

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

*Я бы почувствовал настоящее
удовлетворение лишь в том случае,
если бы смог передать ученику
гибкость ума,
которая дала бы ему в дальнейшем
возможность самостоятельно
решать задачи.*

У.У. Сойер.

План

- 1) Понятие иррациональных уравнений.
- 2) Методы решения иррациональных уравнений.
- 3) Решение иррациональных уравнений.

Определение

- Иррациональным уравнением называют уравнение, в котором неизвестная величина содержится под знаком радикала.

Примеры: $\sqrt{x+1} = x-1$; $\sqrt{5x-4} = 2 + \sqrt{x}$;
 $\sqrt[4]{x+15} = x+1$; $\sqrt[3]{x+6} = \sqrt{6-x}$.

Приёмы решения иррациональных уравнений.

- Решение иррационального уравнения основано на преобразовании его к рациональному уравнению. Это достигается возведением обеих его частей в одну и ту же степень (иногда несколько раз).
- При этом если обе части уравнения возвести в нечётную степень, то получим уравнение, равносильное данному.
- Уравнения, имеющие одни и те же корни, называют **равносильными**.

- В процессе решения заданное уравнение заменяют более простым, при этом используя следующие правила преобразований уравнения в равносильное:
 - перенос слагаемых из одной части равенства в другую с противоположным знаком;
 - обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же, отличное от нуля число;

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$
 - уравнение $f(x) = 0$ можно заменить равносильной системой $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ или решить

$f(x)=0$, а затем отбросить те корни, которые

Степень чётная:

- При возведении обеих частей иррационального уравнения в чётную степень получается уравнение, являющееся **следствием** исходного.
- **Уравнению-следствию** удовлетворяют все корни исходного уравнения, но могут появиться и корни, которые не являются корнями исходного уравнения, так называемые **посторонние корни**.
- Поэтому все найденные корни уравнения-следствия проверяют подстановкой в исходное уравнение и посторонние корни

- К появлению посторонних корней могут привести (не обязательно приводят) следующие преобразования:
 - возведение в квадрат (или четную степень) обеих частей уравнения;
 - умножение обеих частей уравнения на алгебраическое выражение, содержащее переменную.

Правила равносильного перехода для простейших иррациональных уравнений

1) если $a > 0$, то $\sqrt{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^2$ (здесь проверять область определения не надо);

2) если $\sqrt{f(x)} = -a \Leftrightarrow x \in \emptyset$

3) если подкоренное выражение равно нулю, то и подкоренное выражение равно нулю:

$$\sqrt{f(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Уравнение вида $\sqrt[n]{f(x)} = a$ при $n = 2m$ аналогичным

решаются по

4) если $n = 2m + 1$, то $\sqrt[n]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^n$.

Пример 1.

Решить уравнение:

$$\sqrt{x^2 - 7} = 3,$$

$$x^2 - 7 = 9,$$

$$x^2 = 16,$$

$$x_1 = -4; x_2 = 4.$$

Подставив полученные корни в исходное уравнение, видим, что они удовлетворяют ему.

Ответ: -4; 4.

Пример 2.

Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 7} = -2$.

Решение.

$$\sqrt{x^2 - 7} = -2 \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

По определению арифметического квадратного

корня

$$\sqrt{a} = y \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = a \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- это неотрицательное число, квадрат которого равен a .

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Способ решения $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$

Пример 3.

Решить уравнение $\sqrt{22 - 2x} = x + 1$.

Решение.

$$\sqrt{22 - 2x} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ 22 - 2x = (x + 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ 22 - 2x = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1, \\ -x^2 - 4x + 21 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + 4x - 21 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1, \\ \begin{cases} x = -7 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: 3

Рассмотрим уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Из двух систем решают ту, которая решается проще.

Пример 4.

$$\sqrt{-2x-1} = \sqrt{x^2-36}.$$

Решить уравнение.

$$\sqrt{-2x-1} = \sqrt{x^2-36} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-1 = x^2-36 \\ -2x-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2-2x-1+36=0 \\ -2x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-35=0 \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7 \\ x = 5 \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -7.$$

Ответ: -7.

Пример 5.

Решить уравнение $\sqrt{x-5} = \sqrt{3-x}$.

Решение.

Подкоренные выражения не должны быть отрицательными:

$$\begin{cases} x-5 \geq 0, \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5, \\ x \leq 3. \end{cases}$$

Полученная система неравенств решений не имеет, не имеет их, таким образом, и исходное уравнение.

Ответ: решений нет.

Линейные комбинации двух и более радикалов.

Если уравнение содержит два и более радикала, то необходимо придерживаться следующих правил:

1. указать область допустимых значений уравнения;
2. распределить радикалы по обеим частям, чтобы обе части уравнения стали неотрицательными;
3. только после этого возводить в квадрат левую и правую части уравнения.

Пример 6.

Решить уравнение: $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} = 5$.

Решение.

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1})^2 = 25 \\ x-1 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-1}\sqrt{2x-1} = 27-3x, \\ x \geq 1, \\ 27-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2\sqrt{(x-1)(2x-1)})^2 = (27-3x)^2, \\ x \geq 1, \\ x \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 150x + 725 = 0, \\ 1 \leq x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 145 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

ОТВЕТ: 5.

Пример 7.

Решить уравнение $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = \frac{4}{\sqrt{x+2}}$.

