



# Задачи о распределении ресурсов

# Линейное программирование

*Характерные черты задач линейного программирования:*

- 1) показатель оптимальности представляет собой *линейную* функцию от элементов решения  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;
- 2) ограничительные условия, налагаемые на возможные решения, имеют вид *линейных* равенств или неравенств

# Общая постановка задачи планирования производства

**Определить** план производства одного или нескольких видов продукции, обеспечивающий наиболее рациональное использование имеющихся материальных, финансовых и других видов ресурсов.

Такой план должен быть оптимальным с точки зрения выбранного критерия: максимум прибыли, минимум затрат на производство и т. д.

# Задача о распределении ресурсов

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m; \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

$n$  — число выпускаемых продуктов;

$m$  — количество используемых производственных ресурсов  
(например, производственные мощности, сырье, рабочая сила);

$a_{ij}$  — объем затрат ресурса  $i$  на выпуск единицы продукта  $j$ ;

$c_j$  — прибыль от выпуска и реализации единицы продукта  $j$ ;

$b_i$  — количество имеющегося ресурса  $i$ ;

$x_j$  — *переменная* — объем выпуска продукта  $j$ ;

Эта задача линейного программирования в стандартной форме *на максимум*.

# Пример 1

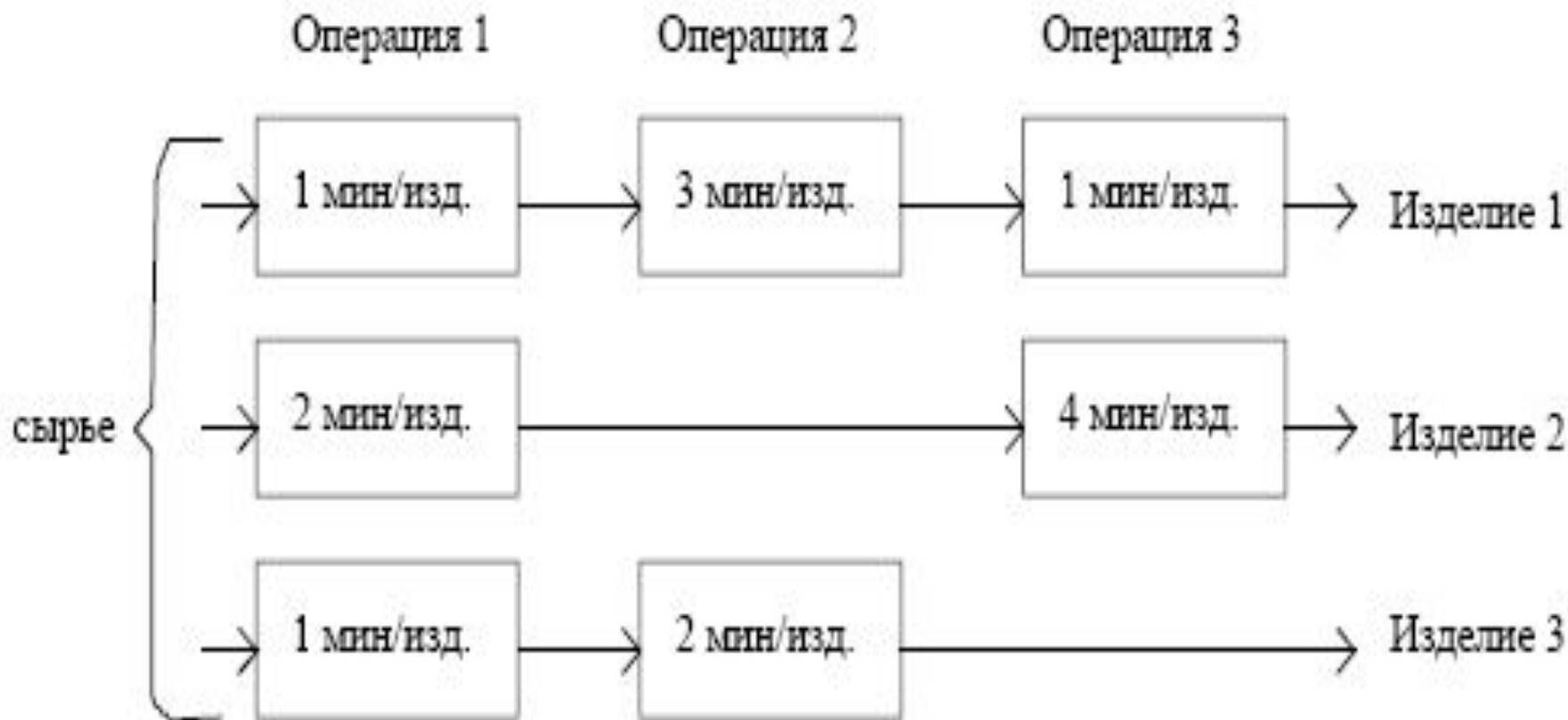
Фирма выпускает три вида изделий. В процессе производства используются три технологические операции.

