

Курс «Математическая теория телетрафика»

Модель Эрланга с
ожиданием и блокировками
(вторая модель Эрланга).
Заявка освобождает место в очереди

Лекция 7а

Схема 2-й модели Эрланга

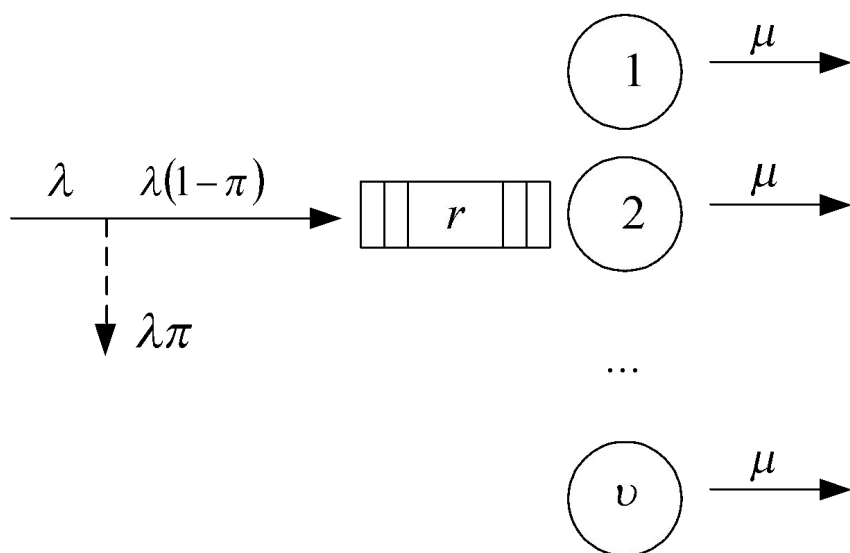
$$M \left| M \right| v \left| r < \infty \right.$$

$$\lambda \quad \mu$$

Нагрузочные параметры:

λ - интенсивность входящего ПП заявок

μ - интенсивность экспоненциального распределения СВ длительности обслуживания заявки



Структурные параметры:

v - количество приборов (линий пучка)

r - количество мест в очереди

R - емкость системы

Показатели эффективности системы:

π - вероятность блокировки заявки,

$$\pi = p_{v+r}$$

N - среднее число заявок в СМО

$\underline{Q}$ - средняя длина очереди

$\bar{\omega}$ - среднее время ожидания заявкой начала обслуживания

$\bar{U}$ - среднее время пребывания заявки в системе

Физическая модель

- обслуживание хэндоверов в соте ССПС
- центральный процессор узла коммутации
- канал передачи данных

Математическая модель

$X(t)$ - число заявок в СМО в момент t , $t \geq 0$

$J = \{0, 1, \dots, R\}$ - пространство состояний системы,

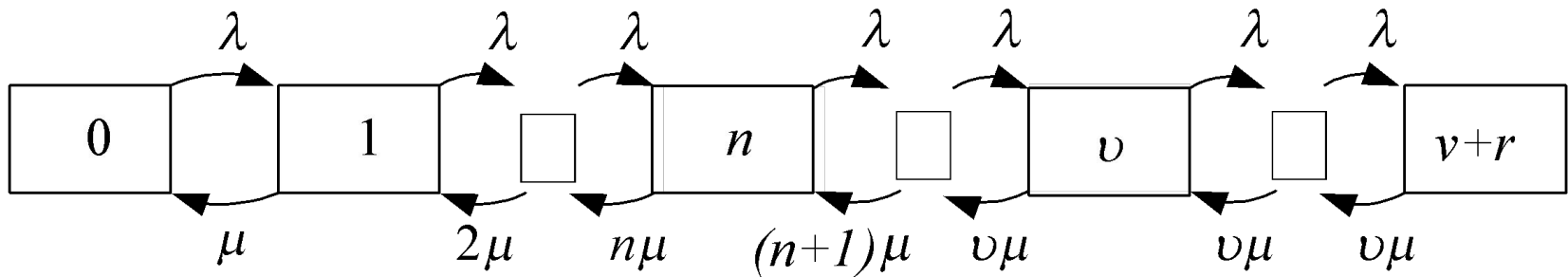
Случайный процесс (СП) $X(t)$ – ПРГ, $X(t) \in J$

$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = n\}$ - стационарная вероятность

состояния $n \in J$

$\{p_n, n \in J\}$ - стационарное распределение вероятностей
ПРГ $X(t)$

Диаграмма интенсивностей переходов ПРГ



Интенсивности

переходов ПРГ $X(t)$:

$$a_{n,n+1} =: \lambda_n = \lambda u(r - n),$$

$$a_{n,n-1} =: \mu_n = \mu \min(n, v),$$

$$a_{n,n} = -\lambda_n - \mu_n.$$

СУГБ

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0;$$

$$\lambda p_{n-1} - (\lambda + n\mu)p_n + (n+1)\mu p_{n+1} = 0, \quad n = \overline{1, \nu-1};$$

$$\lambda p_{n-1} - (\lambda + \nu\mu)p_n + \nu\mu p_{n+1} = 0, \quad n = \overline{\nu, \nu+r-1};$$

$$\lambda p_{\nu+r-1} - \nu\mu p_{\nu+r} = 0.$$

СУЛБ

$$\lambda p_{n-1} = n\mu p_n, \quad n = \overline{1, \nu};$$

$$\lambda p_{n-1} = \nu\mu p_n, \quad n = \overline{\nu, \nu + r}.$$

Условие нормировки:

$$\sum_{n=0}^{\nu+r} p_n = 1$$

Стационарное распределение (1/3)

