

Численное решение

систем линейных
алгебраических
уравнений

С Л А У

Общий вид СЛАУ

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \boxed{} + a_{1j}x_j + \boxed{} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \boxed{} + a_{2j}x_j + \boxed{} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \boxed{} + a_{ij}x_j + \boxed{} + a_{in}x_n = b_i \\ \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \boxed{} + a_{nj}x_j + \boxed{} + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

где **a** – коэффициенты системы,

b – свободные члены,

x – неизвестные

n – количество уравнений в системе и количество неизвестных (порядок системы)

Запись СЛАУ в матричной форме

$$A \cdot X = B$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_n \end{vmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_n \end{vmatrix}$$

При решении СЛАУ возможно возникновение 3 случаев:

1. Пример:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 31 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

2. Пример:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 31 \\ 10x_1 + 4x_2 = 62 \end{cases}$$

3. Пример:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 31 \\ 10x_1 + 4x_2 = 28 \end{cases}$$

2 класса методов решения СЛАУ:

1. Прямые методы.

2. Итерационные методы.

Прямые методы

Достоинство: устойчивость методов.

Недостаток: точность решения зависит от особенностей метода и от количества уравнений.

Итерационные методы

Достоинство: точность решения задается пользователем.

Недостаток: методы являются неустойчивыми.

Метод Гаусса

(метод последовательного
исключения неизвестных)

Является прямым методом.

Исходные данные:

1. A

2. B

Алгоритм метода Гаусса:

1. Ввод исходных данных.
2. Прямой ход.
3. Обратный ход.
4. Вывод результатов.

Метод Гаусса для 3 уравнений с 3-мя неизвестными (система 3-го порядка)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

1. x_1 :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}x_2}{a_{11}} - \frac{a_{13}x_3}{a_{11}}$$

2. x_1 подставляется во все оставшиеся уравнения системы.

Получим следующее:

$$\left(a_{22} - a_{12} \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) x_2 + \left(a_{23} - a_{13} \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) x_3 = b_2 - b_1 \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$\left(a_{32} - a_{12} \frac{a_{31}}{a_{11}} \right) x_2 + \left(a_{33} - a_{13} \frac{a_{31}}{a_{11}} \right) x_3 = b_3 - b_1 \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

3. Новые обозначения:

$$a'_{22} = a_{22} - a_{12} \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$a'_{23} = a_{23} - a_{13} \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$b'_2 = b_2 - b_1 \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$a'_{32} = a_{32} - a_{12} \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

$$a'_{33} = a_{33} - a_{13} \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

$$b'_3 = b_3 - b_1 \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

Новая система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{cases}$$

4. x_2 :

$$x_2 = \frac{b'_2}{a'_{22}} - \frac{a'_{23}x_3}{a'_{22}}$$

5. x_2 подставляется во все оставшиеся уравнения системы.

Получим следующее:

$$\left(a'_{33} - a'_{23} \frac{a'_{32}}{a'_{22}} \right) x_3 = b'_3 - b'_2 \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

6. Новые обозначения:

$$a''_{33} = a'_{33} - a'_{23} \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

$$b''_3 = b'_3 - b'_2 \frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

Новая система в верхнетреугольном виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ a''_{33}x_3 = b''_3 \end{cases}$$

7. Неизвестные вычисляются в обратном порядке (обратный ход):

$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23} x_3}{a'_{22}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3}{a_{11}}$$