Затраты времени на каждую операцию для каждого изделия указаны на технологической схеме.

Фонд рабочего времени ограничен следующими предельными значениями: для 1 операции – 430 мин, для 2 операции – 460 мин, для 3 операции – 420 мин. Ожидаемая прибыль от продажи одного изделия видов 1, 2 и 3 составляет 3, 2 и 5 ден. ед. соответственно.

Определить наиболее выгодный суточный объем производства каждого вида продукции.

# Технологическая схема производства



# Построение математической модели задачи

## 1. *Что является искомыми величинами задачи?*

Искомые величины являются *переменными* задачи:

$x_1$  – объем производства изделия 1,

$x_2$  – объем производства изделия 2,

$x_3$  – объем производства изделия 3.

## 2. *Какова цель решения?*

*Какой параметр задачи служит критерием эффективности (оптимальности) решения?*

*В каком направлении должно изменяться значение этого параметра (к max или к min)?*

Цель решения записывается в виде *целевой функции*

# Построение математической модели задачи

Цель решения – максимизация прибыли.

*Целевая функция:*

$$Z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

3. *Какие условия в отношении искомых величин и ресурсов задачи должны быть выполнены?*

Условия, налагаемые на переменные и ресурсы задачи, записываются в виде системы **ограничений**.

Возможные объемы  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  ограничиваются фондом рабочего времени по каждой операции:

- использование фонда рабочего времени на операции 1(мин):  
 $1x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 430$ ;
- использование фонда рабочего времени на операции 2(мин):  $3x_1 + 2x_3 \leq 460$ ;
- использование фонда рабочего времени на операции 3(мин):  $1x_1 + 4x_2 \leq 420$ ;
- объемы производства компьютеров не могут быть отрицательными
- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

# Модель задачи

$$Z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

$$1x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 460$$

$$1x_1 + 4x_2 \leq 420$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Arial Cyr

	A	B	C	D	E	F	G
1	№	Ресурс рабочего времени, мин	Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	Использ. ресурса	Наличие ресурсов
2	1	на операции 1	1	2	1		430
3	2	на операции 2	3	0	2		460
4	3	на операции 3	1	4	0		420
5						Общая прибыль, руб.	
6		Прибыль на единицу, ден. ед.	3	2	5		
7		Количество единиц продукции					
8							

Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка Введите вопрос

Σ Arial Cyr 10 Ж К Ч

СУММПРОИЗВ X ✓ fx =СУММПРОИЗВ(C2:E2;C7:E7)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	№	Ресурс рабочего времени, мин	Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	Использ. ресурса	Наличие ресурсов	
2	1	на операции 1	1	2	1	=СУММПРОИЗВ(C2:E2;C7:E7)		
3	2	на операции 2	3	0	2	СУММПРОИЗВ(массив1; [массив2]; [массив3]; [массив4]; ...)		
4	3	на операции 3	1	4	0		420	
5						Общая прибыль, руб.		
6		Прибыль на единицу, ден. ед.	3	2	5			
7		Количество единиц продукции						
8								
9								
10								