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} p_0, & n = \overline{0, v}; \\ \left(\frac{\rho}{v}\right)^{n-v} p_v = \frac{\rho^n}{v! v^{n-v}} p_0, & n = \overline{v, v+r}. \end{cases}$$

Здесь

$\rho = \lambda/\mu$ - предложенная нагрузка на СМО

Стационарное распределение (2/3)

p_0 определяется из условия нормировки $\sum_{n=0}^{v+r} p_n = 1$:

$$\begin{aligned} p_0 &= \left[\sum_{n=0}^{v-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^v}{v!} \sum_{n=v}^{v+r} \left(\frac{\rho}{v} \right)^{n-v} \right]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{v-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^v}{v!} \sum_{m=0}^r \left(\frac{\rho}{v} \right)^m \right]^{-1} = \\ &= \left[\sum_{n=0}^{v-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^v}{v!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{v} \right)^{r+1}}{1 - \frac{\rho}{v}} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Стационарное распределение (3/3)

$$p_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} \cdot \left[\sum_{n=0}^{v-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^v}{v!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{v}\right)^{r+1}}{1 - \frac{\rho}{v}} \right]^{-1}, & n = \overline{0, v-1}; \\ \frac{\rho^n}{v! v^{n-v}} \cdot \left[\sum_{n=0}^{v-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^v}{v!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{v}\right)^{r+1}}{1 - \frac{\rho}{v}} \right]^{-1}, & n = \overline{v, v+r}. \end{cases}$$

При $r = \infty$ условие существования стационарного режима $\rho < v$.

Стационарный режим

Условия Карлина и МакГрегора
существования стационарного режима при $C = \infty$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i \frac{\mu_j}{\lambda_j} = \infty \quad (7.3)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} < \infty \quad (7.4)$$

Упражнения

Упражнение 7.1. Для СМО $M \left| \begin{matrix} M \\ \lambda \end{matrix} \right| \begin{matrix} M \\ \mu \end{matrix} \right|_r$ при $r < \infty$ выписать

- пространство состояний;
- матрицу A ,
- диаграмму интенсивностей переходов;
- СУГБ и СУЛБ;
- стационарное РВ;
- условия существования стационарного режима при $r = \infty$.

Упражнение 7.2. Для СМО $M \left| \begin{matrix} M \\ \lambda \end{matrix} \right| \begin{matrix} M \\ \mu \end{matrix} \right|_1$ при $r = \infty$ получить

формулы для величин среднего числа N заявок в СМО и средней длины Q очереди.

Вероятностные характеристики

Вероятность π блокировки заявки:

$$\pi = p_{\nu+r}, \quad r < \infty$$

Среднее число N заявок в СМО:

$$N = \sum_{n=0}^{\nu+r} n p_n$$

Средняя длина Q очереди (ср. число заявок в очереди):

$$Q = 0 \cdot (p_0 + p_1 + \dots + p_{\nu}) + 1 \cdot p_{\nu+1} + 2 \cdot p_{\nu+2} + \dots + r \cdot p_{\nu+r} = \sum_{n=1}^r n p_{\nu+n}$$

Вероятностно-временные характеристики

η – случайная величина (СВ) времени обслуживания,

$$B(t) = P\{\eta < t\} = \exp(-\mu t) - \text{ФР СВ } \eta,$$

$$M\eta = \int_0^{\infty} t dB(t) = \frac{1}{\mu} - \text{ср. значение СВ } \eta.$$

ω – СВ времени ожидания начала обслуживания,

$$W(t) = P\{\omega < t\} - \text{ФР СВ } \omega,$$

$$M\omega = \bar{\omega} - \text{ср. значение СВ } \omega.$$

υ – СВ времени пребывания заявки в СМО,

$$V(t) = P\{\upsilon < t\},$$

$$M\upsilon = \bar{\upsilon} - \text{ср. значение СВ } \upsilon.$$

Время ожидания начала обслуживания

ω – СВ времени ожидания начала обслуживания,

$W(t) = P\{\omega < t\}$ - ФР СВ ω ,

$M\omega = \bar{\omega}$ - ср. значение СВ ω .

