

***Тождественные преобразования
тригонометрических выражений
9 класс***

Тождественные преобразования тригонометрических выражений опираются на следующие основные формулы:

Формулы приведения.

Формулы для тригонометрических функций одного и того же аргумента.

Формулы сложения аргументов.

Формулы двойного угла.

Формулы половинного аргумента.

Формулы преобразования суммы(разности) тригонометрических функций в произведение.

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму(разность).

Формулы понижения степени

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

I способ

Вычислить: $125 \cdot (\cos^8 \alpha - \sin^8 \alpha)$, $\text{если } \cos 2\alpha = 0,8$.

$$125 \cdot (\cos^8 \alpha - \sin^8 \alpha) = 125 \cdot (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha)(\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) =$$

$$125 \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) =$$

$$125 \cdot \cos 2\alpha \cdot (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) = 125 \cdot 0,8 \cdot (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) =$$

$$100 \cdot \left[\left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right)^2 \right] = 100 \cdot \left[\left(\frac{1 + 0,8}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 - 0,8}{2} \right)^2 \right] =$$

$$= 100 \cdot (0,9^2 + 0,1^2) = 100 \cdot (0,81 + 0,01) = 100 \cdot 0,82 = 82$$

II способ

Вычислить $125 \cdot (\cos^8 \alpha - \sin^8 \alpha)$, $\cos 2\alpha = 0,8$

$$125 \cdot (\cos^8 \alpha - \sin^8 \alpha) = 125 \cdot (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) \cdot (\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) =$$

$$125 \cdot (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) =$$

$$125 \cdot \cos 2\alpha \cdot (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) = 125 \cdot 0,8 \cdot (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) =$$

$$100 \cdot (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) =$$

$$= 100 \cdot [(\cos^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha) - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha] =$$

$$= 100 \cdot [(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha] =$$

$$= 100 \cdot \left(1 - \frac{4 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{2}\right) = 100 \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{2}\right) =$$

$$= 100 \cdot \left(1 - \frac{1 - \cos^2 2\alpha}{2}\right) = 100 \cdot \left(\frac{2 - 1 + 0,64}{2}\right) = 100 \cdot 0,82 = 82$$

Формулы преобразования произведений в суммы или разности

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

Формулы преобразования произведений в суммы или разности

Пример: $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x =$

$$= \frac{1}{2} [\cos(x - 3x) - \cos(x + 3x)] + \frac{1}{2} [\cos(4x - 8x) - \cos(4x + 8x)] =$$

$$= \frac{1}{2} [\cos(-2x) - \cos 4x] + \frac{1}{2} [\cos(-4x) - \cos 12x] =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x + \cos 4x - \cos 12x) = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 12x) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-2 \sin \frac{2x - 12x}{2} \sin \frac{2x + 12x}{2} \right) = -\sin(-5x) \sin 7x =$$

$$= \sin 5x \sin 7x$$

Доказать тождество: $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) \cdot$$

$$\cdot (\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha) = \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cdot \cos^2 \alpha =$$

$$\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \alpha) =$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \beta \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

1 способ

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + 2\beta\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta\right) &= \\ &= \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 2\beta + \frac{\alpha}{2} - 2\beta\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 2\beta - \frac{\alpha}{2} + 2\beta\right) = \\ &= \sin \alpha \cdot \sin 4\beta \end{aligned}$$

Применили формулу

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

2 способ

$$\begin{aligned} & \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + 2\beta\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta\right) = \\ & \left(\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 2\beta\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta\right)\right) \left(\sin\left(\frac{\alpha}{2} + 2\beta\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta\right)\right) = \\ & = 2 \sin \frac{\frac{\alpha}{2} + 2\beta - \frac{\alpha}{2} + 2\beta}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\alpha}{2} + 2\beta + \frac{\alpha}{2} - 2\beta}{2} \cdot \\ & \cdot 2 \sin \frac{\frac{\alpha}{2} + 2\beta + \frac{\alpha}{2} - 2\beta}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\alpha}{2} + 2\beta - \frac{\alpha}{2} + 2\beta}{2} = \\ & = 2 \sin 2\beta \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos 2\beta = \sin 4\beta \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

