

Задача

Частица находится в состоянии с определённым моментом орбитального импульса $j=l=1$ и определённой проекцией момента импульса на направление

$$\vec{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$$

Измеряется проекция момента импульса на ось Ox . Найти возможные значения указанной проекции, получаемые в результате эксперимента и вероятности их измерения.

Решение в обозначениях Дирака

Кет-вектор состояния частицы

$$|j=l=1, j_n = l_n = 1\rangle \equiv |l_n = 1\rangle$$

Собственные кет-векторы оператора $\hat{j}_x = \hat{l}_x$

$$|l=1, l_x\rangle \equiv |l_x\rangle$$

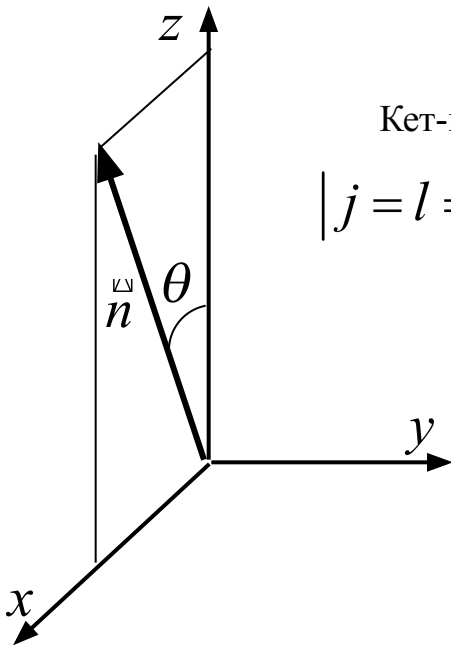
Уравнения на собственные значения

$$\hat{l}_n |l_n\rangle = l_n |l_n\rangle, \quad \hat{l}_x |l_x\rangle = l_x |l_x\rangle$$

Принцип суперпозиции

$$|l_n = 1\rangle = \sum_{l'_x} C_{l'_x} |l'_x\rangle$$

Вероятность измерить значение l_x равна $w(l_x) = |C_{l_x}|^2$



Формальное решение в обозначениях Дирака

Домножим на бра-вектор

$$\langle l_x | l_n = 1 \rangle = \sum_{l'_x} C_{l'_x} \langle l_x | l'_x \rangle = \sum_{l'_x} C_{l'_x} \cdot \delta_{l_x l'_x} = C_{l_x}$$

Осталось придать смысл значкам

$$\hat{l}_x, \quad \hat{l}_n = \begin{pmatrix} \text{матрица} \\ l n \end{pmatrix}, \quad |l_n = 1\rangle, \quad |l_x\rangle$$

и решить уравнения на собственные значения

$$\begin{pmatrix} \text{матрица} \\ l n \end{pmatrix} |l_n\rangle = l_n |l_n\rangle, \quad \hat{l}_x |l_x\rangle = l_x |l_x\rangle$$

Надо выбрать наиболее адекватное представление!

В координатном представлении уравнения на собственные значения являются дифференциальными уравнениями. Но нас и не интересуют плотности распределения вероятностей в угловом пространстве.

Будем работать в матричном l_z -представлении.

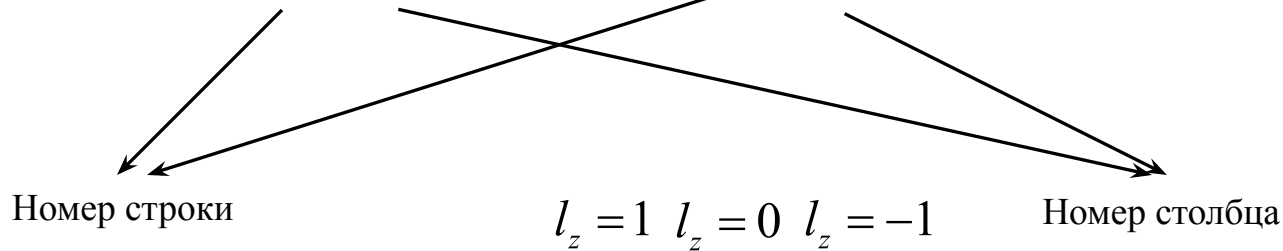
Матрицы операторов $\hat{l}_i, \left(\hat{l}^2\right)$ в случае $l=1$

Упрощение обозначений

$$\langle l, l_z | \hat{l}_z | l, l'_z \rangle \equiv \langle l_z | \hat{l}_z | l'_z \rangle, \quad \langle l, l_z | \hat{l}^2 | l, l'_z \rangle \equiv \langle l_z | \hat{l}^2 | l'_z \rangle$$

Матричные элементы $\hat{l}_z, \hat{l}^2$ в собственном представлении

$$\langle l_z | \hat{l}_z | l'_z \rangle = l_z \cdot \delta_{l_z l'_z}, \quad \langle l_z | \hat{l}^2 | l'_z \rangle = l(l+1) \cdot \delta_{l_z l'_z}$$



$$\begin{matrix} l_z = 1 \\ l_z = 0 \\ l_z = -1 \end{matrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}$$

Найти матрицы?

ОТВЕТ

$$\langle l_z | \hat{l}_z | l'_z \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \langle l_z | \hat{l}^2 | l'_z \rangle = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матричные элементы $\hat{l}_{x,y}$ в l_z — представлении

Сначала построим матрицы повышающего и понижающего операторов

Общая формула

$$\langle jj_z | \hat{j}_+ | jj_z - 1 \rangle = \langle jj_z - 1 | \hat{j}_- | jj_z \rangle = \sqrt{(j + j_z)(j - j_z + 1)}$$

Перебираем все возможные значения

$$j = l = 1, \quad j_z = l_z = 0, \pm 1$$

Найти матрицы?