Лист1 / Лист2 / Лист3

Правка NUM

Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

Σ Arial Cyr 10 Ж К Ч

СУММПРОИЗВ X ✓ fx =СУММПРОИЗВ(С6:Е6;С7:Е7)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	№	Ресурс рабочего времени, мин	Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	Использ. ресурса	Наличие ресурсов	
2	1	на операции 1	1	2	1	0	430	
3	2	на операции 2	3	0	2		460	
4	3	на операции 3	1	4	0		420	
5						Общая прибыль, руб.		
6		Прибыль на единицу, ден. ед.	3	2	5	=СУММПРОИЗВ(С6:Е6;С7:Е7)		
7		Количество единиц продукции				СУММПРОИЗВ(массив1; [массив2]; [массив3]; [массив4]; ...)		
8								
9								
10								

Лист1 / Лист2 / Лист3

Правка

NUM

## Поиск решения



Установить целевую ячейку:

Выполнить

Равной:  максимальному значению

значению:

Закреть

минимальному значению

Изменяя ячейки:



Предположить

Ограничения:

Добавить

Изменить

Удалить

Параметры

Восстановить

Справка



F6    =СУММПРОИЗВ(C6:E6;C7:E7)

	A	B	C	D	E	F	G
1	№	Ресурс рабочего времени, мин	Изделие 1	Изделие 2	Изделие 3	Использ. ресурса	Наличие ресурсов
2	1	на операции 1	1	2	1	0	430
3	2	на операции 2	3	0	2		460
4	3	на операции 3	1	4	0		420
5						Общая прибыль, руб.	
6		Прибыль на единицу, ден. ед.	3	2	5	0	
7		Количество единиц продукции					
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							

## Поиск решения

Установить целевую ячейку:

\$F\$6

Выполнить

Равной:  максимальному значению значению:

0

Закреть

 минимальному значению

Изменяя ячейки:

\$C\$7:\$E\$7

Предположить

Ограничения:

\$F\$2:\$F\$4 &lt;= \$G\$2:\$G\$4

Добавить

Изменить

Удалить

Параметры

Восстановить

Справка

## Параметры поиска решения

Максимальное время:  секунд

ОК

Предельное число итераций:

Отмена

Относительная погрешность:

Загрузить модель...

Допустимое отклонение:  %

Сохранить модель...

Сходимость:

Справка

Линейная модель

Автоматическое масштабирование

Неотрицательные значения

Показывать результаты итераций

Оценки

Разности

Метод поиска

линейная

прямые

Ньютона

квадратичная

центральные

сопряженных градиентов



# Задачи анализа чувствительности оптимального решения

## 1. Анализ сокращения или увеличения ресурсов:

- на сколько можно увеличить запас *дефицитного* ресурса для улучшения оптимального значения целевой функции?
- на сколько можно уменьшить запас *недефицитного* ресурса при сохранении оптимального значения целевой функции?

## 2. Увеличение запаса какого из ресурсов наиболее выгодно?

## 3. Анализ изменения коэффициентов целевой функции:

каков диапазон изменения коэффициентов целевой функции, при котором не меняется оптимальное решение?