3 способ

$$\begin{aligned} & \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} + 2\beta\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta\right) = \\ &= \frac{1 - \cos 2\left(\frac{\alpha}{2} + 2\beta\right)}{2} - \frac{1 - \cos 2\left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta\right)}{2} = \\ &= \frac{1 - \cos(\alpha + 4\beta) - 1 + \cos(\alpha - 4\beta)}{2} = \frac{\cos(\alpha - 4\beta) - \cos(\alpha + 4\beta)}{2} = \\ &= \frac{-2 \sin \frac{\alpha - 4\beta + \alpha + 4\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - 4\beta - \alpha - 4\beta}{2}}{2} = \\ &= -\sin \alpha \cdot \sin(-4\beta) = \sin \alpha \cdot \sin 4\beta \end{aligned}$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \alpha$$

Упростите

$$\begin{aligned} & \cos 2\alpha + 2 \sin(\alpha + 30^\circ) \cdot \sin(\alpha - 30^\circ) = \\ & = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2(\sin^2 \alpha - \sin^2 30^\circ) = \\ & = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha - \frac{1}{2} = \\ & = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Доказать тождество: $\sin \alpha \cdot \sin(60^0 - \alpha) \cdot \sin(60^0 + \alpha) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha$

$$\sin \alpha \cdot \sin(60^0 - \alpha) \cdot \sin(60^0 + \alpha) = \sin \alpha \cdot (\sin^2 60^0 - \sin^2 \alpha) =$$

$$\sin \alpha \cdot \left(\frac{3}{4} - \sin^2 \alpha\right) = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha$$

Аналогично доказываются тождества:

$$\cos \alpha \cdot \cos(60^0 - \alpha) \cdot \cos(60^0 + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(60^0 - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(60^0 + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg}(60^0 - \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(60^0 + \alpha) = \operatorname{ctg} 3\alpha$$

Пользуясь этими тождествами легко доказать, что:

$$\sin 20^0 \cdot \sin 40^0 \cdot \sin 80^0 = \frac{1}{4} \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\cos 10^0 \cdot \cos 50^0 \cdot \cos 70^0 = \frac{1}{4} \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\operatorname{tg} 6^0 \cdot \operatorname{tg} 54^0 \cdot \operatorname{tg} 66^0 = \operatorname{tg} 18^0$$

Вычислить:

$$\operatorname{tg} 20^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 40^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 60^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 80^{\circ} = (\operatorname{tg} 20^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 40^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 80^{\circ}) \cdot \operatorname{tg} 60^{\circ} = \operatorname{tg} 60^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 60^{\circ} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$

Второй способ:

$$\operatorname{tg} 20^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 40^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 60^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 80^{\circ} = \frac{\sin 20^{\circ} \cdot \sin 40^{\circ} \cdot \sin 80^{\circ}}{\cos 20^{\circ} \cdot \cos 40^{\circ} \cdot \cos 80^{\circ}} \cdot \sqrt{3} =$$

$$\frac{2 \sin 10^{\circ} \cos 10^{\circ} \cdot 2 \sin 20^{\circ} \cos 20^{\circ} \cdot 2 \sin 40^{\circ} \cos 40^{\circ}}{\cos 20^{\circ} \cdot \cos 40^{\circ} \cdot \cos(90^{\circ} - 10^{\circ})} \cdot \sqrt{3} =$$

$$8\sqrt{3} \cos 10^{\circ} \cdot \sin 20^{\circ} \sin 40^{\circ} = 8\sqrt{3} \cos 10^{\circ} \cdot \frac{1}{2} (\cos 20^{\circ} - \cos 60^{\circ}) =$$