Ответ

$$\langle l_z | \hat{l}_+ | l_z - 1 \rangle = \langle l_z - 1 | \hat{l}_- | l_z \rangle = \sqrt{(1 + l_z)(1 - l_z + 1)}$$

$$\hat{l}_+ = \hat{l}_x + i\hat{l}_y, \quad \hat{l}_- = \hat{l}_x - i\hat{l}_y$$

$$\langle l_z | \hat{l}_+ | l'_z \rangle = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle l_z | \hat{l}_- | l'_z \rangle = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицы $\hat{l}_{x,y}$?

Ответ

$$\langle l_z | \hat{l}_x | l'_z \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle l_z | \hat{l}_y | l'_z \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу $\hat{l}_n = \begin{pmatrix} \text{---} & \text{---} \\ l & n \end{pmatrix}$

Матрица $\hat{l}_n = \begin{pmatrix} \hat{l}_x \\ \hat{l}_y \\ \hat{l}_z \end{pmatrix}$

$$\hat{l}_n = \begin{pmatrix} \hat{l}_x \\ \hat{l}_y \\ \hat{l}_z \end{pmatrix} = \sin \theta \cdot \hat{l}_x + \cos \theta \cdot \hat{l}_z$$

$$\langle l_z | \begin{pmatrix} \hat{l}_x \\ \hat{l}_y \\ \hat{l}_z \end{pmatrix} | l'_z \rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Найти решение задачи на собственные значения?

Решение задачи на собственные значения

$$\begin{pmatrix} l_n \\ l_n \\ l_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = l_n \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot (\cos \theta - l_n) \cdot a + \sin \theta \cdot b + 0 \cdot c = 0 \\ \sin \theta \cdot a - \sqrt{2} \cdot l_n \cdot b + \sin \theta \cdot c = 0 \\ 0 \cdot a + \sin \theta \cdot b - \sqrt{2} \cdot (\cos \theta + l_n) \cdot c = 0 \end{cases}$$

Детерминант?

Детерминант

$$l_n^2 (\cos^2 \theta - l_n^2) + l_n^2 \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow l_n^2 = 0, \pm 1$$

Собственные векторы?

Собственные векторы

$$l_n = 1$$

Система

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot (\cos \theta - 1) \cdot a + \sin \theta \cdot b = 0 \\ \sin \theta \cdot b - \sqrt{2} \cdot (\cos \theta + 1) \cdot c = 0 \end{cases}$$

Полезные тождества

$$1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

Собственные векторы?

Вспомогательные формулы

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot (\cos \theta - 1) \cdot a + \sin \theta \cdot b = 0 \\ \sin \theta \cdot b - \sqrt{2} \cdot (\cos \theta + 1) \cdot c = 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \cdot b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cot \frac{\theta}{2} \cdot b$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \cdot b = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan \frac{\theta}{2} \cdot b$$

Собственные векторы. Продолжение

$$l_n = 1$$

$$\langle l_z | l_n = 1 \rangle \Rightarrow |l_n = 1\rangle = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$|l_n = 0, -1\rangle = ?$$

Собственные векторы. Продолжение

$$l_n = 1$$

$$|l_n = 1\rangle = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$l_n = 0$$

$$|l_n = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \sqrt{2} \cdot \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

Проверить ортогональность?

$$l_n = -1$$

$$|l_n = -1\rangle = \begin{pmatrix} -\sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ -\cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Вспоминаем, зачем всё это надо

$$|l_n = 1\rangle = \sum_{l'_x} C_{l'_x} |l'_x\rangle, \quad C_{l'_x} = \langle l'_x | l_n = 1 \rangle$$

Надо найти $\langle l_x | = (|l_x\rangle)^\dagger$

Собственные векторы оператора проекции на ось Ox

$$|l_x\rangle = \left| l_n \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) \right\rangle$$

$$l_x = 1$$

$$l_x = 0$$

$$l_x = -1$$

$$|l_x = 1\rangle = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|l_x = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|l_x = -1\rangle = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C_{l_x} = \langle l_x | l_n = 1 \rangle = ?$$

ОТВЕТ

$$C_1 = \langle l_x = 1 | l_n = 1 \rangle = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin \theta + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] = \frac{1}{2} \cdot [1 + \sin \theta]$$

$$C_{-1} = \langle l_x = -1 | l_n = 1 \rangle = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot [\sin \theta - 1]$$

$$C_0 = \langle l_x = 0 | l_n = 1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos \theta$$

ЗАДАЧИ

10.1. Написать матрицы операторов $\hat{\mathbf{J}}^2$, $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$, $\hat{J}_z$, $\hat{J}_+$, $\hat{J}_-$ для случая $j = \frac{3}{2}$.

10.2. Найти среднее значение проекции момента на направление $\mathbf{n}$ в состоянии $|jm\rangle$, где m есть проекция момента на ось z .

10.3. Найти средние значения величин J_x^2 , J_y^2 в следующих состояниях:

а) $j = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$; б) $j = 1$, $m = 0$; в) $j = 1$, $m = -1$; г) $j = \frac{3}{2}$, $m = \frac{3}{2}$.

10.4. Найти дисперсии величин J_x и J_y в состояниях:

а) $j = 1$, $m = 0$; б) $j = 1$, $m = 1$; в) $j = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$.