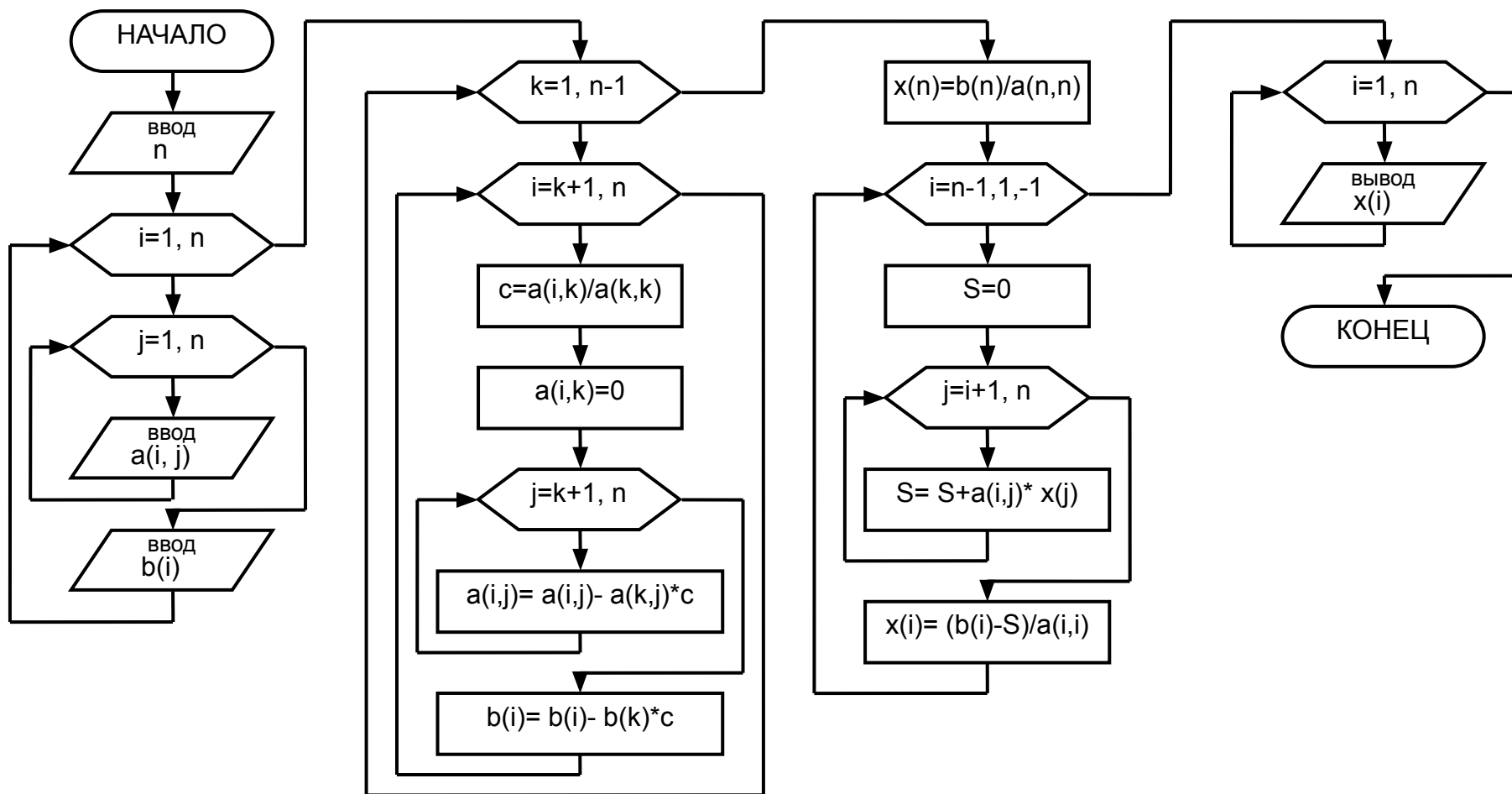
Блок-схема метода Гаусса

ВВОД ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

прямой ход

обратный ход

ВЫВОД РЕЗУЛЬТАТОВ



ЗАМЕЧАНИЕ

В случае единственности решения СЛАУ методом Гаусса всегда находится необходимое решение.

Необходимо выполнения условия:

$$a_{ii} \neq 0$$

Метод Зейделя (метод простых итераций)

Является итерационным методом.