Решение

$$\begin{cases} \sqrt{x}\sqrt{x+2} + (\sqrt{x+2})^2 = 4, \\ x \geq 0, \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(x+2)} + x + 2 = 4, \\ x \geq 0, \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x(x+2)} = 2 - x, \\ x \geq 0, \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2) = (2-x)^2, \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x = 4 - 4x + x^2, \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 4, \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $x = \frac{2}{3}$

Использование замены переменных

Решить уравнение: $x^2 + 3x - 6 + \sqrt{x^2 + 3x} = 0$.

Решение.

Пусть $y = \sqrt{x^2 + 3x}$, где $y \geq 0$.

Тогда решаем уравнение: $y^2 + y - 6 = 0$

$\begin{cases} y = -3, \\ y = 2 \end{cases}$ так как $y \geq 0$, то возвращаемся к замене:

$$\sqrt{x^2 + 3x} = 2, x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = 1. \end{cases}$$

Проверка показывает, что оба числа являются корнями уравнения.

Ответ: -4; 1.

Уравнение вида $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} = 0$.

Произведение равно 0, если хотя бы один из множителей равен 0, а второй при этом имеет СМЫСЛ:

$$f(x) \cdot \sqrt{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \sqrt{g(x)} = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Решить уравнение: $(x^2 + 3x) \cdot \sqrt{2 + x} = 0$.

Решение.

$$(x^2 + 3x) \cdot \sqrt{2 + x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x = 0, \\ \sqrt{2 + x} = 0; \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ \left[\begin{array}{l} x(x + 3) = 0, \\ 2 + x = 0; \end{array} \right. \end{cases} \begin{cases} x \geq -2, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -3, \\ x = -2 \end{array} \right. \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x = -2. \end{cases}$$

Степень нечётная:

Решим уравнение

$$x - 1 = \sqrt[3]{x^2 - x - 1},$$

$$(x - 1)^3 = x^2 - x - 1,$$

$$x^3 - 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 - 1^3 = x^2 - x - 1,$$

$$x^3 - 3x^2 - x^2 + 3x + x - 1 + 1 = 0,$$

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0,$$

$$x(x^2 - 4x + 4) = 0,$$

$$x(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ x = 2. \end{cases}$$

Проверка не
нужна!

Ответ: 0; 2.

Графический способ решения иррационального уравнения

Графически решить уравнение $\sqrt{x} = 1 - x^2$.

Построим в одной системе координат графики $y = \sqrt{x}$

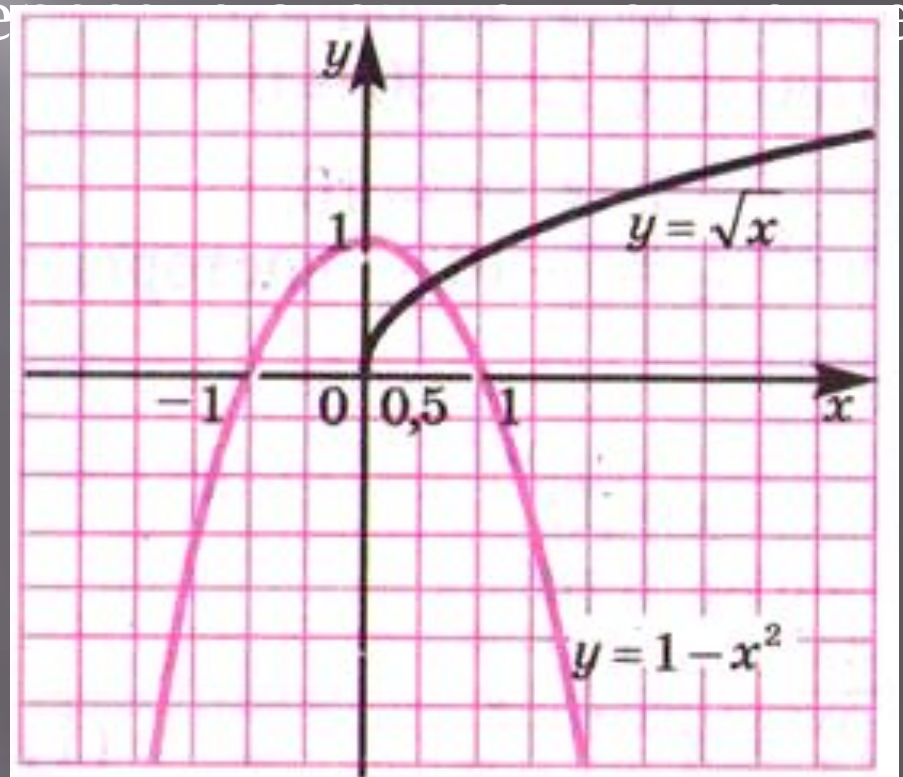
$$y = 1 - x^2$$

и $y = 1 - x^2$. Графики пересеклись

при

$$x \approx 0,5.$$

Ответ: 0,5.



Тест

$$a) \sqrt[3]{23x+5} = -2; \quad \sqrt{\quad} = -$$

$$b) \sqrt{23x+4}; \quad) \quad 3x + \sqrt{5} \cdot 2; =$$

$$d) x^2 + 2\sqrt{6}; \quad e) \quad 2 \quad 7\sqrt[3]{9x-} =$$

- 1) Какие из уравнений не являются иррациональными?
- 2) Какие иррациональные уравнения не имеют корней?
- 3) Какие иррациональные уравнения необходимо решить с проверкой?
- 4) Какие уравнения имеют один корень?

Ключ к тесту

1	2	3	4
в, д	б	г	а, е

Ответы к самостоятельной работе

Вариант 1.

№ задания	1	2	3	4	5	6
ответ	2)	1)	3)	0	10	-8

Вариант 2.

№ задания	1	2	3	4	5	6
ответ	3)	2)	1)	-14	10	-6