$$8\sqrt{3} \cos 10^{\circ} \cdot \left(\frac{1}{2} \cos 20^{\circ} - \frac{1}{4}\right) = 4\sqrt{3} \cos 10^{\circ} \cdot \cos 20^{\circ} - 2\sqrt{3} \cos 10^{\circ} =$$

$$4\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} (\cos 30^{\circ} + \cos 10^{\circ})\right) - 2\sqrt{3} \cos 10^{\circ} = 4\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cos 10^{\circ}\right) - 2\sqrt{3} \cos 10^{\circ} =$$

$$3 + 2\sqrt{3} \cos 10^{\circ} - 2\sqrt{3} \cos 10^{\circ} = 3$$

Вычислить: $\cos 12^{\circ} \cdot \cos 24^{\circ} \cdot \cos 36^{\circ} \cdot \cos 48^{\circ} \cdot \cos 60^{\circ} \cdot \cos 72^{\circ} \cdot \cos 84^{\circ}$

$$\cos 24^{\circ} \cdot \cos 36^{\circ} \cdot \cos 84^{\circ} = \frac{1}{4} \cos 72^{\circ}$$

$$\cos 12^{\circ} \cdot \cos 48^{\circ} \cdot \cos 72^{\circ} = \frac{1}{4} \cos 36^{\circ}$$

$$\cos 12^{\circ} \cdot \cos 24^{\circ} \cdot \cos 36^{\circ} \cdot \cos 48^{\circ} \cdot \cos 60^{\circ} \cdot \cos 72^{\circ} \cdot \cos 84^{\circ} =$$

$$\frac{1}{4} \cos 72^{\circ} \cdot \frac{1}{4} \cos 36^{\circ} \cdot \cos 60^{\circ} = \frac{1}{16} \cos 72^{\circ} \cdot \cos 36^{\circ} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\frac{\cos 72^{\circ} \cdot \cos 36^{\circ}}{32} = \frac{\cos 72^{\circ} \cdot 2 \cos 36^{\circ} \sin 36^{\circ}}{2 \cdot 32 \sin 36^{\circ}} = \frac{\cos 72^{\circ} \cdot \sin 72^{\circ}}{64 \sin 36^{\circ}} =$$

$$\frac{\sin 144^{\circ}}{128 \sin 36^{\circ}} = \frac{\sin(180^{\circ} - 36^{\circ})}{128 \sin 36^{\circ}} = \frac{\sin 36^{\circ}}{128 \sin 36^{\circ}} = \frac{1}{128}$$

Вычислить: $\cos 12^{\circ} \cdot \cos 24^{\circ} \cdot \cos 36^{\circ} \cdot \cos 48^{\circ} \cdot \cos 60^{\circ} \cdot \cos 72^{\circ} \cdot \cos 84^{\circ}$

$$\cos 12^{\circ} \cdot \cos 24^{\circ} \cdot \cos 36^{\circ} \cdot \cos 48^{\circ} \cdot \cos 60^{\circ} \cdot \cos 72^{\circ} \cdot \cos 84^{\circ} =$$

$$= \frac{2 \sin 12^{\circ} \cos 12^{\circ}}{2 \sin 12^{\circ}} \cdot \cos 24^{\circ} \cdot \frac{2 \sin 36^{\circ} \cos 36^{\circ}}{2 \sin 36^{\circ}} \cdot \cos 48^{\circ} \cdot \cos 72^{\circ} \cos(90^{\circ} - 6^{\circ}) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin 24^{\circ} \cdot \cos 24^{\circ} \cdot 2 \cdot \sin 72^{\circ} \cdot \cos 72^{\circ} \cdot \cos 48^{\circ} \cdot \sin 6^{\circ}}{4 \cdot 8 \cdot \sin 12^{\circ} \sin 36^{\circ}} =$$

$$= \frac{2 \sin 48^{\circ} \cdot \cos 48^{\circ} \cdot \sin 144^{\circ} \cdot \sin 6^{\circ}}{2 \cdot 32 \cdot \sin 12^{\circ} \cdot \sin 36^{\circ}} = \frac{\sin 96^{\circ} \cdot \sin 36^{\circ} \cdot \sin 6^{\circ}}{64 \cdot \sin 12^{\circ} \cdot \sin 36^{\circ}} =$$

$$= \frac{2 \cos 6^{\circ} \cdot \sin 6^{\circ}}{2 \cdot 64 \cdot \sin 12^{\circ}} = \frac{\sin 12^{\circ}}{128 \cdot \sin 12^{\circ}} = \frac{1}{128}$$

