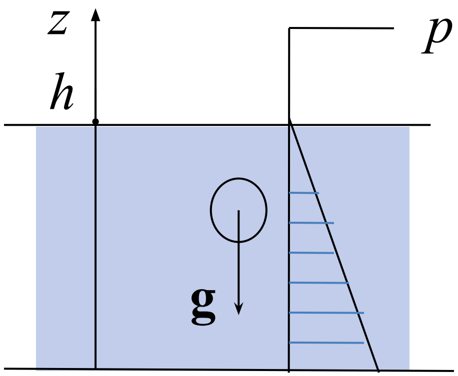
Течение жидкости в однородном поле тяготения Земли

$\mathbf{f}$ − сила тяжести, действующая на единичный объем жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \mathbf{g}$$

$\mathbf{f}=\rho\mathbf{g}$

В статическом случае $\mathbf{v}=0$ имеем $-\dfrac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \mathbf{g} = 0$



$$\mathrm{grad}P = dP/dz \rightarrow -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} - g = 0$$

$$p\big|_{z=h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \rho g(h - z)}$$

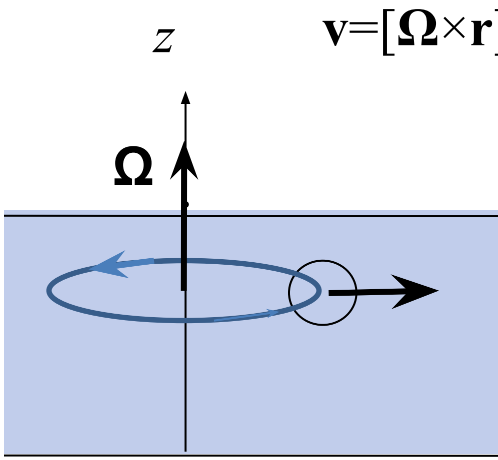
Гидродинамическое изменение давления $\Delta p = \rho \mathbf{v}^2/2$ будет снижать давление *p* на элемент в месте его нахождения,

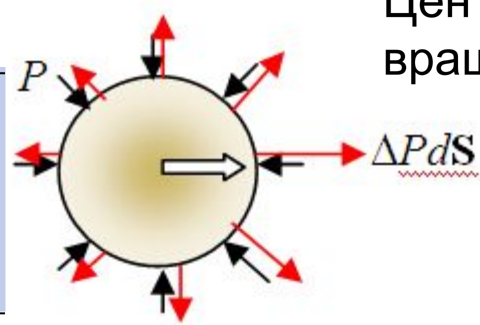
Вращающаяся жидкость

p - силовое воздействие на элемент со стороны окружающих частей жидкости.

Центробежную силу развивает вращаясь сам элемент

$\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]$





$p \rightarrow p - \rho \mathbf{v}^2/2$

или

$p \rightarrow p - \rho[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}]^2/2$

Центробежная сила инерции

Наряду с центробежной силой во вращающейся жидкости проявится также сила Кориолиса. В механике материальной точки для силы Кориолиса известно следующее выражение: $\mathbf{F}_K = -2m[\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}]$.

Для единичного объема жидкости массу $m \to \rho$, $\mathbf{v}$ − скорость течения жидкости. Плотность силы Кориолиса $\mathbf{f}_K = -2\rho[\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}]$ будет добавляться к массовой силе тяготения $\boldsymbol{f} = \rho\mathbf{g}$.

Полная запись уравнения Эйлера для вращающейся жидкости

$$\boxed{\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(p - \rho\frac{[\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}]^2}{2}\right) + \mathbf{g} - 2[\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}]}$$

Область приложений: расчета течений воздушных масс во вращающейся атмосфере Земли (метеорология).