Исходные данные:

1. A
2. B
3. $X^{(0)}$
4. E

Метод Зейделя для 3 уравнений с 3-мя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

1. Из 1-го уравнения выражаем неизвестное x_1 , из 2-го уравнения - x_2 , из 3-го - x_3 .

Получим новую систему:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \\ x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) \end{cases}$$

2. В правую часть 1-го уравнения подставляем начальные приближения неизвестных $x_2^{(0)}$ и $x_3^{(0)}$. Получаем уточненное значение неизвестного $x_1^{(1)}$.
3. В правую часть 2-го уравнения подставляем начальное приближение неизвестного $x_3^{(0)}$ и уточненное значение $x_1^{(1)}$. Получаем уточненное значение неизвестного $x_2^{(1)}$.
4. В правую часть 3-го уравнения подставляем уточненные значения неизвестных $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$. Получаем уточненное значение неизвестного $x_3^{(1)}$.

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}) \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}) \end{cases}$$

5. Далее рассчитывается разность между значениями начальных приближений и уточненными значениями неизвестных.

Если $|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| < E$ то считается, что значения $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ являются решением данной системы. В противном случае эти значения принимаются за начальное приближение и процесс повторяется.

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| < E$$

и

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| < E$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Метод Зейделя является итерационным, итерации сходятся не всегда.

Итерации всегда сходятся при выполнении следующего условия:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$$

условие преобладания диагональных коэффициентов.

Метод Крамера для решения СЛАУ 2-го и 3-го порядка

Прямой метод. Метод линейной алгебры.

Исходные данные:

1. A

2. B

Условие существования
единственного решения СЛАУ

$$\det A \neq 0$$

Метод Крамера для системы 2-го порядка

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Метод Крамера для системы 3-го порядка

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Окончательные формулы:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} a_{33} - b_1 a_{23} a_{32} - b_2 a_{12} a_{33} + b_2 a_{13} a_{32} + b_3 a_{12} a_{23} - b_3 a_{13} a_{22}}{a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{13} a_{32} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{13} a_{22}}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 a_{33} - a_{11} a_{23} b_3 - a_{21} b_1 a_{33} + a_{21} a_{13} b_3 + a_{31} b_1 a_{23} - a_{31} a_{13} b_2}{a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{13} a_{32} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{13} a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{a_{11} a_{22} b_3 - a_{11} b_2 a_{32} - a_{21} a_{12} b_3 + a_{21} b_1 a_{32} + a_{31} a_{12} b_2 - a_{31} b_1 a_{22}}{a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{13} a_{32} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{13} a_{22}}$$

Для систем более высоких порядков метод Крамера практически не применяется

Реализация метода Крамера в электронных таблицах Microsoft Excel

Функция
МОПРЕД(матрица)

Функция МОПРЕД

Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Arial Cyr 10 Ж К Ч % 000 0,00 0,00 100% ?

СЛЧИС X ✓ fx =

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										
19										
20										
21										
22										

Мастер функций - шаг 1 из 2

Поиск функции:

Введите краткое описание действия, которое нужно выполнить, и нажмите кнопку "Найти"

Найти

Категория: Математические

Выберите функцию:

- ГРАДУСЫ
- ЗНАК
- КОРЕНЬ
- МОБР
- МОПРЕД**
- МУМНОЖ
- НЕЧЁТ

МОПРЕД(массив)

Возвращает определитель матрицы (матрица хранится в массиве).

[Справка по этой функции](#)

OK Отмена

Пример расчета определителя

Microsoft Excel - Книга1

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Arial Cyr 10 Ж К Ч

СЛЧИС ✗ ✓ fx =МОПРЕД(B2:E5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		34,5	45,6	56,2	12,6					
3		28,9	12,8	85,6	24,9					
4		-4,9	56,8	41,2	45,8					
5		78,2	47,5	69,4	23,5					
6										
7										
8										
9										

Расчет определителя

=МОПРЕД(B2:E5)

МОПРЕД(массив)