Примеры преобразований тригонометрических выражений
часто встречающиеся или имеющие необычный подход в решении

Пример 1:

$$\begin{aligned}\cos 20^{\circ} \cos 40^{\circ} \cos 80^{\circ} &= \frac{2 \sin 20^{\circ} \cos 20^{\circ} \cos 40^{\circ} \cos 80^{\circ}}{2 \sin 20^{\circ}} = \frac{2 \sin 80^{\circ} \cos 80^{\circ}}{2 \cdot 4 \sin 20^{\circ}} = \\ &= \frac{\sin 160^{\circ}}{8 \sin 20^{\circ}} = \frac{\sin(180^{\circ} - 20^{\circ})}{8 \sin 20^{\circ}} = \frac{\sin 20^{\circ}}{8 \sin 20^{\circ}} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Способ 2

$$\cos 20^{\circ} \cos 40^{\circ} \cos 80^{\circ} = \frac{1}{4} \cos 60^{\circ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Применили формулу

$$\cos \alpha \cdot \cos(60^{\circ} - \alpha) \cdot \cos(60^{\circ} + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$$

Пример 2:

$$tg1^0 tg3^0 tg5^0 ... tg89^0 =$$

$$tg89^0 = tg(90^0 - 1^0) = ctg1^0$$

$$tg87^0 = tg(90^0 - 3^0) = ctg3^0$$

$$tg85^0 = tg(90^0 - 5^0) = ctg5^0$$

и т.д., кроме этого:

$$tg47^0 = tg(90^0 - 43^0) = ctg43^0$$

умножим:

$$tg1^0 \cdot tg89^0 = tg1^0 \cdot ctg1^0 = 1$$

все попарные произведения дают 1, а $tg45^0=1$. следовательно все выражение равно 1.

Вычислить:

$$\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cdot \cos 2 = \frac{1 + \cos 6}{2} + \frac{1 + \cos 2}{2} - \frac{1}{2}(\cos 6 + \cos 2) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 - \frac{1}{2} \cos 6 - \frac{1}{2} \cos 2 = 1$$

Преобразовать в произведение.

$$\begin{aligned} & 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right) - 1 = \\ & = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sqrt{3} \sin \alpha - 1 = \\ & = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sqrt{3} \sin \alpha - \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \\ & = \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sqrt{3} \sin \alpha = \\ & = -\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha\right) = \\ & = 2(\sin \alpha \cdot \cos 30^\circ - \cos \alpha \cdot \sin 30^\circ) = 2 \sin(\alpha - 30^\circ) \end{aligned}$$

Вычислить: $\sin(\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \operatorname{arcctg} \frac{4}{3})$.

Воспользуемся формулами перехода от одной обратной тригонометрической функции к другой:

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$$

$$\text{где } 0 < x < +\infty,$$

$$\text{тогда } \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = \operatorname{arcctg} \frac{4}{3}, \text{ получим } \sin(2 \operatorname{arctg} \frac{3}{4})$$

$$\operatorname{arctg} \frac{3}{4} = \arcsin \frac{3/4}{\sqrt{1+9/16}} = \arcsin \frac{3}{4} \div \frac{5}{4} = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$\sin(2 \arcsin \frac{3}{5}), \text{ если } \arcsin \frac{3}{5} = \alpha, \text{ то } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5}, \alpha \in I \text{ — верно.}$$

$$\sin(2 \arcsin \frac{3}{5}) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

«Лесенка успеха»

Найди своё место на лестнице успеха