# Отчет по результатам

A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам					
2	Рабочий лист: [Книга1]Лист1					
3	Отчет создан: 08.09.2010 18:54:20					
4						
5						
6	Целевая ячейка (Максимум)					
7	<b>Ячейка</b>	<b>Имя</b>	<b>Исходное значение</b>	<b>Результат</b>		
8	\$F\$7	количество ед продукции Общая прибыль, д.е	0	1350		
9						
10						
11	Изменяемые ячейки					
12	<b>Ячейка</b>	<b>Имя</b>	<b>Исходное значение</b>	<b>Результат</b>		
13	\$C\$7	количество ед продукции Изделие 1	0	0		
14	\$D\$7	количество ед продукции Изделие 2	0	100		
15	\$E\$7	количество ед продукции Изделие 3	0	230		
16						
17						
18	Ограничения					
19	<b>Ячейка</b>	<b>Имя</b>	<b>Значение</b>	<b>Формула</b>	<b>Статус</b>	<b>Разница</b>
20	\$F\$2	на операции 1 Использование ресурса	430	\$F\$2<=\$G\$2	связанное	0
21	\$F\$3	на операции 2 Использование ресурса	460	\$F\$3<=\$G\$3	связанное	0
22	\$F\$4	на операции 3 Использование ресурса	400	\$F\$4<=\$G\$4	не связан.	20
23						
24						
25						
26						

# Отчет по устойчивости

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости								
2	Рабочий лист: [Книга1]Лист1								
3	Отчет создан: 08.09.2010 18:54:21								
4									
5									
6	Изменяемые ячейки								
7			Результ.	Нормир.	Целевой	Допустимое	Допустимое		
8	Ячейка	Имя	значение	стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение		
9	\$C\$7	количество ед продукции Изделие 1	0	-4	3	4	1E+30		
10	\$D\$7	количество ед продукции Изделие 2	100	0	2	8	2		
11	\$E\$7	количество ед продукции Изделие 3	230	0	5	1E+30	2,666666667		
12									
13	Ограничения								
14			Результ.	Теневая	Ограничение	Допустимое	Допустимое		
15	Ячейка	Имя	значение	Цена	Правая часть	Увеличение	Уменьшение		
16	\$F\$2	на операции 1 Использование ресурса	430	1	430	10	200		
17	\$F\$3	на операции 2 Использование ресурса	460	2	460	400	20		
18	\$F\$4	на операции 3 Использование ресурса	400	0	420	1E+30	20		
19									
20									
21									

1. **Результирующее значение** - оптимальные значения переменных решения.
2. **Нормированная стоимость** показывает, на сколько изменится значение целевой функции в случае принудительного включения единицы этой продукции в оптимальное решение.

Например, нормированная стоимость для изделия 1 равна -4. Это означает, что если мы, несмотря на оптимальное решение, потребуем включить в план выпуска еще одно изделие 1, то новый план выпуска принесет нам прибыль  $2150 - 4 = 2146$  руб./день, что на 4 руб. меньше, чем в прежнем оптимальном решении.

3. **Коэффициенты ЦФ.**

4. **Предельные значения приращения целевых коэффициентов**, при которых сохраняется первоначальное оптимальное решение (допустимое увеличение, допустимое уменьшение).

Например, допустимое увеличение прибыли от реализации изделия равно 4 ден.ед./шт., а допустимое уменьшение – практически не ограничено. Это означает, что если прибыль от реализации изделия 1 возрастет более чем на 4 ден. ед./шт (станет равной 7 ден.ед./шт.), то оптимальное решение изменится: станет целесообразным выпуск изделия 1. А если она будет снижаться вплоть до нуля, то оптимальное решение останется прежним.

## Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$F\$2	на операции 1 Использование ресурса	430	1	430	10	200
\$F\$3	на операции 2 Использование ресурса	460	2	460	400	20
\$F\$4	на операции 3 Использование ресурса	400	0	420	1E+30	20

**Если остальные данные модели останутся неизменными, то увеличение на 1 мин фонда рабочего времени по операции 1 в пределах от 230 (=430-200) до 440 (=430+10) приведет к увеличению значения целевой функции (прибыли от реализации) на 1 ден. ед.**

**Теневая цена рассчитывается только для дефицитных ресурсов.**

**Позволяет сделать вывод – какой ресурс целесообразно наращивать в первую очередь.**

# Двойственная задача

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j = 1, \dots, n; \\ y_i \geq 0, i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

$y_i$  – стоимость единицы ресурса  $i$