Вероятность немедленного обслуживания:

$$P\{\omega = 0\} = \sum_{n=0}^{v-1} p_n = \left[\sum_{n=0}^{v-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^v}{v!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\rho}{v}\right)^{r+1}}{1 - \frac{\rho}{v}} \right]^{-1} \sum_{n=0}^{v-1} \frac{\rho^n}{n!}.$$

Вторая формула Эрланга

Вероятность неявных потерь для СМО $M \left| \begin{matrix} M \\ \lambda \end{matrix} \right| \mu \left| \begin{matrix} M \\ \mu \end{matrix} \right| v \left| \begin{matrix} M \\ \mu \end{matrix} \right| \infty$:

$$P\{\omega > 0\} = \sum_{n=v}^{\infty} p_n = p_0 \frac{\rho^v}{v!} \sum_{n \geq v} \left(\frac{\rho}{v} \right)^{n-v} = \frac{\frac{\rho^v}{v!} \frac{v}{v-\rho}}{\sum_{n=0}^{v-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^v}{v!} \frac{v}{v-\rho}}$$

Упражнение 7.3. Выразить $P\{\omega > 0\}$ через $E(\rho, v)$.

ФР времени ожидания заявки

Пусть в момент t поступления заявки в СМО $X(t) = i$, $i = \overline{0, v+r}$.

$$i = v+r: \quad P\{\text{заявка будет потеряна}\} = \pi = p_{v+r}$$

$$i = \overline{0, v+r-1}: \quad P\{\text{заявка будет принята в СМО}\} = 1 - \pi = 1 - p_{v+r}$$

$$i = \overline{0, v-1}: \quad P\{\text{заявка немедленно начнет обслуживаться}\} = \\ = P\{\omega = 0\} = \sum_{n=0}^{v-1} p_n$$

$i = \overline{v, v+r-1}$: заявка ожидает начала обслуживания в течение времени, необходимого для обслуживания полностью загруженной системой $(i - v + 1)$ заявок.

$$P\{(i - v + 1) \text{ заявок покинет СМО за время } t\} = E_{i-v+1}(t)$$

- ФР Эрланга с параметрами $v\mu$ и $(i - v + 1)$.

ПЛС ФР времени ожидания заявки

$$\begin{aligned}\text{ФР } W(t) = P\{\omega < t\} &= \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[\sum_{n=0}^{v-1} p_n + \sum_{i=v}^{v+r-1} p_i E_{i-v+1}(t) \right] = \\ &= \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[P\{\omega = 0\} + \sum_{j=0}^{r-1} p_{v+j} E_{j+1}(t) \right]\end{aligned}$$

ПЛС $\omega(s)$, $s \geq 0$, СВ ω :

$$\begin{aligned}\omega(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dW(t) &= \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[P\{\omega = 0\} + p_v \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\rho^j}{v^j} \int_0^{\infty} e^{-st} dE_{j+1}(t) \right] = \\ &= \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[P\{\omega = 0\} + p_v \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\lambda^j}{(v\mu)^j} \frac{(v\mu)^{j+1}}{(v\mu + s)^{j+1}} \right] =\end{aligned}$$

Среднее время ожидания заявки

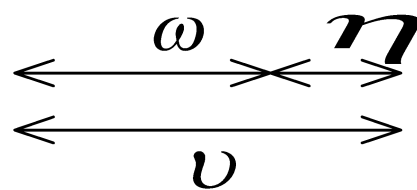
ПЛС $\omega(s)$, $s \geq 0$, ФР $W(t)$:

$$\begin{aligned}\omega(s) &= \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[P\{\omega = 0\} + v\mu p_v \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\lambda^j}{(v\mu + s)^{j+1}} \right] = \\ &= \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[P\{\omega = 0\} + v\mu p_v \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{v\mu + s} \right)^r}{v\mu + s - \lambda} \right]\end{aligned}$$

Среднее время ожидания $\bar{\omega}$:

$$\bar{\omega} = -\omega'(0) = \frac{p_v}{1-\pi} \cdot \frac{v\mu - \left(\frac{\rho}{v} \right)^r [(r+1)v\mu - r\lambda]}{(v\mu - \lambda)^2}$$

ФР времени пребывания заявки в СМО



$$\nu = \omega + \eta$$

$$\text{ФР } V(t) = P\{\nu < t\} - ?$$

ПЛС $\nu(s)$, $s \geq 0$, **ФР** $V(t)$:

$$\nu(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dV(t) = \frac{1}{1-\pi} \cdot \left[P\{\omega = 0\} + \nu \mu p_{\nu} \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\nu \mu + s} \right)^r}{\nu \mu + s - \lambda} \right] \cdot \frac{\mu}{\mu + s}$$

Среднее время пребывания $\bar{\nu}$:

$$\bar{\nu} = -\nu'(0) = \bar{\omega} + \frac{1}{\mu}$$

Интенсивность принятой нагрузки

Суммируем уравнения ЛБ:

$$\lambda \sum_{n=1}^{v+r} p_{n-1} = \lambda(1 - \pi) = \mu \left[\sum_{n=1}^v n p_n + v \sum_{n=v+1}^{v+r} p_n \right]$$

Здесь π - вероятность потерь (по времени);

$\lambda(1 - \pi)$ - интенсивность принятого потока (пропускная способность системы);

$\sum_{n=1}^v n p_n + v \sum_{n=v+1}^{v+r} p_n$ - среднее число занятых приборов;

$\mu \left[\sum_{n=1}^v n p_n + v \sum_{n=v+1}^{v+r} p_n \right]$ - средняя интенсивность
обслуженного потока.