II. Основные законы распределения д.с.в.

§1. **Биномиальный закон распределения**.

1. Опр-е.

С.в. **X** имеет биномиальное распределение с параметрами **n** и **p**, если она принимает значения 0,1,…,n с вероятностями

$$P\{X=m\}=C_n^m p^m q^{n-m},$$

$$\text{где}\quad 0<p<1,\qquad q=1-p,\quad m=0,1,\dots,n.$$

X	0	1	2	…	n
P{X=m}	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$		p^n

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}=1.$$

2. Математическое ожидание и дисперсия с.в., распределенной по биномиальному закону.

Теорема. Пусть $X \in Bi(n, p)$.

Тогда E(X)=*np*, D(X)=*npq*, где *q=1-p*.

X- число успехов в *n* испытаниях Б. с вер. успеха *p*.

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \text{в} \quad i \quad \text{испытании} \quad \text{наступил} \quad \text{успех}, \\ 0, & \text{если} \quad \text{в} \quad i \quad \text{испытании} \quad \text{наступила} \quad \text{неудача}. \end{cases}$$

Представим $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$, $E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i).$

$$D(X) = D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$

X_i	0	1
P	q	p

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

E(X_i)=$0*q+1*p=p$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

.

$D(X_i)=E(X_i^2)-E^2(X_i)= p-p^2 = p(1-p) =pq$. $E(X_i^2)=p;$

X_i^2	0	1
P	q	p

Представим $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$, $$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}p=np.$$

D(X)=?

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\sum_{i=1}^{n}pq=npq.$$

Пр.

В Петербурге в течении трех дней наблюдается наводнение. Вероятность того, что в каждый из этих дней уровень воды в Неве превысит ординар равна 0,8.

С.в. X- число дней, в кот. был превышен ординар.

а) Каков закон распределения с.в. X?

б) Составить таблицу распределения с.в. X.

с) Вычислить E(X) и дисперсию X.

Решение. $n=3$, $p=0,8$ $q=0,2$;

X	0	1	2	3
P{X=m}	0,008	0,096	0,384	0,512

$P\{X=0\}=q^3=0,008;$

$P\{X=1\}=C_3^{\,1}p\,q^2=3*0,8*0,2^2=0,096;$

$P\{X=2\}=C_3^{\,2}p^2\,q^1=3*0,8^2*0,2=0,384;$

$P\{X=3\}=p^3=0,512;$

$E(X)=np=3*0,8=2,4;$

$D(X)=npq=3*0,8*0,2=0,48;$

$(n+1)p=4*0,8=3,2;$ $m_0=[3,2]=3;$

§2. **Распределение Пуассона**

1. Опр.

Д.с.в. X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda>0$, если она принимает значения 0,1,2,…,

а соответствующие им вероятности определяются формулой

$$P\{X=m\}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \qquad m=0,1,2,\ldots$$

2. Математическое ожидание и дисперсия с.в., распределенной по закону Пуассона.

Теорема. Пусть с.в. X распределена по закону Пуассона с параметром λ.

Тогда $E(X)=\lambda$ и $D(X)=\lambda$.

Док-во.

$$E(X) = \sum_{m=0}^{\infty} mP\{X = m\} = \sum_{m=0}^{\infty} m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\lambda^m}{m(m-1)!} == e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda\lambda^{m-1}}{(m-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$.

$E^2(X)=\lambda^2$

$$E(X^2) = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 P\{X^2 = m^2\} = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 P\{X = m\} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda} + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda E(X) + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda\lambda + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

$$D(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Пример 1

- В диспетчерский пункт МЧС в течение суток поступает в среднем 5 обращений. Найти вероятность того, что диспетчер примет не менее двух вызовов в сутки.

X- число обращений в МЧС в сутки. $P\{X \geq 2\}$=?

$P\{X \geq 2\}$=1- $P\{X < 2\}$; $P\{X < 2\}$=$P\{X = 0\}$+ $P\{X = 1\}$

$P\{X = 0\} = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} \approx 0{,}0067$; $P\{X = 1\} = \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} \approx$0,337;

$P\{X < 2\} \approx$ 0,0067+ 0,337=0,344;

$P\{X \geq 2\}$=1- 0,344=0,656

Пример 2

- В некотором регионе в течение суток производится в среднем 3 выброса загрязняющих веществ в атмосферу. Найти вероятность того, что в течение суток число выбросов будет не менее двух.

Пример 3

Поступление сообщений о результатах торгов на фондовой бирже подчиняется распределению Пуассона с $\lambda = 3{,}7$. Чему равно мат. ожидание числа сообщений в единицу времени?